Lipsă 10, 11, 12 1948/49 36 18°
LICEUL „GH. LAZĂR" Biblioteca Profes.
No. 8753

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIV

NUMĂRUL 1. — SEPTEMBRIE 1948

SUMARUL

1. Lista membrilor Societății „Gazeta Matematică" . . . .
2. Membrii decedați . . . .
3. Două teoreme din geometria triunghiului. *Maria Neumann*
4. Asupra transformării prin centre radicale. *E. Arghiriade*
5. Raport asupra decernării premiului „General Scarlat Panaitescu". . . . . *Lt. Col. Rez. Ed. Dragomirescu-Buzne, Col. A. Miclescu*
6. Note matematice: 1—3.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 3419, 4287, 5416, 5493, 5589, 5764, 5792, 5880.
12. Probleme propuse: 6510—6525.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALA
1948

9678

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie, compusă în prezent din d-nii: **G. G. Constantinescu**, Doctor în Matematici; **C. C. Teodorescu**, Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **General Gr. Zapan**, (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:
Luni 20 Septembrie ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 2.
Luni 4 Octombrie ora 18: Facerea copertei Nr. 2.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.
Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1948 sunt indicate în tabla de materii a volumului LIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **65**11, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cursul mediu şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *« Gazeta Matematică »* se găsesc:
— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 500

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. 8753.

GAZETA MATEMATICA

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. _____

GAZETA MATEMATICA

FOAIE LUNARĂ

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOLILOR MEDII, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL LIV

15 SEPTEMBRIE 1948 — 15 AUGUST 1949

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1948

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

DELEGAȚIUNEA SOCIETĂȚII PENTRU ANUL 1948/49 *)

G. G. CONSTANTINESCU, C. C. TEODORESCU şi G-L GR. ZAPAN, (Casier).

Secretariatul de redacție: B. M. BARBĂLAT, G-L GH. BUICLIU, V. CLAUDIAN, G. G. CONSTANTINESCU, C. IONESCU-BUJOR, A. PÂRVU, G. D. SIMIONESCU, C. C. TEODORESCU şi O. N. ȚINO.

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ"

G-L GH. BUICLIU, V. CLAUDIAN şi G-L GR. ZAPAN (Aritmetica şi Teoria Numerelor); C. COŞNIȚĂ, GH. I. DUMITRESCU şi N. N. MIHĂILEANU (Geometria); C. IONESCU-BUJOR, C. IONESCU-ȚIU şi G. D. SIMIONESCU (Trigonometria); TH. ANGHELUȚĂ, GH. GALBURĂ şi O. N. ȚINO (Algebra); AL. STOENESCU, GABRIELA ȚIȚEICA şi V. VÂLCOVICI (Mecanica); I. I. CHIȚULESCU, AD. GHEORGHIU şi AL. PANTAZI (Descriptivă şi Perspectivă); N. I. CIORĂNESCU, GH. TH. GHEORGHIU şi MIRON NICOLESCU (Analiza); D. MANGĔROU, A. PÂRVU şi GH. ZAPAN (Istoria şi Filosofia Matematică); GH. MIHOC şi O. ONICESCU (Calculul Probabilităților); I. S. ANTONIU, S. ȚIȚEICA şi T. VESCAN (Fizica matematică şi Electricitatea); D-RA ANA IOAN (Astronomia); D. STAN şi C. C. TEODORESCU (Rezistența Materialelor).

C. IONESCU-ȚIU şi N. N. MIHĂILEANU, delegați pentru corecturi.

C. IONESCU-ȚIU, bibliotecar.

GH. GALBURĂ, bibliotecar şi administrator la „Casa de citire I. IONESCU" din Str. Răsuri Nr. 25.

*) Societatea este administrată şi reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri şi un casier (Art. 14 din Statute).

MEMBRII

1	1945, Febr. 19*	ADAM MIRCEA. Inginer. Str. Ţepeş Vodă Nr. 86. Bucureşti 4.
2	1947, Febr. 17	AGÂRBICEANU IOAN. Inginer. Str. Nic. Golescu, 5. Bucureşti 3.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.
4	1946, Aug. 26	ALBESCU C. NICOLAE. Profesor. Str. Aurel Vlaicu, 166, Bucureşti.
5	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licenţiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. Bucureşti 4.
6	1945, Dec. 3	ALEXANDRESCU OCTAV. Profesor Şcoala Normală din Constanţa.
7	1938, Febr. 17	ALEXIU IULIAN. Inginer constructor. Licenţiat în Matematice Str. Mihail Cornea, 41. Bucureşti 2.
8	1947, Iunie 10	ALMĂJANU PETRE. Maior. Licenţiat matematici. — Str. Maria Ghiculeasa, 2. Parcul Tei, Bucureşti.
9	1943, Febr. 18	AMĂRĂŞTEANU F. MARCEL. Inginer Constructor. Calea Impăratul Traian 11. Craiova.
10	1940, Aug. 28	ANDONIE GH. Inginer de mine. — Profesor Politehnica din Bucureşti. Str. Braziliei, 18. Bucureşti 3. Telefon 2.41.30.
11	1946, Febr. 18	ANDREI ŞTEFAN. Inginer, Str. Vasile Lascăr, 23. Bucureşti. 1.
12	1940, Febr. 8	ANDRONESCU PLAUTIUS. Doctor-Inginer. — Prof. Şcoala Politehnică, Timişoara.
13	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor, Facultatea de Ştiinţe. Cluj.
14	1946, Febr. 18	ANIŢESCU NICOLAIE. Prof. Lic. T. Vladimirescu, Tg. Jiu. Str. Victoriei, 54. Tg. Jiu.
15	1945, Dec. 3	ANTONESCU FILOFTEIA. Licenţiată în matematici. Profesoară. Str. Ismail, 30. Bucureşti, IV.
16	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer. — Profesor la Politehnica „Gh. Asachi". — Str. Ştirbei Vodă, 29a Bucureşti. Tel. 5.71.10.
17	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer electromecanic. Bucureşti III, Calea Floreasca, 150. (Telefon 2.94.37).
18	1947 Febr. 24	APĂTEANU CAMIL. Inginer. Str. Cometa 36, Bucureşti, 3.
19	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Doctor în Matematici. — Politehnica din Timişoara.
20	1945, Dec. 3	ARMEAN ION. Profesor Lic. Gh. Lazăr, Sibiu. Str. Petöfi, 31—33. Sibiu.
21	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cluj. Str. Regală, 109. Cluj.
22	1946, Febr. 18	ATANASIU MARCEL A. D. Inginer C. F. R. Asistent Politehnica Bucureşti. Calea Griviţei, 158. Bucureşti, II.
23	1947, Febr. 17	AUGUSTIN MATEI. Profesor Licenţiat în Matematici. Str. Gh. Dima Nr. 4. Cluj.

*) Data admiterii.

24	1947, Febr. 17	AVRAM N. CONSTANTIN. Inginer. — Profesor suplinitor Politechnica Timişoara. — Bulevardul Dr. V. Babeş Nr. 13. Timişoara, III.
25	1941, Iunie 5	AVRAMESCU AUREL. Doctor-Inginer, — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Sft. Constantin, 24. Bucureşti 1. Tel. 5.21.41.
26	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. Str. Barbu Delavrancea, 51. Bucureşti 2. Telefon 7.56.33.
27	1946, Aug. 26	BĂDESCU EM. AUREL. Maior. Str. B. P. Haşdeu Nr. 33. Bucureşti, 6.
28	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — B-dul Jianu 38 Bucureşti, 2. Telefon 7.38.42.
29	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Calea Dorobanţilor Nr. 232, Bucureşti 3. Telefon 7.35.86.
30	1942, Aug. 27	BĂDULESCU ALEXANDRA. Licenţiată în Matematici. — Profesoară la Liceul din Târgul-Ocna.
31	1945, Dec. 3	BĂDULESCU I. VASILE. Licenţiat în matematici. Profesor Lic. Aurel Vlaicu, Aleea Ambrozie 6. Bucureşti 1.
32	1947, Febr. 17	BĂIATU DUMITRU. Inginer-Profesor. Str. Paris, 32. Bucureşti 3.
33	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Mayo, 560. Republica Argentina.
34	1940, Aug. 28	BĂLAN G. ŞTEFAN. Doctor Inginer. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. Str. Negel, 59, Bucureşti 6. Telefon 4.83.76.
35	1941, Sept. 18	BALLAN EUGEN. Inginer şi Licenţiat în Matematici. Str. Brezoianu, 29 (Alee). Telefon 471.84. Bucureşti I.
36	1946 Febr. 18	BARAN FRANCISC. Inginer. Str. Nicolae Iorga No. 31. Dărmăroaia, Bucureşti.
37	1945, Dec. 3	BARBĂLAT B. Profesor. Str. Aurel Vlaicu, 12, etaj 2. Bucureşti.
38	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.
39	1947, Febr. 17	BĂRBULESCU MIHAIL. Inginer. Str. Sărindar 9, et. 2 Bucureşti 1.
40	1944, Febr. 9	BAZACOV GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Traian, Turnu-Severin. — Str. Adrian 119. Turnu-Severin.
41	1947, Febr. 24	BELEŞ E. IOAN. Inginer. Str. Crăiţelor, 5. Bucureşti 6.
42	1947, Iunie 10	BENEŞ ION. Lt.-Colonel. Str. Dr. Severeanu, 30. Bucureşti, 6.
43	1940, Febr. 8	BENEŞ PAUL. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. — Str. Vaporul lui Asan, 13. Bucureşti, 3. Telefon 2.93.90.
44	1945, Dec. 3	BERCOVICI MARTIN. Inginer. Str. Heleşteului No. 14. (Parc. Jianu). Bucureşti.
45	1947, Iunie 10	BODNĂRESCU HORIA. Inginer. Str. Londra, 47. Bucureşti, 3.
46	1946, Dec. 9	BOIANGIU D. D. Inginer. Str. Negru Vodă, 14 Bucureşti.
47	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Stupinei, 11. Bucureşti Telefon 3.94.96.
48	1947, Aug. 26	BORNEMISA MIRCEA. Inginer. Str. Cartelului, 94. Braşov.
49	1947, Aug. 26	BOROIANU EMIL. Inginer. Str. Mareşal Averescu, 26. Braşov.

50	1947, Febr. 17	BORŞ C. Profesor. Licenţiat în Matematici. Str. Petru Rareş, 83. Piatra Neamţ.
51	1938, Febr. 17	BOTEA G. EMIL. Inginer şef. Str. Alexandru Donici, 30. Bucureşti. Telefon 2.67.66.
52	1945, Dec. 3	BOTEZ GUSTAV. Licenţiat. Profesor Lic. Matei Basarab. Str. Vasile Lascăr, 154. Bucureşti, 3.
53	1935 Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Politehnica „Gh. Asachi". — Str. Gh. Asachi, 7. Iaşi.
54	1945, Dec. 3	BRATU I. MARIANA. Licenţiată în matematici. Profesoară Lic. Aurel Vlaicu. B-dul Gh. Duca, 26. Bucureşti 2. Telefon 7.24.66.
55	1926, Iunie 28	BRENNER M. AVRAM. Inginer. — Viitorului, 22. Bucureşti, 3.
56	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Lt. C-dor. Licenţiat în Matematici. — Inginer. — Str. Aviator Th. Iliescu, 31. Telefon 239.96. Bucureşti, 3.
57	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer. Profesor la Politehnica din Bucureşti. Str. Washington, 32. Bucureşti 3.
58	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General de Divizie în rezervă. Str. M. Kogălniceanu, 10. Bucureşti 2.
59	1938, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General. Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
60	1924, Ian. 30	BUNESCU D. ALEXANDRU. Inginer.. — Str. Arcului 26. Bucureşti 1.
61	1943, Aug. 26	BUNESCU D. EUGEN. Inginer. — Str. Argentina, 50. Bucureşti, 3.
62	1948, Febr. 17	BUNESCU PAUL. Inginer. — Director General Monitorul Oficial. — Str. Clucerului, 32. Bucureşti, 2.
63	1920, Ian 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer Inspector General. Str. Lăzureanu, 48, Bucureşti 6. Telefon 4.62.59.
64	1939, Aug. 31	BURILEANU ŞTEFAN. General de Divizie în rezervă. Doctor în Matematici dela Paris. — Str. General Berthelot, 95. Telefon 4.39.83. Bucureşti, 2.
65	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer-Şef. Str. Vaselor, 40 Bis. Bucureşti 4.
66	1947, Febr. 17	CĂLINESCU VALENTIN. Inginer. Str. Rădăuţi, 12. Ap. 6. Bucureşti, V.
67	1947, Febr. 17	CĂLNICEANU GH. Inginer. Str. C. Sandu Aldea, 63. Bucureşti, II.
68	1947, Febr. 17	CAMBUREANU V. AUREL. Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti, II.
69	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer-Şef. Str. Simonide, 3. Bucureşti 6. Tel. 5.30.55.
70	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. V. Inginer Inspector General. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2. Telefon 7.41.88.
71	1947, Aug. 26	CÂMPEANU OCTAV. Inginer. Str. Canal Timiş, 4. Braşov.
72	1946, Aug. 26	CANCIU GH. Profesor. Str. Stănică Marin, 22. Ploeşti.
73	1947, Febr. 17	CANŢUNIAR IOAN. Inginer. Profesor. Str. Paris, 57 B. Bucureşti, 3.
74	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Str. Cometa, 33. Bucureşti 3. Telefon 2.11.96.
75	1942, Aug. 27	CARACOSTEA D. ANDREI. Inginer. B-dul Lascăr Catargiu, 28. Bucureşti 3. Telef. 2.28.12.
76	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Vasile Conta, 3. Bucureşti 3.
77	1920, Mart. 1	CARAMAN EMIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. General Berthelot, 81. Galaţi.

78	1944, Febr. 16	CÂRLĂNESCU C. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. Calea Dudeşti, 102. Bucureşti 4.
79	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Intrarea Tudor Ştefan, 4. Bucureşti 2. Tel. 2.97.16.
80	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. General de Artilerie în rezervă. — Str. G-ral Ipătescu, 20. Bucureşti 4. Telefon 1.05.82.
81	1920, Ian. 10	CAZACU N.C. Inginer-Şef. — Str. G-ral Angelescu, 44. Bucureşti 2.
82	1939, Aug. 31	CAZANACLI V. PETRE, Licenţiat în Matematici.— Profesor secundar. Str. I. C. Brătianu, 50. Craiova.
83	1945, Aug. 27	CEAUŞESCU F. VASILE. Inginer. Intrarea Popa Nan Nr. 5 B. Bucureşti 4.
84	1945, Febr. 19	CETĂŢEANU STELIAN. Inginer Constructor. Calea Şerban Vodă, 108. Bucureşti 5.
85	1945, Dec. 3	CHELEŞ EUGEN. Licenţiat în matematici. Str. Ing. I. D. Teodoru No. 37 bis Bucureşti 2.
86	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer. Str. Italiană, 30. Bucureşti 1. Telefon 2.54.95.
87	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer. Str. Marin Serghiescu Nr. 6—8. Bucureşti 3. Telefon 2-37.29.
88	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer Inspector General. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Iancu Căpitanu 44. Bucureşti 4. Tel. 2-4318.
89	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer. Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1. Telefon 3.58.51.
90	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Profesor Şcoala Politehnică. — Stradela Bucovina, 7. Bucureşti 2. Telefon 3.51.46.
91	1947, Febr. 17	CIULONESCU ION. Inginer. Str. Pasteur, 48. Bucureşti VI.
92	1939, Dec. 7	CLAUDIAN VIRGIL. Licenţiat în Matematici. Str. Matei Voevod, 75. Bucureşti IV.
93	1946, Aug. 26	CLIMESCU ALEXANDRU. Profesor. Şcoala Politehnică Iaşi.
94	1945, Dec. 3	COATU CONSTANTIN. Inginer. — Licenţiat în matematici. — Str. Apolodor, 26. Et. III. Bucureşti 1.
95	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GEORGE. Inginer. Str. N. Iorga, 22. Bucureşti 3. Telefon 4.61.12.
96	1938, Aug. 31	CONSTANTINESCU G. G. Doctor în Matematici. — Str. Radu dela Afumaţi 71, ap. 3. Bucureşti.
97	1947, Febr. 17	CONSTANTINESCU N. N. Inginer. Str. Finlanda, 6 B. Bucureşti 3.
98	1895, Sept. 15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. Bucureşti 3.
99	1947, Aug. 26	CONSTANTINESCU I. VICTOR. Inginer. Str. Dr. Baiulescu, 15. Braşov.
100	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer. Str. Brezoianu, 51. Bucureşti. Telefon 4.67.54.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

101	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer. Str. Mihail Eminescu, 17. Braşov.
102	1948, Iunie 8	COŞNIŢĂ CEZAR. Doctor în Matematici. Str. C Nr. 4. Parcul Vatra Luminoasă. Bucureşti.
103	1947, Febr. 17	COSTACHE NICOLAE. Inginer. B-dul Lascăr Catargiu, 46. Bucureşti 3.
104	1941, Febr. 20	COSTĂCHESCU V. CONSTANTIN. Lt.-Col. de marină. Str. Călăraşi 57. Constanţa.
105	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Str. Polonă, 57. Bucureşti 3. Telefon 1.16.16.
106	1947, Aug. 26	CRĂCIUN VASILE. Inginer. Str. Matei Basarab, 15. Braşov.
107	1939, Dec. 7	CRĂCIUNEANU CONST. Inginer. B-dul Mărăşti, 47. Bucureşti 2. Telefon 7.48.37.
108	1946, Aug. 26	CRĂCIUNESCU MIOARA. Profesoară. — Şoseaua Giurgiului, 5. Bucureşti.
109	1945, Dec. 3	CREANGĂ IOAN. Profesor la Politehnica Gh. Asachi Iaşi.
110	1947, Iunie 10	CRISTEA D. EFTIMIE. Inginer. Str. Turda, 104. Bucureşti, 2.
111	1948, Febr. 17	CUCU V. TUDOR. Inginer. Str. Vintilă Brătianu, 10 bis. Braşov.
112	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Str. Dobrogeanu Gherea 35. R.-Sărat.
113	1947, Iunie 10	DIACONESCU V. CONST. G-ral Divizie. Str. Mihai Vodă, 55. Bucureşti, I.
114	1946, Febr. 18	DIACONESCU ION. Licenţiat în matematici. — Profesor. — Str. Arhitect Mincu, 9. Bucureşti, II.
115	1941, Iunie 5	DINESCU P. TUDOR. Inginer Constructor. Str. Eufrosina Poteca, 5. Bucureşti 4. Telefon 0.83.38.
116	1947, Aug. 26	DINESCU MARIA. Profesoară, Liceul Mihai Viteazul. Şoseaua Vitan, 127. Alee. Bucureşti.
117	1939, Febr. 23	DOBRESCU ANDREI. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Nerva Traian, 36. Bucureşti 5.
118	1939, Aug. 31	DOBRESCU D. PAUL. Inginer. Str. Bisericii, 4. Bucureşti 2.
119	1945, Aug. 27	DONCIU NICOLAE. Licenţiat în Matematici. Str. Polonă, 21. Bucureşti.
120	1947, Aug. 26	DRAGOMIR N. IOAN. Inginer. Braşov.
121	1939, Dec. 7	DRAGOMIRESCU-BUZNE EDUARD. Lt.-Col. de Artilerie în rezervă. Str. General Anghelescu, 159. Bucureşti, 2. Tel. 5.34.90.
122	1948, Febr. 24	DRĂGULĂNESCU AUREL. Profesor. Str. Spitalul Militar Nr. 1. Braşov.
123	1946, Febr. 18	DRĂNICEANU EUGENIA. Profesoară Liceul de fete Timişoara.
124	1936, Febr. 27	DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic. Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3. Telefon 2.21.09.
125	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef, Craiova.
126	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor Colegiul Naţional Sf. Sava. — Str. Dr. Lister, 7 B. Bucureşti, 6. Telefon 3.72.51.
127	1936, Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic. — Conferenţiar Politehnica din Bucureşti. — Str. Cuza Vodă, 94. Bucureşti.

128	1947, Febr. 17	DUMITRESCU NICOLAE. Inginer. Str. Eugenia, 16. Bucureşti 2.
129	1945, Dec. 3	DUMITRESCU I. TH. Licenţiat în matematici. Inginer chimist. Str. General Leca, 41. Bucureşti V. Telefon. 5.92.65.
130	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Şos. Ştefan cel Mare, 218. Bucureşti 1.
131	1945, Dec. 3	FLEXI CUŞUŢĂ SOFIA. Profesoară. Str. Adrian, 30. Bucureşti VI.
132	1947, Aug. 26	FLOREA INOCENŢIU. Inginer. Str. Voevozilor, 8. Braşov.
133	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer constructor. — Asistent Politehnica Bucureşti. — Str. Vaselor, 28. Bucureşti 4. Telefon 2.52.36.
134	1946, Febr. 18	FOCŞA VLADIMIR. Inginer. Str. Gr. Alexandrescu, 78 et. I. Bucureşti 3.
135	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Lt.-Col. de Artilerie în rezervă. — Licenţiat în Matematici. — Str. Porumbaru, 33. Telefon 7.15.83. Bucureşti 3.
136	1946, Febr. 18	FRÂNCU DUMITRU. Licenţiat în matematici. — Profesor Secundar. — Str. Lt. Niculescu Bazar, 17. Bucureşti.
137	1947, Aug. 26	FUEREA CONSTANTIN. Inginer. Piaţa Unirei, 1. Braşov.
138	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Calea Victoriei, 70. Bucureşti, 1.
139	1943 Aug. 26	GAFENCU RODICA. Licenţiată în Matematici. — Profesoară. — Str. Unirei. Buzău.
140	1947, Aug. 26	GĂINĂ GH. Inginer. Str. Episcop Saftu, 67. Braşov.
141	1946, Aug. 26	GAIU NICOLAE. Profesor. Predeal.
142	1946, Febr. 18	GALBURĂ GHEORGHE. Doctor în matematici. Asistent la Universitate. — Str. Răsuri, 25. Bucureşti.
143	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer. — Str. Wilson, 15. Bucureşti 1. Telefon 3.48.13.
144	1947, Iunie 10	GALL ST. TRAIAN. Inginer. Str. Dr. Teohari, 15. Bucureşti, 6.
145	1944, Mai 8	GEORGESCU CALIPSO. Licenţiată în Matematici. — Profesoară. — Str. Vasile Stroescu 10. Bucureşti 4.
146	1947, Aug. 26	GEORGESCU CONST. Inginer. Str. Lapedat, 30. Braşov.
147	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Str. Gh. D. Palade, 35. Bucureşti 3. Telefon 2.29.87.
148	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. NICOLAE. Inginer Inspector General. Şos. Jianu, 70. Bucureşti 2.
149	1945, Dec. 3	GEREANU ANA. Licenţiată în matematici. — Str. Locot. C. Ionescu-Baican, 58. Bucureşti 4.
150	1947, Febr. 17	GHENEA ALEXANDRU. Inginer. Parcul Delavrancea, Aleea C. Nr. 2. Bucureşti, 2.
151	1936, Febr 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici. Arhitect. — Str. Turda, 209. Bucureşti 2.
152	1941, Iunie 5	GHEORGHIU ALEXANDRU. Inginer constructor. — Asistent la Şcoala Politehnică. — Calea Victoriei, 128. Bucureşti 1. Tel. 4-6580.
153	1932, Apr. 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici. — Profesor Politehnică. Str. Voltaire Nr. 1. Timişoara.

154	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Piaţa Lahovary, 3. Bucureşti 3. Tel. 2.95.18.
155	1948, Aug. 24	GHEORGHIU EM. OCTAVIAN. Licenţiat în Matematici. Asistent Facultatea de Ştiinţe. Calea Victoriei Nr. 95, etaj 10. Bucureşti.
156	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Matematici şi diplomat al Institutului de Statistică din Paris. Str. Aviator Iliescu, 44. Bucureşti 3.
157	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor Politehnica din Timişoara. — Str. Lalescu, 3. Timişoara, 3.
158	1947, Aug. 26	GHIA P. HORIA. Inginer. Braşov.
159	1942, Febr. 19	GHICA AL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Aleea Alexandru, 16. Bucureşti 3.
160	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. AL. Col., Inginer Radio-electrician. E. S. E. (Paris). — Str. Occidentului, 12. Bucureşti 2. Telef. 5.45.47.
161	1947, Febr. 17	GHIOCEL VASILE. Inginer. Str. Dr. Ghiulamila, 27. Bucureşti 6.
162	1939, Febr 23	GHIRCOIAŞU V. N. Licenţiat în Matematici. — Asistent universitar la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Mico 40. Cluj.
163	1936, Aug 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer. Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3. Telef. 2.75.74.
164	1942, Aug. 27	GHIŢESCU SPIRIDON. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Str. Al. Constantinescu, 1. Parcul Domeniilor, Bucureşti 2. Telefon 7.12.32.
165	1931, Mart 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Dr. Ioan Meşotă" — Str. Dorobanţilor, 5. Braşov.
166	1948, Febr. 17	GRADIN I. NICOLAE. Inginer. Director Imprimeria Naţională. Str. Cronicarilor, 7. Bucureşti.
167	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4. Telefon 4-7828.
168	1945, Dec. 3	GROSU ION. Inginer. — Licenţiat în matematici. — Str. Momuleanu, 27. Bucureşti.
169	1941, Iunie 5	GUŢU ION. Inginer constructor. Str. Vişinilor, 2. Bucureşti 4. Tel. 4.47.95.
170	1947, Aug. 26	HÂNCU MIRCEA. Inginer. Str. M. Eminescu, 16. Braşov.
171	1927, Ian. 28	HANGANU M. D. Doctor-Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti 2. — Şos. Jianu, 56. Bucureşti. Telef. 7.49.79.
172	1946, Febr. 18	HARET G. SPIRU. Inginer. — Profesor Şc. de subingineri din Bucureşti. — B-dul Ana Ipătescu No. 14. Bucureşti 3.
173	1945, Dec. 3	IACOB CAIUS. Doctor în matematici. — Profesor. Universitatea Cluj.
174	1945, Aug. 27	IACOB ŞT. EUGEN. Lt.-Colonel în rezervă. — Str. Smârdan, 2 A. Galaţi.
175	1946, Aug. 26	IACOVACHE AURELIAN. Licenţiat în Matematici. Str. Cuţitul de Argint, 5. Bucureşti V.
176	1948. Febr. 17	IACOVACHE DORA. Profesoară. Str. Cuţitul de Argint, 5. Bucureşti V.
177	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer Inspector General, pensionar, Aleea Nicolae Iorga, 5. Bucureşti.

178	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer. Str. Buzeşti, 74. Bucureşti 2. Telef. 5.45.31.
179	1945, Dec. 3	IOAN ANA. Licenţiată în matematici. — Profesoară şi Asistentă. Str. Cuţitul de Argint, 5. Bucureşti V.
180	1947, Febr. 17	IOAN Z. GHEORGHE. Inginer. Str. Belgrad, 10. Bucureşti 3.
181	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3. Telef. 2.28.10.
182	1945, Dec. 3	IONESCU Z. ALEXANDRU. Licenţiat în matematici. — Profesor Lic. Ştirbey-Vodă. Str. Bucureşti, 165. Călăraşi.
183	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Sorbona. — Profesor Facultatea de Ştiinţe. — Cluj.
184	1946, Febr. 18	IONESCU V. FLORIN. Inginer. — Str. Elena Matei Voevod, 7. Bucureşti 4.
185	1947, Aug. 26	IONESCU GH. Ing. Str. Dr. Toma Ionescu, 11 B. Braşov.
186	1947, Febr. 17	IONESCU I. GH. Inginer. Str. Dr. Toma Ionescu, 13. Bucureşti 6. Telefon 4.84.96.
187	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Str. Agricultori, 15. Ap. 13. Bucureşti 4.
188	1947, Aug. 26	IONESCU ST. ION. Inginer. Comuna Noua, 47. Oficiul Poştal Dârste. Jud. Braşov.
189	1945, Dec. 3	IONESCU N. MIHAI. Licenţiat în matematici. — Profesor Liceul de băeţi. Craiova.
190	1941, Febr. 20	IONESCU I. PAUL. Profesor de Matematici la Liceul Comercial „Gh. Chiţu". Str. Traian, 165. Bucureşti.
191	1939, Febr. 23	IONESCU TIBERIU. Licenţiat în Matematici. Calea Rahovei, 40. Bucureşti 1.
192	1947, Febr. 17	IONESCU TEODOR. Inginer. Str. Fitibiliu, 8. Bucureşti 4.
193	1948, Iunie 8	IONESCU VIORICA. Profesoară. Str. Traian, 165. Bucureşti.
194	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR CONSTANTIN. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Asistent Universitar. — Str. Petrescu IX. Nr. 30. Bucureşti 4.
195	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU D. C. Maior în rezervă. Inginer constructor. Licenţiat în Matematici. — Asistent Universitar. — Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
196	1932, Apr. 20	IONESCU-ZANE D. GH. Inginer. Str. Fabrica de Chibrituri, 28. Bucureşti 6. Telefon 3.80.70.
197	1946, Febr. 18	IVANCEA I. MIRCEA. Inginer. Aleea Grand. Str. D No. 11. Bucureşti 2.
198	1948, Aug. 24	KAHANE ARNO. Doctor în Matematici. Profesor Lic. Matei Basarab. Bulevardul Domniţei, 47. Bucureşti.
199	1929, Ian. 30	KAUFMANN NORBERT. Inginer-Şef. Str. Dr. Iuliu Baraş, 12, et. 2. Bucureşti. Telefon 6.17.09.
200	1946, Dec. 9	LASCARIDIS ANASTASE. Inginer. Str. Dionisie, 12. Bucureşti 3.
201	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Inginer. Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6. Telef. 3.83.18.

202	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Bul. Brâncoveanu, 6. Bucureşti 1. Telef. 4.06.34.
203	1947, Iunie 10	LEOVEANU CONST. Lt.-Colonel. Inginer. Str. Armenească, 14 bis. Bucureşti 3.
204	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. General de Corp de Armată în rezervă. — Str. Spătarului, 54. Bucureşti 3. Telefon 2.09.40.
205	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — St. Dr. Mirinescu, 23. Bucureşti 6.
206	1946, Aug. 26	LUCULESCU CONSTANTIN. Inginer. — Str. Vasile Lascar, 27. Bucureşti 1.
207	1945, Dec. 3	MACOVEI ION. Profesor de matematici la Liceul Popular de băeţi. Str. Elena Doamna, 38. Craiova.
208	1934, Dec. 19	MALAXA C. ELENA. Licenţiată în Matematici şi Fizico-Chimice. — Profesoară la Şcoala Centrală de fete. — Str. General Lahovary, 3. Bucureşti 3.
209	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3. Telefon 2.54.10.
210	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer Str. Occidentului 47. Bucureşti. Telefon 4.92.66.
211	1947, Febr. 17	MANCIU CORNELIU. Inginer. Str. Romană, 8. Bucureşti, 3.
212	1947, Febr. 17	MANEA GHEORGHE. Inginer. Parcul Jianu. Str. H, 3. Bucureşti 3.
213	1946, Aug. 26	MANGÉRON D. DUMITRU. Profesor. Şcoala Politehnică Iaşi.
214	1947, Febr. 17	MANIŢIU EMILIAN. Inginer. Str. Ana Davila, 22. Bucureşti, 6.
215	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer Bd. Dacia, 41. Bucureşti 3.
216	1946, Febr. 25	MANU IOAN. Licenţiat în matematici. — Profesor Şcoala Normală de băieţi — Str. Gheorghiu Dej, 27. Gherla.
217	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer. Str. Dr. Pasteur, 65. Bucureşti 6. Telef. 4.36.37.
218	1947, Febr. 17	MARCU VASILE. General în rezervă. Inginer. Str. 10 Mese, 7. Bucureşti, 4.
219	1947, Aug. 26	MĂRDĂRESCU VLADIMIR. Inginer. Str. Aurel Popovici, 8. Braşov.
220	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Direcţia Generală a Drumurilor. — Intrarea Geneva, 6. Bucureşti 3. Telef. 2.45.84.
221	1939, Dec. 7	MARIAN VICTOR. Doctor în Fizică. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Hajdeu, 1. Cluj.
222	1946, Aug. 26	MARINESCU S. DUMITRU. Inginer. — Str. Ionel Agraru, 7. Ploeşti.
223	1922, Mai 10	MATEESCU CRISTEA. Doctor Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Dorobanţilor, 1. B. (Alee). Bucureşti 3. Telefon 2.25.70.
224	1943, Aug. 26	MATEESCU DAN. Inginer. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Gh. Lazăr, Nr. 5. Reşiţa.
225	1945, Dec. 3	MATEESCU I. ION. Inginer. Şos. Jianu, 3. Bucureşti 3.
226	1943, Aug. 26	MĂTIEŞ V. ION. Licenţiat în Matematici. Profesor secundar-Cluj. — Str. D-trie Cantemir, 17. Cluj.

227	1944, Aug. 21	MAVRODIN D. DUMITRU. Licenţiat în Matematici. — Asistent la Facultatea de Arhitectură din Bucureşti. — Str. Antim 62. Bucureşti 6.
228	1943, Febr. 18	MEHEDINCU VASILE. Licenţiat în Matematici. Profesor la Liceul Comercial „N. Bălcescu", Str. Alex. Constantinescu, Nr. 24. Parcul Domeniilor. Bucureşti 2.
229	1939, Aug. 31	MEREUŢĂ EM. Licenţiat în Matematici. — Str. Niculescu Bazar, 7, Parcul Iancului. Bucureşti 4. Telef. 5.88.61.
230	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. Str. Ştefan Burcuş, 12. Bucureşti 2. Telef. 7.13.91.
231	1939, Dec. 7	MICLESCU ANDREI. Colonel de Artilerie. Licenţiat în Ştiinţele Fizico-chimice şi Drept, brevetat al Şcoalei Superioare de Război din Paris. — Str. Delea Veche, 15 bis. Bucureşti 4. Tel. 4-3514.
232	1947, Febr. 17	MICLESCU ION. Inginer. Str. Simu, 3. Bucureşti 3.
233	1942, Aug. 27	MIHĂIESCU S. ŞTEFAN. Inginer. Bulevardul Independenţei, 18. Ploeşti.
234	1945, Dec. 3	MIHĂILĂ N. Licenţiat în matematici. — Profesor Liceul Comercial. — Str. Av. Sănătescu, 8. Bucureşti 6.
235	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Matei Basarab Bucureşti. Asistent la Facultatea de Matematici. Str. Vulturi, 63. Bucureşti 4. Telef. 4-3425.
236	1939, Dec. 7	MIHOC GHEORGHE. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. — Str. Gogu Cantacuzino, 14. Bucureşti 4.
237	1939, Aug. 31	MIHU CERCHEZ. Inginer. — Licenţiat în Ştiinţele Matematice. — Str. Paleologu, 7. Bucureşti. 4.
238	1948, Aug. 24	MINEA CONSTANTIN. Licenţiat în matematici. Profesor. Str. Bitolia, 25. Bucureşti.
239	1947, Febr. 17	MINOIU IOAN. Inginer. Str. Sfântu Ştefan, 16. Bucureşti 4.
240	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. Str. Roma, 18. Bucureşti 3. Telef. 2.66.88.
241	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Vasile Conta, 3. Intr. A, ap. 6. Bucureşti 3.
242	1948, Iunie 8	MIRON C. EMIL. Profesor. Str. 23 August Nr. 22. Cluj.
243	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer Inspector General. Licenţiat în Matematici. Piaţa Lahovari, 1 A. Bucureşti 3. Telef. 2.53.43.
244	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. Str. Ciprian Porumbescu, 11. Bucureşti. Telef. 2.45.91.
245	1940, Febr. 8	MIU M. ION. Inginer Constructor. Licenţiat în Matematici. — Str. Mihai Bravu Nr. 160 bis. Bucureşti 4.
246	1947, Febr. 17	MODÂLCĂ GL. EMIL. Inginer. Str. Providenţii, 19. Turnu-Severin.
247	1942, Aug. 26	MOISIL ANA. Inginer. Str. Stupinei, 39. Bucureşti 4.
248	1939, Febr. 23	MORŢUN EMIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul teoretic Nr. 1. Piteşti.
249	1947, Febr. 17	NĂCESCU DAN. Inginer. Str. Caragiale, 31. Bucureşti 3.
250	1932, Febr. 21	NEAMŢU PETRE. Inginer. — Str. Roma, 59. Bucureşti 3.

251	1946, Aug. 26	NECULCE EUGENIU. Profesor. Str. Popa Tatu, 61. Bucureşti 2.
252	1947, Iunie 10	NEDELCU FLOREA. Inginer. Str. Iacob Negruţi, 26. Bucureşti 2.
253	1928, Aug. 29	NEGURĂ GR. ST. Licenţiat în Matematici. — Profesor — Str. Dobranici, 16. Bârlad.
254	1944, Feb. 9	NEICU MIRCEA. Inginer. Şoseaua Jianu 34. Bucureşti III.
255	1939, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer. — Str. Agricultori, 15. Bucureşti 4.
256	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. B-dul Ana Ipătescu, 22, Bucureşti 3. Telef. 2.12.31.
257	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer. Str. Ştefan cel Mare, 44. Piatra Neamţ.
258	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Profesor. — Str. Ecoului, 85. Bucureşti 6. Telef. 3.10.94.
259	1931, Mart. 11	NICOLESCU V. ALEX. Doctor în Matematici. — Profesor Facultatea de Agronomie. Craiova.
260	1929, Ian. 31	NICOLESCU MIRON. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Paris 14. Bucureşti 3. Telef. 2.28.78.
261	1934, Dec. 19	NICOLESCU IOAN RADU. Comandor de Marină în rezervă. Str. Dr. C. Gr. Romniceanu 7. Tel. 5.32.12. Bucureşti 3.
262	1947, Aug 26	NICULESCU CONST. Inginer. Str. V. Alexandri, 29. Braşov.
263	1944, Mai 8	NOVACU VALER. Licenţiat în Matematici. Doctor în fizică. Cluj.
264	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6. Tel. 3.48.85.
265	1945, Dec. 3	ONIGA GH. THEODOR. Inginer. Str. Anton Pan, 16 B. Etaj II. Bucureşti 4.
266	1927, Ian. 28	ORĂNESCU OCTAVIAN. Inginer. Str. Bolintineanu, 2. Galaţi.
267	1910, Mai 21	ORĂŞANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4. Telef. 4.32.48.
268	1942, Aug. 27	PANAITE N. THEODOR. Maior, Inginer. Str. Dr. Marcovici, 2. Bucureşti 1.
269	1929, Ian. 21	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-expert. Profesor. Str. Prelungirea Negoiului, 16. Bucureşti.
270	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer. Licenţiat în Matematici. Str. Romană, 14. Bucureşti 3. Telefon 2.67.29.
271	1939, Aug. 31	PĂSĂRICĂ FL. Licenţiat în Matematici. Splaiul Independenţei, 56. Bucureşti 6.
272	1945, Dec. 3	PĂTRAŞCU A. GHEORGHE. Inginer. Profesor Şcoala Subingineri. Str. Av. Gh. Mărăşoiu, 18. Bucureşti 3.
273	1945, Dec. 3	PĂTROIANU MIHAIL. Inginer. Licenţiat în matematici. Str. Calomfirescu, 6. Bucureşti 1.
274	1939, Dec. 7	PAVEL DORIN. Doctor-Inginer. — Profesor la Politehnica Bucureşti. — Str. Dr. Severeanu, 26. Bucureşti 6. Telef. 6.12.52.
275	1941, Iunie 5	PERLEA G. DAN. Inginer. Str. Dr. Severeanu, 8. Bucureşti 6. Telef. 3.61.56.
276	1939, Dec. 7	PERSU AUREL. Inginer. — Profesor Politehnica Bucureşti. — Calea Victoriei, 159. Bucureşti 1. Telef. 3.22.31.

277	1939, Dec. 7	PETRESCU S. GHEORGHE. Doctor în Matematice. — Şef de lucrări la Observatorul din Bucureşti. — Str. Cuţitul de Argint, 5. Bucureşti 6.
278	1940, Aug. 28	PETRESCU PETRE. Lt.-Col. rez. din Artilerie.—Str. Roma (Intrarea Roma, 5). Bucureşti 3. Telef. 2.03.91.
279	1948, Aug. 24	PETRULIAN NICOLAE. Inginer. Doctor în ştiinţe. Profesor Politehnică. Str. Paris, 14. Bucureşti.
280	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. Bucureşti 5.
281	1945, Dec. 3	POP ALEXANDRU. Licenţiat în matematici. — Profesor Lic. Comercial. Str. Episcopul Ilarion, 28. Bucureşti, 4.
282	1946, Dec. 9	POPA I. MARIN. Licenţiat în matematici. B-dul Al. Cuza, 20. Bucureşti 2.
283	1936, Febr. 18	POPESCU N. CORNELIU. Licenţiat în matematici. — Profesor. — Str. Piscului, 6. Bucureşti V.
284	1939, Dec. 7	POPESCU M. IOAN. Licenţiat în Matematici. Col. de Artilerie Str. Dr. C. Severeanu, 23. Bucureşti 6. Telefon 4.19.77.
285	1945, Dec. 3	POPESCU OVIDIU. Licenţiat în matematici. Profesor secundar. Str. Stupinei, 34, scara C. ap. I. Bucureşti 4.
286	1935, Apr. 10	POPESCU A. VICTOR. Inginer. Conferenţiar Politehnica Str. Comandor E. Botez, 12. Bucureşti 3. Telef. 2.38.30.
287	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer electromecanic. Str. General Berthelot, 65. Bucureşti 2.
288	1921, Febr. 17	POPESCU-OLT PAULINA. Licenţiată în matematici. Str. Miron Costin, 9. Bucureşti, II.
289	1947, Febr. 17	POPOVICI C. CONSTANTIN. Inginer. Str. Dionisie Lupu, 12. Bucureşti 1. Tel. 2.84.79.
290	1944, Febr. 9	POPOVICI C. GH. CONST. Inginer. Piaţa Lahovari 1 A. Bucureşti 3. Telef. 2.76.30.
291	1946, Febr. 18	POPOVICIU I. GAVRIL. Inginer Str. Virgil Pleşoianu, 53. Bucureşti 2. Telef. 7.47.37.
292	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Doctor în Matematici. — Profesor Universitatea din Cluj.
293	1947, Febr. 17	POPP ALEXANDRU. Inginer. Str. Popa Petre, 41. Bucureşti 3.
294	1927, Mai 11	POPP I. TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Inspector general. — Str. Clucerului, 10. Bucureşti 2. Tel. 7-1125.
295	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor. Şoseaua N. Titulescu. Intr. Tighina, 11. Bucureşti 2. Telef. 3.58.52.
296	1945, Dec. 3	POSTELNICESCU MIRCEA. Ing. Str. Dr. Demostene, 9. Bucureşti 6.
297	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. General de Divizie în rezervă. Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
298	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici. Actuar expert. Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2. Telef. 7.46.00.
299	1945, Dec. 3	PREDOIESCU M. TRAIAN. Licenţiat în matematici. — Profesor Gimnaziul Comercial — Str. Eroina dela Jiu No. 14. Bucureşti 6.
300	1944, Febr. 9	PROFIRI N. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — B-dul Elisabeta 24. Bucureşti 1. Telef. 3.25.91.

301 | 1925, Febr. 11 | PROTOPOPESCU GRIGORE. General de Artilerie în rezervă. B-dul Ana Ipătescu, 16. Bucureşti 3. Telef. 2.49.46.

302 | 1946, Febr. 18 | RĂDULESCU MARCEL. Inginer Str. Horia, 1. Et. 2. Cluj.

303 | 1947, Febr. 17 | RĂDULESCU VLAD. Inginer. Str. Mih. Antonescu, 1. Bucureşti 2.

304 | 1920, Aug. 15 | REVICI TEOFIL. Inginer. Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti 2. Telef. 2.82.04.

305 | 1946, Febr. 18 | RIZESCU T. GHEORGHE. Inginer Inspector General. B-dul N. Bălcescu, 32. Bucureşti 1.

306 | 1945, Dec. 3 | RIZESCU T. ION. Licenţiat în matematici. — Profesor Liceul Mircea cel Bătrân. — Str. Ştefan Mihăileanu, 18. Constanţa.

307 | 1947, Febr. 17 | ROBAN VINTILĂ. Inginer. Str. Armenească, 28 bis. Bucureşti 3.

308 | 1933, Febr. 22 | ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Doctor în Ştiinţele Politico-Economice. — Licenţiat în Drept. — Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6. Telef. 4.66.32.

309 | 1914, Dec. 20 | ROŞU V. Inginer Inspector General. Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1. Telef. 3.62.54.

310 | 1946, Febr. 18 | RUSU T. FLORICA. Profesoară. Str. Petre Liciu, 22. Bucureşti 2.

311 | 1941, Febr. 20 | RUZVAN I. THEODOR. Inginer constructor. — Bd. G-ral Traian Moşoiu, 11. Bucureşti 5. Telef. 4.53.91.

312 | 1929, Aug. 28 | SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. Str. Vasile Lascăr, 18. Bucureşti. Telefon 3.30.10.

313 | 1904, Sept. 1 | SALIGNY M. Inginer Inspector General. Str. Frumoasă, 50. Bucureşti.

314 | 1947, Febr. 17 | SAPATINO CONST. Inginer. Str. Th. Masaryk, 21. Bucureşti 4. Telefon 2.67.40.

315 | 1920, Ian. 10 | SĂPUNARU S. GH. Inginer Constructor. Str. Pia Brătianu, 5. Bucureşti 3.

316 | 1929, Aug. 28 | SARIAN MIHAI. Inginer-Şef. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Columb, 7. Bucureşti 3. Telef. 2.14.30.

317 | 1944, Febr. 16 | SAUR I. Inginer electromecanic. Str. Ion Maiorescu, 47. Bucureşti 4. Telef. 1.11.98.

318 | 1947, Aug. 26 | SĂVESCU IOAN. Inginer. Str. Castelului, 34. Braşov.

319 | 1938, Aug. 31 | SAVIN C. I. Lt.-Col. Licenţiat în Matematici. — Str. General Zaharia Petrescu, 11. Bucureşti.

320 | 1947, Febr. 17 | SCHILERU GRIGORE. Inginer. Str. Intrarea Romei, 3. Bucureşti 3.

321 | 1935, Aug. 22 | SCHILERU-DILI C. ION. Inginer Şef — Profesor Politehnica Timişoara. — Str. Ştirbey-Vodă, 65. Bucureşti 2. Telefon 3.41.41.

322 | 1946, Dec. 9 | ŞCODRANU AL. Inginer. Str. Heleşteului, 31. Parcul Jianu. Bucureşti.

323 | 1948, Febr. 17 | ŞERBAN EMIL. Profesor. Str. 4 Nr. 18. Parcul Vatra Luminoasă. Bucureşti.

324 | 1945, Dec. 3 | ŞERBĂNESCU FLORICEL. Licenţiat în matematici. Str. M. Iot. 359. Bucureşti.

325 | 1920, Aug. 15 | ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer Inspector General. Str. Paleologul, 3 bis. Bucureşti 4. Telefon 3.46.04.

326 | 1921, Febr. 6 | SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Facultatea de Arhitectură. Şos. Kiseleff 25. Bucureşti 2. Telef. 7.10.01.

327	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. — Inspector în învăţământul secundar. — B-dul Pache, 99. Corp. VI. Bucureşti 4. Telefon 4.92.49.
328	1940, Aug. 28	SIMIONESCU MIRCEA. Inginer constructor. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Varşovia, 2. Bucureşti 3. Telefon 2.25.55.
329	1945, Dec. 3	SIRINIAN MENDREY. Licenţiată în matematici. — Profesoară lic. din Constanţa. — Str. Ion Grădişteanu, 17. Constanţa.
330	1941, Iunie 5	ŞLEAHTENEA DUMITRU. Inginer constructor. Parcul Ianculul II. Str. Gabrielescu, 5. Bucureşti. Telef. 4.92.13.
331	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Inginer Inspector General. Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
332	1946, Aug. 26	ŞOVA C. ION. Inginer. — Str. Ion Ghica, 6. Cluj.
333	1943, Febr. 18	STAMATE I. IONEL. Licenţiat în Matematici. — Asistent la Facultatea de Ştiinţe din Cluj.
334	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef. Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3. Telef. 2.35.75.
335	1938, Febr. 17	STAN I. AURELIAN. Lt.-Col. Inginer. Licenţiat în Matematici. Str. Atena, 3. Bucureşti 3. Telefon 5.59.74.
336	1920, Ian. 10	STAN A. D-TRU. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Str. Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4. Telefon 3.84.89.
337	1945, Dec. 3	STAN V. ILIE. Ing. Calea Dorobanţilor 82. Bucureşti 3. Telef. 2.84.08.
338	1948, Febr. 24	STĂNCIULESCU M. OVIDIU. Inginer. Str. Mihai Bravul, 105, Brăila.
339	1941, Iunie 5	STANCU S. MIRCEA. Inginer. Str. Gh. Folescu, 20. Cartierul Vatra Luminoasă. Bucureşti 4.
340	1943, Aug. 26	STĂNCULESCU I. ION. Inginer constructor. — Asistent suplinitor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Romană, 182. Bucureşti 3.
341	1946, Aug. 26	STĂNCULESCU-ROCIU-MARGARETA. Profesoară. Str. Horei, 32. Bucureşti 4.
342	1943, Febr. 18	STĂNCULESCU-ROMAŞCAN GEORGETA. Inginer constructor. Str. Romană 182, Bucureşti 3.
343	1941, Aug. 28	ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE. Căpitan de geniu în rezervă. Str. Popp de Băseşti, 52. Bucureşti 4.
344	1939, Febr. 23	STOENESCU I. ALEXANDRU. Inginer. — Conferenţiar Politehnică. — Str. Caragea Vodă, 21. Bucureşti 3.
345	1943, Febr. 18	STOICA D. ALEXANDRU. Inginer. Str. Eminescu, 27. Bucureşti 2.
346	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer Str. Eminescu, 27. Bucureşti 2. Telefon 7.18.04.
347	1941, Iunie 5	STOIKA V. VICTOR. Inginer Inspector General. — Str. Paris, 12. Bucureşti 3. Telef. 2.03.19.
348	1945, Dec. 3	STOILOV S. Doctor în matematici. — Profesor universitar. — Piaţa Roseti, 3. Bucureşti 1.
349	1947, Iunie 10	STRATILESCU GR. IOAN. Inginer. — Profesor Politehnică. — Str. Dr. Mirinescu, 21. Bucureşti VI.
350	1946, Aug. 26	STUPARU CONSTANTIN. Profesor. — Str. Plevnei, 21. Turnu-Severin.
351	1948, Aug. 24	SURDU MIHAIL. Licenţiat în Matematici. Str. Prelungirea Negoi, 8. Bucureşti.

352	1947, Aug. 26	SVETENCU ORESTE. Inginer. Str. Vintilă Brătianu, 12. Braşov.
353	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU ARISTIDE General de Artilerie în rezervă. — Str. Frumoasă, 54. Bucureşti 2. Telef. 3.39.31.
354	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Licenţiat în Matematici. Doctor Inginer mecanic. — Profesor Politehnica — Str. Cazărmei, 52. Bucureşti 6. Telef. 4.50.78.
355	1948, Febr. 17	TAUBER ALEXANDRU. Inginer. Str. Spătarului, 36. Bucureşti.
356	1948, Febr. 17	TELEANU ALEXANDRINA. Profesoară. Str. Traian, 169. Bucureşti.
357	1900, Noem. 1	TEODOREANU VASILE. Profesor onorar. — Str. Dionisie, 76. Bucureşti 2.
358	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Profesor la Politehnica din Bucureşti. Directorul Laboratorului de Rezistenţă şi Incercări de materiale. Calea Griviţei 132. Bucureşti 2. Telefon 3.94,40.
359	1945, Dec. 3	TEODORESCU ST. IOAN. Licenţiat în matematici. Profesor secundar. Str. Occidentului, 16. Bucureşti 2.
360	1945, Dec. 3	TEODORESCU D. IOANA. Licenţiată în matematici. — Profesoară. — Str. Sandu Aldea, 16. Bucureşti 2.
361	1947, Iunie 10	TEODOR ŞERBAN. Inginer. Calea Plevnei, 190. Bucureşti 2.
362	1937, Ian. 28	THEODORU G. HENRI. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Alex. Donici, 27. Bucureşti 3. Telefon 2.37.89.
363	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Aleea Matei Corbescu, 8. Bucureşti 1. Telef. 2.73.57.
364	1945, Dec. 3	TILICĂ ŞTEFAN. Căpitan de Geniu. Str. Elena Doamna, 78. Bucureşti 6.
365	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4. Telef. 4.74.74.
366	1939, Dec. 7	ŢINTEA M. ION. Doctor-Inginer — Profesor — Str. Leova, 42. Bucureşti 4. Telef. 5.46.79.
367	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Politehnica din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3. Telef. 2.80.64.
368	1939, Aug. 31	ŢIŢEICA RADU. Doctor în Fizică., Licenţiat în Matematici, Inginer. Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3. Telef. 2.80.64.
369	1941, Febr. 20	ŢIŢEICA ŞERBAN. Licenţiat în Matematici. — Doctor în Ştiinţe Fizico-Chimice. — Str. Vovidenie, 23. Iaşi.
370	1947, Aug. 26	TOGÂNEL GEORGE. Inginer. Str. Roth, 2. Braşov.
371	1936, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer. — Intrarea Geneva, 4. Bucureşti 3. Telef. 2.35.82.
372	1944, Feb. 9	TUDORAN MIHAIL. Inginer Inspector General. Str. Maramureş, 2. Bucureşti 2. Telef. 5.39.48.
373	1940, Aug. 28	TULLEA C. GH. Inginer. Str. Av. Th. Iliescu, 69. Bucureşti 3. Telef. 2-4361.
374	1947, Febr. 17	TUTUNARU DUMITRU. Inginer. Str. Ştefan Burcuş, 14. Bucureşti 2.
375	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Str. Dr. Lister, 65. Bucureşti 6. Telef. 4.92.08.

376	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI VICTOR. Doctor în Ştiinţele Matematice şi Mecanice. — Profesor la Universitatea din Bucureşti. — Str. Londra, 44. Bucureşti 3. Telef. 2-3399.
377	1914, Dec. 20	VARDALA ION. Inginer Inspector General. Str. Wilson, 15. Bucureşti 1. Telef. 4.32.85.
378	1946, Dec. 9	VARLAM PETRE. Inginer. Calea Dorobanţilor Nr. 137. Bucureşti 3.
379	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer Inspector General. — Str. Viitorului, 48. Bucureşti 3. Telef. 1.26.84.
380	1942, Mart. 26	VASILESCU GR. Inginer. Profesor Politehnică. Bulevardul Pache Protopopescu, 120. Bucureşti.
381	1920. Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef. — Bucureşti.
382	1940, Febr. 8	VASILESCU I. TEODOR. Inginer constructor.
383	1944, Febr. 9	VASILESCU-STABU AL. MIRCEA. Căpitan de Artilerie în rezervă. Str. Eufrosin Poteca, 23. Bucureşti.
384	1945, Mart. 26	VASILIU M. CONST. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Profesor de Matematici, la Liceul Militar „Mihai Viteazu". — Str. Gh. Asachi. 4. Timişoara.
385	1931, Apr. 10	VASILIU G. DAN. Inginer. Str. N. Bălcescu, 17. Bucureşti 3. Telef. 3.28.70.
386	1941, Febr. 20	VASILIU C. EUGENIU. Inginer. Str. Vornicul Mogoş, 6. Bucureşti 4. Telefon 3.23.55.
387	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Ing., de mine şi geodezie. Str. Vespasian, 44. Bucureşti 2.
388	1941, Febr. 20	VASILIU C. ION. Inginer Şef. Calea Griviţei, 150. Bucureşti 2.
389	1925, Aug. 26	VASILIU MIHAI. Inginer.
390	1947, Iunie 10	VASILIU MIRCEA. Inginer. Str. C. C. Arion, 13. Bucureşti 2.
391	1945, Aug. 27	VASU VASILE. Licenţiat în matematici. Profesor secundar. Str. Ilie Măgeanu Nr. 9 Sibiu.
392	1938, Febr. 17	VESCAN T. TEOFIL. Doctor în Ştiinţe fizice. Licenţiat în Matematici. Profesor Universitatea Bolyai. Piaţa Malinovschi Nr. 1. Cluj.
393	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici. — Asistent la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Eliade Rădulescu, 25. Cluj.
394	1944, Febr. 9	VIŞA EUGEN. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Piaţa I. Huniade, 2. Timişoara.
395	1947, Iunie 10	VOINEA P. RADU. Inginer. Str. Depărăţeanu Nr. 26. Bucureşti 2.
396	1933, Febr. 22	WOINAROVSKY R. Licenţiat în Matematici. — Calea Moşilor, 133. Bucureşti 3. Telef. 5.53.07.
397	1945, Dec. 3	ZAHARIA O. IOAN. Licenţiat în matematici. — Profesor Liceul Comercial Constanţa. — Str. Tudor Vladimirescu Nr. 11. Constanţa.
398	1941, Iunie 5	ZAMFIRESCU GH. ION. Maior de Artilerie în rezervă. — Inginer. Bd. Elisabeta, 97. Bucureşti 2.

399	1920, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie. — Profesor la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti. — Str. Gh. Lazăr, 4. Bucureşti (Telef. 4-9337).
400	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. General de Escadră în rezervă. — Inginer. — Str. Dr. Pasteur, 44. Bucureşti 6. Telefon 4.39.29.
401	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer. Bulevardul Elisabeta, 59. Bucureşti 2. Telefon 3.49.11.

†

MEMBRII DECEDAŢI [1]

	Data admiterii	Data morţii
1. ABASON E.	1922 Martie 1	1942 Dec. 17
2. ABRAMESCU NICOLAE	1907 Iulie 1	1947 Febr. 11
3. BRUCKNER VICTOR	1910 Iunie 21	1946 Iulie 20
4. BUNGESCU I. GL.	1930 August 31	1948 Aprilie 19
5. BUŞILĂ G. ION	1921 Mai 4	1944 Martie 10
6. FLORIAN D. ZAHARIA	1938 Februarie 17	1945 Aprilie 5
7. GERMANI DIONISIE	1939 Decembrie 7	1948 August 31
8. GHEORGHIU A. MIRCEA	1913 August 30	1944 Decembrie 21
9. IOACHIMESCU GH. ANDREI	1895 Septemvrie 15	1943 Martie 13
10. IONESCU C. ION	1947 Iunie 10	1948 Aprilie 27
11. IONESCU ION	1895 Septemvrie 15	1946 Sept. 17
12. LINTEŞ ION, C-DOR	1919 Septemvrie 12	1946 Iulie 21
13. MIHALOPOL C.	1921 Februarie 5	1948 Ianuarie 11
14. NICHIFOR A. GH	1910 Mai 21	1946 Aprilie 3
15. ORĂŞANU D. C.	1913 Octomvrie 7	1948 Iunie 11
16. SERGESCU BARBU	1928 August 29.	1944 Iulie 29
17. STOICESCU T. T.	1936 August 25	1945 Mai 1
18. ŞTAMATESCU I.	1923 Iulie 4	1947 Octomvrie 5
19. TEODORESCU V. N.	1911 Mai 18	1943 Ianuarie 23
20. ZAMFIRESCU C. GRIGORE	1924 Ianuarie 30	1943 Iunie 8

1) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la *„Gazeta Matematică“* până la sfârşitul vieţii lor.

DOUĂ TEOREME DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Se cunoaşte problema [1]:

„*On donne un point dans le plan du triangle* ABC *et soit* DEF *son triangle pédal. Les parallèles menées par D aux côtés* AB, AC *coupent* AC, AB *respectivement en* B_1, C_1. *La droite* B_1C_1 *coupe* BC *en* M *et soient* N *et* P *les points analogues. Ces trois points sont sur une même droite. Trouver la nature de cette droite. Cas particuliers*".

Ocupându-mă cu această problemă, am găsit prin transformări şi generalizări repetate, următoarea generalizare:

Teorema I. *Fie* ABC *şi* A'B'C' *două triunghiuri şi fie* D, E *şi* F *trei puncte situate pe laturile* BC, CA *şi* AB. *Fie* C_1 *şi* B_1 *intersecţiile laturei* C'B' *cu laturile* AB *şi* AC, *iar* C_2 *intersecţia dreptei* DC_1 *cu* AC *şi* B_2 *intersecţia dreptei* DB_1 *cu* AB. *Fie* M *intersecţia dreptei* B_2C_2 *cu* BC. *Plecând dela celelalte două vârfuri* B *şi* C *se obţin, prin construcţii analoage, punctele* N *şi* P. *Fie* D', E' *şi* F' *intersecţiile dreptelor* B'C' *cu* BC, C'A' *cu* CA *şi* A'B' *cu* AB. *Să se arate, că atât în cazul, când punctele* D, E *şi* F *sunt colineare, cât şi în cazul când ele sunt picioarele a trei ceviene concurente,*

1° *punctele* M, N *şi* P *sunt colineare, dacă şi punctele* D', E *şi* F' *sunt colineare.*

2° *punctele* M, N *şi* P *sunt picioarele a trei ceviene dacă şi punctele* D', E' *şi* F' *sunt picioarele a trei ceviene.*

Demonstrarea acestei teoreme se face imediat, observând, că triunghiul ABC este tăiat de transversalele C_1D, B_1D, B_2C_2 şi B_1D':

$$\frac{BD}{DC}\,\frac{CC_2}{C_2A}\,\frac{AC_1}{C_1B}=-1\,;\qquad \frac{BD}{DC}\,\frac{CB_1}{B_1A}\,\frac{AB_2}{B_2B}=-1\,;$$

$$\frac{BM}{MC}\,\frac{CC_2}{C_2A}\,\frac{AB_2}{B_2B}=-1\,;\qquad \frac{BD'}{D'C}\,\frac{CB_1}{B_1A}\,\frac{AC_1}{C_1B}=-1\,;$$

1) *Coordonnées barycentriques* par CÉSAR COŞNIŢA, pag. 36.

egalând produsul ultimelor două relaţii cu produsul primelor două, avem:

$$\frac{BM}{MC}\,\frac{BD'}{D'C}=\left(\frac{BD}{DC}\right)^2 \quad \therefore \quad \frac{BM}{MC}=\frac{CD'}{D'B}\left(\frac{BD}{DC}\right)^2 \qquad (1)$$

prin analogie:

$$\frac{CN}{NA}=\frac{AE'}{E'C}\left(\frac{CE}{EA}\right)^2 \quad \text{şi} \quad \frac{AP}{PB}=\frac{BF'}{F'A}\left(\frac{AF}{FB}\right)^2$$

înmulţind avem:

$$\frac{BM}{MC}\,\frac{CN}{NA}\,\frac{AP}{PB}=\frac{CD'}{D'B}\,\frac{AE'}{E'C}\,\frac{BF'}{F'A}\left(\frac{BD}{DC}\,\frac{CE}{EA}\,\frac{AF}{FB}\right)^2 \qquad (2)$$

deci dacă:

$$\frac{BD}{DC}\,\frac{CE}{EA}\,\frac{AF}{FB}=\pm 1$$

atunci

$$\frac{BM}{MC}\,\frac{CN}{NA}\,\frac{AP}{PB}=\frac{CD'}{D'B}\,\frac{AE'}{E'C}\,\frac{BF'}{F'A}$$

deci dacă punctele D', E' şi F' sunt colineare şi punctele M, N şi P sunt colineare, dacă ele sunt picioarele a trei ceviene şi M, N şi P sunt picioarele a trei ceviene.

Particularizând poziţia triunghiului A'B'C', problema de mai sus, se deduce din teorema I.

Este remarcabilă şi forma polară a teoremei I, care se enunţă în felul următor:

Teorema II. *Fie* ABC *şi* A'B'C' *două triunghiuri şi fie* D, E *şi* F *trei puncte situate pe laturile* BC, CA *şi* AB. *Fie* C_1 *şi* B_1 *respectiv, punctele de intersecţie ale dreptei* AD *cu dreptele* CA' *şi* BA' *şi fie* M *punctul de intersecţie al dreptelor* BC_1 *şi* CB_1. *Plecând din celelalte două vârfuri se obţin prin construcţii analoage punctele* N *şi* P. *Fie* D', E' *şi* F' *intersecţiile dreptelor* AA' *cu* BC, BB' *cu* AC *şi* CC' *cu* AB. *Atât în cazul, când punctele* D, E *şi* F *sunt colineare, cât şi în cazul, când ele sunt picioarele a trei ceviene,*

1° *dreptele* AM, BN *şi* CP *taie laturile triunghiului* ABC *în trei puncte colineare dacă şi punctele* D', E' *şi* F' *sunt colineare,*

2° *dreptele* AM, BN *şi* CP *sunt concurente, dacă şi dreptele* AD', BE' *şi* CF' *sunt concurente.*

Intr'adevăr, dacă notăm cu M', N' şi P', intersecţiile dreptelor AM, BN şi CP cu laturile BC, CA şi AB, atunci prin aplicarea de patru ori a teoremei lui CEVA, obţinem relaţia:

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{CD'}{D'B} \cdot \left(\frac{BD}{DC}\right)^2 \qquad (3)$$

şi prin analogie, alte două relaţii. Inmulţind aceste trei relaţii, obţinem:

$$\frac{BM'}{M'C}\,\frac{CN'}{N'B}\,\frac{AP'}{P'B} = \frac{CD'}{D'B}\,\frac{AE'}{E'C}\,\frac{BF'}{F'A}\left(\frac{BD}{DC}\,\frac{CE}{EA}\,\frac{AF}{FB}\right)^2 \qquad (4)$$

Din care reiese imediat afirmaţia.

Observaţii. 1. Relaţiile (1) şi (3) şi analoagele lor conţin numai patratele expresiunilor $\frac{BD}{DC}$, $\frac{CE}{EA}$ şi $\frac{AF}{FB}$. Deci poziţiile punctelor M, N şi P sau ale punctelor M', N' şi P' nu se schimbă, dacă punctele, D, E şi F sau o parte din ele, se înlocuesc cu conjugatele lor armonice. Plecând dela trei puncte anumite D, E şi F se obţin în total opt cazuri, după cum am înlocuit unul, două sau trei dintre aceste puncte cu conjugatele lor armonice. In patru dintre aceste cazuri punctele D, E şi F vor deveni colineare, iar în celelalte patru cazuri, ele vor deveni picioarele a trei ceviene concurente, dar în toate aceste opt poziţii ale punctelor D, E şi F, poziţiile punctelor M, N şi P sau ale punctelor M' N' şi P' nu s'au schimbat.

2. Dacă înlocuim două din punctele D', E' şi F' cu conjugatele lor armonice, atunci două puncte corespunzătoare din punctele M, N şi P sau M' N' şi P' se schimbă în conjugatele lor armonice, totuşi ele rămân colineare, dacă au fost colineare, dar situate pe alte trei drepte. Dacă au fost picioarele a trei ceviene, ele rămân concurente, însă în alte trei puncte. Iar dacă schimbăm numai unul, sau toate trei din punctele D', E' şi F' în conjugatele lor armonice, atunci unul sau toate trei din punctele M, N şi P sau M', N' şi P' se schimbă în conjugatele lor armonice, deci ele vor deveni picioarele a trei ceviene, dacă au fost colineare, şi invers vor deveni colineare, dacă au fost picioarele a trei ceviene.

3. Dacă triunghiul A'B'C' se deplasează, astfel încât poziţiile punctelor D', E' şi F' rămân aceleaşi, punctele M, N şi P sau

punctele M' N' şi P' rămân neschimbate, dacă nici poziţiile punctelor D, E şi F nu s'au scimbat.

Cazuri particulare. 1. Relaţiile (1) şi (3) pot fi particularizate, dând sau punctelor D' E' şi F' sau punctelor D, E şi F poziţii particulare, independente sau dependente unele de altele. Menţionăm următoarele:

a) *Dacă* D', E' *şi* F' *sunt mijloacele laturilor, atunci dreptele* AM, BN *şi* CP *se întâlnesc în potenţialul de ordinul al doilea al punctului de întâlnire al dreptelor* AD, BE *şi* CF *sau în polul trilinear al dreptei* DEF.

b_1) *şi* b_2) *Dacă* D, E *şi* F *sunt sau mijloacele laturilor, sau sunt aruncate la infinit, atunci punctele* M *şi* D' *şi analoagele lor sunt izotomice.*

c) *Dacă punctele* D *şi* D' *sunt conjugate armonic în raport cu punctele* B *şi* C, *atunci* M *şi* M' *se confundă cu D'.*

d) *Dacă punctele* D *şi* D' *sunt izotomice, atunci dreptele* AM, BN *şi* CP *se întâlnesc, în cazul când ele sunt concurente, în potenţialul de ordinul al treilea al punctului de întâlnire al dreptelor* AD, BE *şi* CF.

2. Poziţiile particulare mai remarcabile pe care le poate ocupa triunghiul A'B'C' sunt următoarele:

a) Triunghiul A'B'C' este redus la un punct, situat la distanţa finită.

b) Triunghiul A'B'C' este redus la un segment de dreaptă, situat la distanţă finită.

c) Vârfurile A'B'C' sunt aruncate la infinit pe trei drepte concurente într'un punct finit. In acest caz triunghiul A'B'C' se reduce la dreapta dela infinit, având însă vârfurile pe trei direcţii diferite.

d) Vârfurile A'B'C' sunt aruncate la infinit pe trei drepte paralele la o direcţie dată. In acest caz, triunghiul se reduce la un punct situat la infinit.

e) Laturile triunghiului A'B'C' sunt respectiv paralele cu laturile triunghiului ABC. In acest caz punctele D', E' şi F' se găsesc pe dreapta dela infinit.

E clar că teoremele I şi II ne dau prin combinarea acestor particularizări şi prin luarea în considerare a punctelor şi dreptelor remarcabile asociate triunghiului multe probleme, dintre care fac parte următoarele zece.

Problema I. *Fie* D, E *şi* F *trei puncte situate pe laturile unui triunghiu* ABC, *fie colineare, fie picioarele a trei ceviene. Paralela dusă din punctul* D *la* AB *taie latura* AC *în* D_1, *iar paralela dusă din* D_1 *la* BC *taie latura* AB *în* D_2. *Dreapta* DD_2 *taie* AC *în* D_3, *iar paralela dusă din* D_3 *la* AB *taie pe* BC *în* D_4. *Plecând din punctele* E *şi* F *şi parcurgând triunghiul în acelaş sens, se obţin prin construcţiuni analoage punctele* E_4 *şi* F_4. *Punctele* D_4, E_4 *şi* F_4 *sunt colineare.*

Soluţie. Suntem în cazul 1° al teoremei I şi am particularizat construcţiile luând în considerare cazul *e)* din 2. Într'adevăr, dreptele DD_2 şi analoagele ei sunt laturile triunghiului A'B'C'. C_1 este notat cu D_2 şi B_1 cu D_1. DB_1 şi AB, sunt în acest caz particular, paralele, deci B_2 se găseşte la infinit pe direcţia dreptei AB. DC_1 se întâlneşte cu AC în C_2, care este notat în acest caz cu D_3. Paralela dusă din D_3 la AB este dreapta B_2C_2, fiindcă punctul B_2 este la infinit pe direcţia dreptei AB. M este notat cu D_4.

Problema II. *O paralelă oarecare dusă la latura* BC *a unui triunghiu* ABC *taie laturile* AB *şi* AC *în punctele* C_1 *şi* B_1, *Dreapta* C_1D *taie pe* AC *în* C_2, *iar* B_1D *taie pe* AB *în* B_2. *Notăm cu* M *intersecţia dreptei* B_2C_2 *cu* BC. *Plecând din punctele* E *şi* F, *situate pe celelalte două laturi, se obţin prin construcţii analoage punctele* N *şi* P. *Punctele* M, N *şi* P *se găsesc pe polara trilineară a potenţialului de ordinul al doilea al punctului de intersecţie al dreptelor* AD, BE *şi* CF.

Soluţie. Suntem în cazul 1° al teoremei I şi am particularizat construcţiile, considerând cazul *e)* din 2. Într'adevăr în acest caz, dreapta B_1C_1 şi analoagele ei au devenit laturile triunghiului A'B'C' deci punctele D', E' şi F' sunt aruncate la infinit. Avem deci

$$\frac{BM}{MC} = -\left(\frac{BD}{DC}\right)^2$$

Caz particular. *Dacă dreptele* AD, BE, CF *se întâlnesc în centrul cercului înscris, atunci punctele* M, N *şi* P *se găsesc pe dreapta lui* LEMOINE.

Problema III. *Se dă un punct* Q *pe cercul circumscris al triunghiului* ABC. *Fie* B_1 *şi* C_1 *intersecţiile perpendicularei ridicate în* Q *pe latura* BC *cu laturile* AC *şi* AB, *iar* B_2 *şi* C_2 *intersecţiile paralelelor duse din punctele* B_1 *şi* C_1 *la latura* BC

cu laturile AB *şi* AC. *Fie* M *intersecţia dreptei* B_2C_2 *cu* BC. *Ducând din acelaş punct* Q, *perpendiculare pe laturile* AC *şi* AB *se obţin prin construcţii analoage punctele* N *şi* P. *Punctele* M, N *şi* P *se găsesc pe izotomica dreptei lui* SIMSON a *punctului* Q.

Soluţie. Suntem în cazul 1° al teoremei I şi am particularizat construcţiile prin combinarea cazului b_2), din 1 cu cazul *a)* din 2. Intr'adevăr, triunghiul A'B'C' se reduce la punctul Q, iar laturile triunghiului la dreapta B_1C_1 şi analoagele ei. Punctele D', E' şi F' sunt situate pe dreapta lui SIMSON al punctului Q. Dreptele B_1D şi C_1D sunt respectiv paralelele duse din punctele B_1 şi C_1 cu latura BC, deoarece punctele D, E şi F se găsesc la intersecţiile laturilor triunghiului cu dreapta dela infinit.

Problema IV. *Fie* A_1, B_1 *şi* C_1 *mijloacele laturilor* BC, CA *şi* AB *ale unui triunghiu* ABC *şi fie* Q *un punct oarecare pe mediana* AA_1. *Fie* B_2 *şi* C_2 *intersecţiile dreptelor* BQ *cu* AC *şi* CQ *cu* BA, *iar* B_3 *intersecţia dreptei* A_1B_2 *cu* AB *şi* C_3 *intersecţia dreptei* A_1C_2 *cu* AC. *Fie* B_4 *şi* C_4 *intersecţiile dreptei* BC *cu* C_1B_2 *şi* C_2B_1. *Fie* M *şi* N *respectiv intersecţiile dreptelor* B_3B_4 *cu* AC *şi* C_3C_4 *cu* AB. *Dreapta* MN *este paralelă la* BC.

Soluţie. Suntem în cazul 1° al teoremei I şi am particularizat construcţiile, aruncând punctul M la infinit. Intr'adevăr în acest caz, triunghiul A'B'C' este triunghiul $A_1B_1C_1$ şi punctul D se confundă cu A_1. B_1D şi C_1D sunt deci respectiv, paralele la laturile AB şi AC, deci punctele B_2 şi C_2 se găsesc la infinit pe direcţiile laturilor AB şi AC. Două puncte dela infinit, însă se găsesc pe dreapta dela infinit, deci punctul M se obţine, intersectând latura BC cu dreapta dela infinit. Deducem că şi M se află la infinit pe direcţia dreptei BC. Punctele E şi F sunt respectiv notate cu B_2 şi C_2, iar N şi P cu M şi N. Dar punctele M, N şi P sunt colineare, unul dintre ele însă, aflându-se pe dreapta dela infinit pe direcţia dreptei BC, deducem, ca dreapta, care trece prin celelalte două, adică în cazul nostru, dreapta MN este paralelă cu BC.

Problema V. *Fie* A', B', C' *şi* D,E,F *trei câte trei puncte colineare, situate pe laturile* BC, CA *şi* AB *ale unui triunghiu dat* ABC. *Fie* C_1 *intersecţia dreptei* DC' *cu* AC *şi* B_1 *intersecţia dreptei* DB' *cu* AB, *iar* M *intersecţia dreptei* C_1B_1 cu BC. *Punctul* M *şi analoagele lui sunt colineare.*

Soluție. Suntem în cazul 1° al teoremei I și am particularizat construcțiile având în vedere cazul b_1) din 2. Intr'adevăr în acest caz triunghiul A'B'C' se reduce la segmentul de dreaptă A'B'C' și punctele A' B' și C' coincid respectiv cu punctele D', E' și F'.

Problema VI. *Fie* D, E *și* F *trei puncte luate pe laturile unui triunghiu, fie colineare, fie picioarele a trei ceviene. Fie* C_1 *și* B_1 *intersecțiile dreptei* AD *cu paralelele duse din vârfurile* C *și* B *la mediana corespunzătoare vârfului* A *și* M *intersecția dreptelor* BC_1 *și* CB_1. *Dreptele* AM *și analoagele lor* BN *și* CP *sunt concurente în punctul* R. *Punctul* R *este potențialul de ordinul al doilea al punctului* Q *unde* Q *este sau polul trilinear al dreptei* DEF *sau punctul de întâlnire al cevienelor* AD, BE *și* CF.

Soluție. Suntem în cazul 2° al teoremei II și am particularizat construcțiile prin combinarea cazului *a)* din 1 cu cazul *c)* din 2. Intr'adevăr vârfurile A', B' și C' se găsesc pe medianele triunghiului ABC, însă aruncate la infinit. Deci dreptele BA' și CA' devin drepte paralele cu mediana corespunzătoare vârfului A. Intersectându-le cu AD se obțin punctele B_1 și C_1.

Caz particular. Dacă D, E și F sunt picioarele bisectoarelor, punctul R devine punctul lui LEMOINE.

Problema VII. *Fie* P_1 *și* P_2 *două puncte în planul unui triunghiu și fie* B_1 *și* C_1 *intersecțiile cevienei* AP_2 *cu cevienele* BP_1 *și* CP_1. *Dreptele* CB_1 *și* BC_1 *se întâlnesc în M. Dreapta* AM *și dreptele* BN *și* CP *obținute respectiv prin construcții analoage, sunt concurente.*

Soluție. Suntem în cazul 2° al teoremei II și am particularizat construcțiile luând în considerare cazul *a)* din 2. Intr'adevăr în acest caz triunghiul A'B'C' se reduce la punctul P_1, iar punctele D, E și F sunt picioarele cevienelor punctului P_2. Dreptele BA' și CA' au devenit deci dreptele BP_1 și CP_1, pe care le intersectăm cu dreapta AD, care în cazul acesta este chiar dreapta AP_2, în punctele C_1 și B_1.

Caz particular. Dacă P_1 este centrul de greutate, atunci D', E' și F' sunt mijloacele laturilor. Suntem, deci în cazul *a)* din 1, deci punctul M este potențialul de ordinul al doilea al punctului P_2. Dacă P_2 este centrul cercului înscris. Punctul M devine punctul lui LEMOINE.

Problema VIII. *Fie* P *un punct oarecare şi fie* B_1 *şi* C_1 *intersecţiile cevienelor* BP *şi* CP *cu latura triunghiului anticomplimentar, ce trece prin* A. *Dreapta, care uneşte punctul* A, *cu punctul* M *de intersecţie al dreptelor* C_1B *şi* CB_1, *şi analoagele ei, care se obţin plecând din celelalte două vârfuri, sunt concurente în izotomicul* Q *al punctului* P.

Soluţie. Suntem in cazul 2° al teoremei II şi am particularizat construcţiile prin combinarea cazului b_2) din 1 cu cazul *a)* din 2. Intr'adevăr în acest caz, punctele D, E şi F se găsesc la infinit şi triunghiul A'B'C' este redus la punctul P. Dreapta AD devine paralela dusă din A la BC, iar dreptele BA' şi CA' devin dreptele BP şi CP, care întâlnesc respectiv pe AD în C_1 şi B_1.

Caz particular. Dacă P este punctul lui GERGONNE, Q este punctul lui NAGEL şi invers, dacă P este punctul lui NAGEL, Q este punctul lui GERGONNE.

Problema IX. *Paralelele duse prin vârfurile* B *şi* C *la o direcţie dată* Δ, *formează cu latura* BC *şi cu latura triunghiului anticomplementar, ce trece prin* A, *un paralelogram cu centrul în* M. *Se mai construesc alte două paralelograme analoage cu centrele în* N *şi* P *ducând prin vârfuri, drepte paralele la aceeaşi direcţie* Δ. *Dreptele* AM, BN *şi* CP *sunt concurente.*

Soluţie. Suntem în cazul 2° al teoremei II şi am particularizat construcţiile prin combinarea cazului b_2) din 1 cu cazul *d)* din 2. Intr'adevăr, vârfurile triunghiului A'B'C' sunt în acest caz, situate pe trei drepte paralele, însă ele, sunt aruncate la infinit. In acest caz punctele D', E' şi F' sunt picioarele a trei ceviene concurente la infinit. D, E şi F fiind şi ele la infinit, deducem, că dreapta AD este paralela dusă din A la BC, iar dreptele, care unesc vârfurile B şi C cu punctul A', sunt paralelele duse din B şi C la direcţie dată Δ.

Problema X. *Fie* D', E' *şi* F' *picioarele înălţimilor, unui triunghiu* ABC, A' *un punct oarecare pe înălţimea corespunzătoare vârfului* A *şi* D *intersecţia dreptei* E'F' *cu* BC. *Fie* B_1 *şi* C_1 *intersecţiile dreptelor* A'B *şi* A'C *cu* AD. *Dreptele* CB_1 *şi* BC_1 *se întâlnesc pe înălţimea* AA'.

Soluţie. Suntem în cazul teoremei II şi am particularizat construcţiile, având în vedere cazul *c)* din 1.

Intr'adevăr în acest caz punctele D şi D' sunt prin construcţie conjugate armonic în raport cu punctele B şi C, deci dreapta, care uneşte vârful A cu punctul de întâlnire al dreptelor CB_1 şi BC_1, trece prin punctul D'.

E clar, că din teoremele I şi II mai putem deduce, în afară de aceste probleme, dintre care unele pot fi privite şi sub un aspect mai general, sau mai particular, şi alte probleme printr'o altă combinare a cazurilor particulare şi a proprietăţilor triunghiului.

Ceea ce este remarcabil, este în punerea în evidenţă a faptului, că aceste probleme, dintre care unele sunt diferite in aparenţă şi nu par a fi înrudite între ele, totuşi fac parte din aceeaşi familie de probleme, a căror sferă este determinată de teoremele I şi II.

MARIA NEUMANN.

ASUPRA TRANSFORMĂRII PRIN CENTRE RADICALE

1. Să considerăm trei cercuri C_1, C_2, C_3 reale sau imaginare, având centrele în vârfurile triunghiului ABC şi razele r_1, r_2, r_3; aceste cercuri sunt *cercurile de bază*. Fiind dat un punct oarecare M de coordonate baricentrice l, m, n să determinăm două terne de cercuri $(\gamma_1, \gamma_1', \gamma_1'')$, $(\gamma_1'', \gamma_2'', \gamma_3'')$ având centrele respectiv în A, B, C, prin condiţiunea ca fiecare din perechile de cercuri:

$$(\gamma_1', C_2) \quad , \quad (\gamma_2', C_3) \quad , \quad (\gamma_3', C_1)$$

$$(\gamma_1'', C_3) \quad , \quad (\gamma_2'', C_1) \quad , \quad (\gamma_3'', C_2)$$

să aibă un ax radical trecând prin M. Fie $(\rho_1', \rho_2', \rho_3')$, $(\rho_1'', \rho_2'', \rho_3'')$ razele cercurilor $(\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3')$ şi $(\gamma_1'', \gamma_2'', \gamma_3'')$. In fine să considerăm o nouă ternă de cercuri $(\Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma_3')$ având centrele respectiv în A, B, C şi ale căror raze ρ_1, ρ_2, ρ_3 sunt determinate de relaţiile:

$$\rho_i^2 = \varepsilon\rho_i'^2 + \varphi\rho_i''^2 + \varpi \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (1)$$

Cercurile Γ_i sunt *cercurile coordonate* ale punctului M, iar centrul radical M_1 al cercurilor Γ_i este *transformatul* lui M.

Transformarea pe care vrem s'o studiem este $(M \to M_1)$. Am studiat amănunţit împreună cu toate elementele geometrice aferente [1], două cazuri particulare ale acestei transformări, pe care le-am numit *transformarea simetrică* ($\varepsilon = \varphi$) şi *transformarea pseudo-simetrică* ($\varepsilon = -\varphi$, $\varpi = 0$). Imi propun acum să reiau cazul general şi să fac o clasificare a transformărilor cuprinse în formula (1) pe $\varpi = 0$ căci aceasta nu schimbă axele radicale şi nici centrul radical al cercurilor Γ_i. Ecuaţiile cercurilor γ_1 şi C_2 în coordonate baricentrice fiind:

$$E = -\rho_1'^2\,\alpha + (c^2 - \rho_1'^2)\,\beta + (b^2 - \rho_1'^2)\,\gamma$$

$$E = (c^2 - r_2^2)\,\alpha - r_2^2\,\beta + (a^2 - r_2^2)\,\gamma$$

$$[E = (a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta) : (\alpha + \beta + \gamma)]$$

axul lor radical este:

$$(\rho_1'^2 - r_2^2 + c^2)\,\alpha + (\rho_1'^2 - r_2^2 - c^2)\,\beta + (\rho_1'^2 - r_2^2 + a^2 - b^2)\,\gamma = 0$$

şi scriind că trece prin M (l, m, n) determinăm pe ρ_1. Găsim:

$$\rho_1'^2 = \frac{(r_2^2 - c^2)\,l + (r_2^2 + c^2)\,m + (r_2^2 - a^2 + b^2)\,n}{l + m + n}$$

şi alte două formule analoage care se deduc prin permutări circulare asupra literilor a, b, c şi l, m, n şi asupra numerilor 1, 2, 3. In mod analog găsim:

$$\rho_1''^2 = \frac{(r_3^2 - b^2)\,l + (r_3^2 - a^2 + c^2)\,m + (r_3^2 + b^2)\,n}{l + m + n}.$$

Inlocuind aceste valori în (1) găsim:

$$\rho_1^2 = \frac{(-c^2\varepsilon - b^2\varphi)l + [c^2\varepsilon + (-a^2 + c^2)\varphi]\,m + [(b^2 - a^2)\varepsilon + b^2\varphi]n + (r_2^2\varepsilon + r_3^2\varphi)\,(l + m + n)}{l + m + n}$$

$$\rho_2^2 = \frac{[(c^2 - b^2)\varepsilon + c^2\varphi]\,l + (-a^2\varepsilon - c^2\varphi)m + [a^2\varepsilon + (a^2 - b^2)\varphi]\,n + (r_3^2\varepsilon + r_1^2\varphi)\,(l + m + n)}{l + m + n}$$

$$\rho_3^2 = \frac{[b^2\varepsilon + (b^2 - c^2)\varphi]\,l + [(a^2 - c^2)\varepsilon + a^2\varphi]\,m + (-b^2\varepsilon - a^2\varphi)\,n + (r_1^2\varepsilon + r_2^2\varphi)\,(l + m + n)}{l + m + n}$$

---

1) *Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara.* Tome 13. Fasc. 1. 1948.

Centrul radical al cercurilor Γ_i are coordonatele [1]:

$$l_1 = -2a^2\rho_1^2 + (a^2+b^2-c^2)\rho_2^2 + (a^2-b^2+c^2)\rho_3^2 + a^2(-a^2+b^2+c^2)$$

și alte două formule analoage care se deduc din precedenta prin permutări circulare. Inlocuind pe ρ_i^2 cu valorile de mai sus, obținem formulele care definesc transformarea prin centre radicale:

$$\begin{aligned} l_1 &= a_{11}\,l + a_{12}\,m + a_{13}\,n + k_1(l+m+n) \\ m_1 &= a_{21}\,l + a_{22}\,m + a_{23}\,n + k_2(l+m+n) \\ n_1 &= a_{31}\,l + a_{32}\,m + a_{33}\,n + k_3(l+m+n) \end{aligned} \qquad (2)$$

având:

$$a_{11} = a^2(-a^2+b^2+c^2) + (-2b^4-c^4+3b^2c^2+3a^2c^2)\varepsilon + (-b^4-2c^4+3b^2c^2+3a^2b^2)\varphi$$

$$a_{12} = a^2(-a^2+b^2+c^2) + (-c^4+b^2c^2-a^2c^2-2a^2b^2)\varepsilon + (3a^4+c^4-b^2c^2-2a^2c^2-a^2b^2)\varphi$$

$$a_{13} = a^2(-a^2+b^2+c^2) + (3a^4+b^4-b^2c^2-a^2c^2-2a^2b^2)\varepsilon + (-b^4+b^2c^2-2a^2c^2-a^2b^2)\varphi$$

$$a_{21} = b^2(a^2-b^2+c^2) + (3b^4+c^4-2b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2)\varepsilon + (-c^4-b^2c^2+a^2c^2-2a^2b^2)\varphi$$

$$a_{22} = b^2(a^2-b^2+c^2) + (-a^4-2c^4+3a^2c^2+3a^2b^2)\varepsilon + (-2a^4-c^4+3b^2c^2+3a^2c^2)\varphi$$

$$a_{23} = b^2(a^2-b^2+c^2) + (-a^4-2b^2c^2+a^2c^2-a^2b^2)\varepsilon + (a^4+3b^4-b^2c^2-a^2c^2-2a^2b^2)\varphi$$

$$a_{31} = c^2(a^2+b^2-c^2) + (-b^4-b^2c^2-2a^2c^2+a^2b^2)\varepsilon + (b^4+3c^4-2b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2)\varphi$$

$$a_{32} = c^2(a^2+b^2-c^2) + (a^4+3c^4-b^2c^2-2a^2c^2-a^2b^2)\varepsilon + (-a^4-2b^2c^2-a^2c^2+a^2b^2)\varphi$$

$$a_{33} = c^2(a^2+b^2-c^2) + (-2a^4-b^4+3b^2c^2+3a^2b^2)\varepsilon + (-a^4-2b^4+3a^2c^2+3a^2b^2)\varphi$$

$$\begin{aligned} k_1 = r_1^2[(a^2-b^2+c^2)\varepsilon + (a^2+b^2-c^2)\varphi] + r_2^2[-2a^2\varepsilon + (a^2-b^2+c^2)\varphi] + \\ + r_3^2[(a^2+b^2-c^2)\varepsilon - 2a^2\varphi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 = r_1^2[(-a^2+b^2+c^2)\varepsilon - 2b^2\varphi] + r_2^2[(a^2+b^2-c^2)\varepsilon + (-a^2-b^2+c^2)\varphi] + \\ + r_3^2[-2b^2\varepsilon + (a^2+b^2-c^2)\varphi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 = r_1^2[(-2c^2\varepsilon + (-a^2+b^2+c^2)\varphi] + r_2^2[(a^2-b^2+c^2)\varepsilon - 2c^2\varphi] + \\ + r_3^2[(-a^2+b^2+c^2)\varepsilon + (a^2-b^2+c^2)\varphi] \end{aligned}$$

între acești coeficienți avem relațiile:

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{21}+a_{31} = a_{12}+a_{22}+a_{32} = a_{13}+a_{23}+a_{33} = 16\,S^2 \\ k_1+k_2+k_3 = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

S fiind suprafața triunghiului ABC. Determinantul omografiei (2) este:

$$\Delta = 2^{12}.3.S^6(\varepsilon^2+\varepsilon\varphi+\varphi^2) \qquad (4)$$

---

1) C. Cosnitza. *Les coordonnées barycentriques.* p. 69.

Deoarece avem relația:

$$l_1 + m_1 + n_1 = 16\,S^2\,(l + m + n)$$

urmează că un punct dela infinit ($l + m + n = 0$) se transformă tot într'un punct dela infinit, deci transformarea considerată este o *afinitate*. Punctul dela infinit al laturii AB este ($l=0$, $m=1$, $n=-1$). Inlocuind aceste valori în (1) găsim că dacă $\varepsilon = \varphi$, acest punct se transformă în el însuși și același lucru putem afirma și despre CA și AB. Dreapta dela înfinit este în acest caz o dreaptă de puncte duble și transformarea devine *omotetie*. Deci *condiția necesară și suficientă ca transformarea să fie o omotetie, este ca* $\varepsilon = \varphi$. Am determinat în articolul menționat [1] centrul și raportul de omotetie și am arătat că pentru $\varepsilon = \varphi = \frac{1}{3}$ omotetia se reduce la *transformarea identică*.

Pentru a studia punctele duble înlocuim în (2) pe l, m, n respectiv cu σl, σm, σn și obținem un sistem omogen al cărui determinant egalat cu zero ne dă o ecuație de gradul 3 în σ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k_1 - \sigma & a_{12} + k_1 & a_{13} + k_1 \\ a_{21} + k_2 & a_{22} + k_2 - \sigma & a_{23} + k_2 \\ a_{31} + k_3 & a_{32} + k_3 & a_{33} + k_3 - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Adunând toate linille la prima și ținând seama de (3) găsim rădăcina $\sigma = 16\,S^2$ și alte două rădăcini:

$$\sigma = 8\,S^2\,[3\,(\varepsilon + \varphi) \pm i\sqrt{3}\,(\varepsilon - \varphi)].$$

Deoarece ecuația în σ nu are rădăcini duble, deducem [2] că nu avem o dreaptă de puncte duble și deci *afară de cazul omotetiei* ($\varepsilon = \varphi$) *transformarea nu se reduce niciodată la o omologie.*

Pentru a studia similitudinile, să considerăm un sistem cartezian, axa Ox fiind BC, iar Oy perpendiculara din O pe BC. Trecem dela coordonatele carteziane omogene la coordonatele baricentrice, cu formulele [3]:

$$\bar{x} = -c\cos B\,\bar{\beta} + b\cos C\,\bar{\gamma} \quad ; \quad \bar{y} = h\bar{\alpha} \quad ; \quad \bar{z} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}$$

---

1) *Bull. Sc. de l'Ecole Polyt. de Timișoara*, loc. cit.
2) L. BIANCHI. *Lezioni di Geom. Analitica.* 1915, p. 279—280.
3) C. COSNIȚĂ, loc. cit. pag. 45.

unde $h = OA$, iar $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ şi $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ sunt coordonatele carteziane şi baricentrice ale punctului M_1, transformatul lui $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Trecem dela coordonatele $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ cu formulele (2) şi apoi la coordonatele x, y, z ale lui M cu formulele [1]:

$$\bar{\alpha} = ay \quad ; \quad \bar{\beta} = -hx - b\cos C y + hb\cos C z;$$
$$\bar{\gamma} = hx - c\cos B y + hc\cos B z.$$

Efectuând calculele găsim că relaţiunea dintre coordonatele punctelor $M(x, y, z)$ şi $M_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ este următoarea:

$$\bar{x} = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z \; ; \; \bar{y} = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} z \; ; \; \bar{z} = \alpha_{33} z \quad (5)$$

unde avem:

$$\alpha_{11} = hc\cos B(a'_{22} - a'_{23}) + hb\cos C(a'_{33} - a'_{32})$$
$$\alpha_{12} = b\cos C(c\cos B a'_{22} - b\cos C a'_{32}) + c\cos B(c\cos B a'_{23} - b\cos C a'_{33}) +$$
$$+ a(b\cos C a'_{31} - c\cos B a'_{21})$$
$$\alpha_{13} = hc\cos B(b\cos C a'_{33} - c\cos B a'_{23}) + hb\cos C(b\cos C a'_{32} - c\cos B a'_{22})$$
$$\alpha_{21} = h^2(a'_{13} - a'_{12}) \quad ; \quad \alpha_{22} = a a'_{11} - (b\cos C a'_{12} + c\cos B a'_{13})$$
$$\alpha_{23} = h^2(c\cos B a'_{13} + b\cos C a'_{12}) \quad ; \quad \alpha_{33} = 32\,S^3$$

am notat $a'_{ij} = a_{ij} + k_i$, iar a_{ij} au valorile (2). Pentru ca transformarea să fie o similitudine, trebue să admită punctele ciclice ca puncte duble şi deci să avem [2]: $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ şi $\alpha_{12} = -\alpha_{21}$. Prima condiţie $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ ne dă după ce am efectuat toate calculele:

$$32\,S^2(b^2 - c^2)(\varepsilon - \varphi) = 0$$

în afară de cazul omotetiei ($\varepsilon = \varphi$), condiţiunile cerute n'ar putea fi eventual verificate, decât în cazul triunghiului echilateral.

Să examinăm atunci cazul triunghiului echilateral; presupunând că ABC este echilateral, formulele (5) devin, în coordonate neomogene:

$$\bar{x} = \frac{3}{2}(\varepsilon + \varphi)x - \frac{\sqrt{3}}{2}(\varepsilon - \varphi)y + \frac{a}{4}(\varepsilon - \varphi) + \frac{1}{6a^3}(k_3 - k_2)$$

$$\bar{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\varepsilon - \varphi)x + \frac{3}{2}(\varepsilon + \varphi)y + \frac{a\sqrt{3}}{12}(2 - 3\varepsilon - 3\varphi) + \frac{\sqrt{3}}{6a^3}k_1$$

şi vedem că *dacă triunghiul* ABC *este echilateral, transformarea este totdeauna o similitudine directă.* Similitudini inverse nu

1) L. BIANCHI, pag. 9.
2) L. BIANCHI, loc. cit.

putem avem, deoarece după (4), determinantul transformării este totdeauna pozitiv. Aplicând formule cunoscute [1], găsim că raportul de similitudine şi unghiul de rotaţie au valorile:

$$\gamma = \sqrt{3(\varepsilon^2 + \varepsilon\varphi + \varphi^2)} \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{\varepsilon - \varphi}{\sqrt{3}(\varepsilon + \varphi)}.$$

Vedem că *atât* γ *cât şi* δ *nu depind de cercurile de bază.* Transformarea se compune dintr'o rotaţie în jurul centrului de similitudine, de amplitudine δ, urmată de o omotetie de raport γ. Avem numai rotaţie când $\gamma = 1$, deci când

$$\varepsilon^2 + \varepsilon\varphi + \varphi^2 = \frac{1}{3}$$

In particular această relaţie e verificată de

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad \varphi = 0 \quad \text{şi} \quad \varepsilon = 0 \quad , \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

când avem respectiv $\delta = 30^0$ şi $\delta = -30^0$

Coordonatele centrului de similitudine sunt:

$$\xi = \frac{(-2 + 3\varepsilon + 3\varphi)(k_2 - k_3) - 3k_1(\varepsilon - \varphi)}{12a^3[3(\varepsilon^2 + \varepsilon\varphi + \varphi^2) - 3(\varepsilon + \varphi) + 1]}$$

$$\eta = \sqrt{3}\,\frac{2(a^4 + k_1) - 3(k_1 + 2a^4)(\varepsilon + \varphi) + (k_3 - k_2)(\varepsilon - \varphi) + 6a^4(\varepsilon^2 + \varepsilon\varphi + \varphi^2)}{12a^3[3(\varepsilon^2 + \varepsilon\varphi + \varphi^2) - 3(\varepsilon + \varphi) + 1]}$$

dacă cercurile de bază sunt de rază nulă, avem $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ şi centrul de silimilitudine coincide cu centrul triunghiului echilateral. In rezumat: *dacă triunghiul* ABC *nu este echilateral, transformarea prin centre radicale este pentru* $\varepsilon = \varphi$ *o omotetie care se reduce la transformarea identică pentru* $\varepsilon = \varphi = \frac{1}{3}$. *In afară de acest caz, transformarea este o afinitate propriu zisă, care nu se reduce nici la o omologie, nici la o similitudine.*

Dacă triunghiul ABC *este echilateral, transformarea este totdeauna o similitudine, putându-se reduce la o simplă rotaţie pentru*

$$\varepsilon^2 + \varepsilon\varphi + \varphi^2 = \frac{1}{3}.$$

E. ARGHIRIADE.

1) L. BIANCHI. Idem.

RAPORT ASUPRA DECERNĂRII PREMIULUI „G-RAL SCARLAT PANAITESCU"

Examinând lucrările de matematică cu aplicaţie la ştiinţele militare apărute în cursul anului 1947, am constatat următoarele:

a) Nu s'a tipărit şi nici nu s'a prezentat, în manuscris Societăţii *Gazeta Matematică* vreo lucrare în vederea unei eventuale premieri.

b) In revistele de specialitate au fost publicate o serie de studii cu aplicaţie la ştiinţele militare printre care merită a fi menţionate:

— Lămpi generatoare de oscilaţiuni de relaxare, de Col. Ing. CONSTANTIN ALEXE, publicat în *Revista Geniului* Nr. 1—2, 1947.

Grinzile din blăni la construcţia podurilor grele de campanie, de Maior METODIE MIHUŢ, publicat în *Revista Geniului* Nr. 3—4, 1947.

— Cinematica aeriană, de Lt. Comandor DIMITRIE DEICĂ, publicat în *Revista Aeronauticei* Nr. 3—4—5, 1947.

— Diferite sisteme de propulsie a avioanelor de Ing. ION N. IACOVACHI, publicat în *Revista Aeronauticei* Nr. 9, 1947.

Dintre acestea, acela al d-lui Lt. Comandor DIMITRIE DEICĂ, licenţiat în Ştiinţele Fizico-Chimice, studiază modul cum se aplică principiile şi procedeele cinematicei în rezolvarea problemelor interceptării aviaţiei de bombardament de către aviaţia de vânătoare în special.

Dat fiind că aceste probleme nu s'au tratat încă sub forma prezentată de autor, adică de aplicaţie a cinematicei, suntem de părere şi propunem ca pentru anul 1947, primul din cei 5 ani prevăzut de regulament, premiul „General Scarlat Panaitescu" să fie avut în vedere studiul „*Cinematica aeriană*" al d-lui Comandor DIMITRIE DEICĂ.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SCARLAT PANAITESCU"

Lt. Col. Rez. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE,
Col. ANDREI MICLESCU.

Acest raport a fost aprobat de Adunarea Generală din 24 August 1948.

NOTE MATEMATICE

1. *Asupra problemei 3902.* Ecuaţia

$$x^2 = xy + yz + zx$$

ale cărei soluţii în numere întregi se cereau în problema 3902, rezolvată în *Gazeta Matematică* Vol. XLVIII, pag. 561, se poate pune sub forma

$$2x^2 = (x + y)\,(x + z)$$

de unde soluţia generală

$$x = mpq \quad , \quad y = 2mp^2 - x = 2mp^2 - mpq \quad , \quad z = mq^2 - x = mq^2 - mpq.$$

I. B. FLORESCU.

2. *Notă asupra ecuaţiilor numerice cu rădăcini fracţionare.* Dându-se o ecuaţie numerică, să presupunem că s'au determinat şi eliminat toate rădăcinile întregi şi că ecuaţia rămasă este

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0, \qquad (1)$$

coeficienţii A_i fiind numere întregi.

Pentru căutarea rădăcinilor fracţionare se poate face transformarea $x = \frac{y}{A_0}$. Ecuaţia transformată va avea primul coeficient 1, iar rădăcinile fracţionare se transformă în rădăcini întregi, care se caută prin metoda cunoscută.

Uneori se poate găsi un număr $k < A_0$ astfel încât punând $x = \frac{y}{k}$, transformata să aibă primul coeficient 1.

In tratatele obişnuite nu se dă vreo indicaţie cum se poate găsi numărul k, ci se spune că se poate afla prin încercări. Vreau să arăt aci cum se poate determina k.

Punând $x = \frac{y}{k}$ ecuaţia (1) devine:

$$\frac{A_0}{k^n} y^n + \frac{A_1}{k^{n-1}} y^{n-1} + \frac{A_2}{k^{n-2}} y^{n-2} + \ldots + A_n = 0. \qquad (2)$$

Fie A_0 şi A_1 descompuşi în factori primi:

$$A_0 = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots a_p^{\alpha_p} \quad ; \quad A_1 = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \ldots a_p^{\beta_p} \cdot B_1 \qquad (3)$$

unde o parte din exponenţii $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_p$ pot fi nuli, iar β_1 este un număr prim cu A_0.

Prima condiție pentru ca y_n să rămână cu coeficientul 1 este ca fracția $\frac{A_0}{k^n}$ să se simplifice cu A_0. Aceasta cere ca numărul k^n să fie un multiplu al lui A_0, dar atunci k trebue să cuprindă *toți factorii primi ai lui* A_0. Nu introducem și factori primi diferiți de ai lui A_0, deoarece căutăm pentru k valoarea cea mai mică posibilă. Deci k descompus în factori primi va fi de forma:

$$k = a_1^{\theta_1} a_2^{\theta_2} \dots a_p^{\theta_p}. \qquad (4)$$

Introducând în (2) această expresie găsim:

$$\frac{y_n}{a_1^{n\theta_1-\alpha_1} a_2^{n\theta_2-\alpha_2} \dots a_p^{n\theta_p-\alpha_p}} + \frac{B_1 y^{n-1}}{a_1^{(n-1)\theta_1-\beta_1} a_2^{(n-1)\theta_2-\beta_2} \dots a_p^{(n-1)\theta_p-\alpha_p}} + \dots + A_n = 0. \qquad (5)$$

Să notăm cu N_0 numitorul lui y^n și cu N_1 numitorul lui $B_1 y^{n-1}$. N_0 trebue să fie neapărat număr întreg, deci

$$n\theta_i - \alpha_i \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad \theta_i \geqslant \frac{\alpha_i}{n} \qquad (i=1, 2, \dots, p). \qquad (6)$$

A doua condiție este ca $N_0 \geqslant N_1$, căci dacă $N_0 < N_1$, când gonim numitorii va apărea la y^n un coeficient diferit de 1.

Condiția cere ca $n\theta_i - \alpha_i \geqslant (n-1)\,\theta_i - \beta_i$ sau

$$\theta_i \geqslant \alpha_i - \beta_i \qquad (i=1, 2, \dots, p). \qquad (7)$$

Strângând la un loc cele două condiții (6) și (7) vom lua pentru θ_i cea mai mare dintre valorile $\frac{\alpha_i}{n}$ și $(\alpha_i - \beta_i)$ sau, dacă valoarea cea mai mare este fracționară, întregul imediat superior.

Practic se va proceda astfel: *a)* se descompune în factori A_0, apoi A_1 reținând numai factorii comuni cu ai lui A_0; *b)* se alcătuește apoi un tablou de forma

	a_1	a_2	$\dots$	a_p
$\frac{\alpha_i}{n}$	$\frac{\alpha_1}{n}$	$\frac{\alpha_2}{n}$		$\frac{\alpha_p}{n}$
$\alpha_i - \beta_i$	$\alpha_1 - \beta_1$	$\alpha_2 - \beta_2$		$\alpha_p - \beta_p$
θ_i				

în care se ia pentru θ_i numărul cel mai mic care satisface deodată relaţiile (6) şi (7). Rezultă apoi k din (4).

Exemple. 1°. $48x^6 - 92x^5 + 12x^4 - 11x^3 + \ldots = 0$

$A_0 = 48 = 2^4 \times 3$; $|A_1| = 92 = 2^2 \times 23$; $n = 6$.

	2	3
$\frac{\alpha_i}{n}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\alpha_i - \beta_i$	$4 - 2 = 2$	$1 - 0 = 1$
θ_i	2	1

$\therefore \quad k = 2^2 \times 3 = 12$

2°. $12x^5 + 40x^4 + 13x^3 \ldots = 0$

$A_0 = 12 = 2^2 \times 3$; $A_1 = 40 = 2^3 \times 5$; $n = 5$

	2	3
$\frac{\alpha_i}{n}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\alpha_i - \beta_i$	$2 - 3 = -1$	$1 - 0 = 1$
θ_i	1	1

$\therefore \quad k = 2 \times 3 = 6$

Observare. Dacă în (5) considerăm numitorii N_0, N_1, N_2, atunci ecuaţia este:

$$\frac{y^n}{N_0} + \frac{B_1 y^{n-1}}{N_1} + \frac{B_2 y^{n-2}}{N_2} + \ldots A_n = 0$$

Când se întâmplă ca datorită simplificărilor să rezulte $N_0 \geqslant N_1$, dar $N_0 < N_2$, atunci va apărea la y^n un coeficient diferit de 1. In acest caz trebuesc luate pentru θ_i valori mai mari. Va fi uşor de observat pentru care factori primi vor trebui măriţi exponenţii.

GH. D. SIMIONESCU.

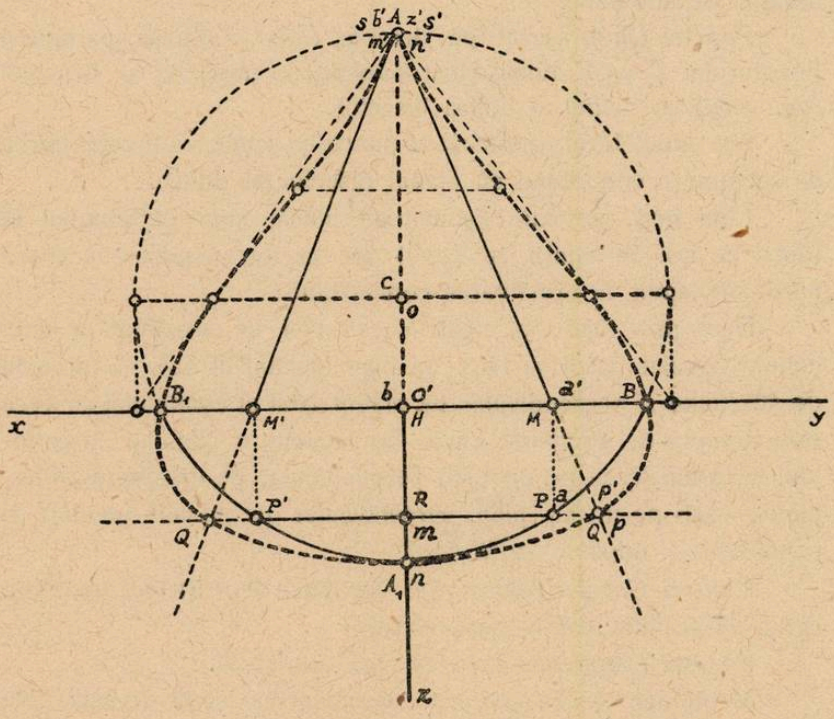
3. *Curba pară ca o consecinţă a unei proprietăţi spaţiale.* In articolul intitulat „*adevărata curbă para*“ publicat în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXV, pag. 442 şi următoarele, d-l G-RAL GH. BUICLIU a descris procedeul de construcţie al curbei pară indicat de G. de LONGCHAMPS.

Acest procedeu în geometria plană este următorul:

Se consideră cercul cu centrul în C şi cu diametrul fix AA_1. Intr'un punct H, situat pe AA_1 se ridică o perpendiculară, care taie cercul C în punctele B şi B_1. Pe această perpendiculară se ia un punct mobil M. Paralela dusă prin M la AA_1 taie cercul în P.

Perpendiculara PR pe AA_1 se întâlneşte cu AM în punctul Q, pe pară.

Să privim figura obţinută, ca o epură, în care: B_1B ar fi linia de pământ *xy*; cercul dat ar fi un cerc aşezat în planul



orizontal de proiecţie şi cu centrul în (*oo'*); diametrul AA_1 ar fi o dreaptă de capăt (*bz*, *b'z'*) fixă; punctele M şi P ar fi respectiv proiecţiunea verticală şi orizontală a unui punct (*aa'*) situat pe cerc; R şi A ar fi proiecţiunile unui punct (*mm'*) situat pe dreapta de capăt (*bz*, *b'z'*); Q ar fi proiecţiunile confundate ale unui punct (*pp'*).

In aceste condiţiuni, observ că dreapta (am, $a'm'$) este o frontală şi că atunci când punctul (aa') se deplasează pe cerc, frontala (am, $a'm'$) se deplasează în spaţiu, sprijinindu-se în punctul (aa') pe cercul (oo') şi în (mm') pe dreapta de capăt (bz, $b'z'$) limitată la extremităţile (nn') şi (ss'). Să observăm că (ss') este un punct din bisectorul 2.

Aşa dar, frontala (am, $a'm'$), în mişcarea ei, va da naştere unui conoid circular drept: cu planul vertical ca plan director, cu cercul cu centrul în (oo') ca bază şi cu dreapta (ns, $n's'$) ca dreaptă de stricţiune.

Punctul (pp'), aşezat pe dreapta (am, $a'm'$) şi aparţinând bisectorului 2, va fi atunci chiar punctul de înţepare al frontalei (am, $a'm'$) cu planul al doilea bisector.

Aşa fiind, locul geometric al punctului (pp'), va fi chiar curba de secţiune a conoidului cu planul bisector al doilea.

Cum însă, pe cale geometrică plană, ştim că punctul Q (notat de noi în epură cu (pp')) are ca loc geometric o curbă *pară*, am ajuns la următoarea concluziune:

Dacă prin unul din creştetele dreptei de stricţiune a unui conoid circular drept se duce un plan înclinat la 45° pe dreapta de stricţiune şi perpendicular pe planul axial al conoidului ce trece prin dreapta de stricţiune, curba de secţiune a planului cu conoidul se proiectează pe un plan perpendicular pe dreapta de stricţiune, — sau pe un alt plan perpendicular pe planul median al conoidului, — după o *curbă pară*.

Cititorii *Gazetei Matematice* vor putea uşor deduce că însăşi curba de secţiune este o curbă *pară*.

Această proprietate cred că este cunoscută.

Menţionez că ceea ce m'a determinat să scriu această notă este faptul care ne indică cum o proprietate sau o construcţie a unei figuri geometrice plane, interpretată ca o epură de geometrie descriptivă, ne conduce la descoperirea unor proprietăţi ale figurilor din spaţiu.

M. NICOLAU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Universitatea din București. Facultatea de Științe. Secția Matematici

Sesiunea Octombrie 1947. Anul II. Examene de fine de an

Geometrie. I. Se dă iperbola echilateră (I) : $x^2 - y^2 = a^2$. Prin punctul A (a, O) al iperbolei se duce o dreaptă (d) de coeficient unghiular m.

1. Dacă notăm cu C punctul de întâlnire al lui (d) cu (I) să se găsească coordonatele mijlocului P al segmentului AC în funcție de m.

2. Să se găsească în funcție de m, coordonatele punctului de întâlnire D al perpendicularei în P pe AC, cu dreapta dusă prin origine, de coeficient unghiular m.

3. Să se arate că, atunci când m variază, D descrie o curbă de gradul al patrulea, care are aceleași direcții asimptotice cu iperbola (I) și să se construiască această curbă.

II. Se dau două drepte în spațiu și pe aceste drepte două puncte O, O' pornind dela care se iau segmentele $OM = \rho$ și $O'M' = \rho'$ legate prin relația

$$a\rho\rho' + b\rho + c\rho' + d = 0,$$

a, b, c, d fiind constante. Să se afle:

1. locul descris de dreapta MM'.
2. centrul suprafeței — loc.
3. planul tangent într'un punct oarecare P.

III. Să se afle liniile asimptotice ale suprafeței

$$z = xy^2.$$

Analiză. 1. Axioma lui ZERMELO. Aplicații.

2. Definiția și proprietăți ale funcțiilor semicontinui.

Algebră axiomatică. I. 1°. Un p grup de ordin p^3 cu cel mult două subgrupuri de ordin p are o structură grupală cuasinormală (în sensul O, Ox).

2°. Un grup nilpotent de treaptă metabelică 2 în care DG (primul subgrup comutatorial) este singurul subgrup de ordinul respectiv este cu structură grupală cuasinormală.

3°. Condiția necesară și suficientă ca un grup finit de ordin

$$n = p_1^{r_1}\ p_2^{r_2} \ldots\ p_k^{rk}, \qquad ri \geqq 3$$

să aibă o structură cuasinormală este: 1. să fie nilpotent; 2. să cuprindă elemente de ordin p, permutabile între ele.

II. 1°. Grupuri accesibile prin șiruri normale.

2°. Teorema de legătură pentru cuasi inele.

3°. Teorema lui JORDAN-HÖLDER pentru cuasi inele.

Mecanică. Un avion are o mişcare uniformă pe o traiectorie rectilinie, înclinată de unghiul α pe orizont. Începând dela o înălţime h faţă de sol, avionul lasă câte o bombă la momentele $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$.

1. Să se calculeze distanţa între două bombe consecutive pe sol (presupus orizontal).

2. Tangenta unghiului sub care cade bomba pe sol.

3. Să se aplice formulele aflate la sborul orizontal.

BIBLIOGRAFIE

Colloquium Mathematicum. I_2 Wroclaw. Pologne. 1948. Seminarium Matematyezne. Număr comemorativ în memoria lui ŞTEFAN BANACH.

Quaterly of Applied Mathematics. G. K. BATCHELOR: Energy decay and self-preserving correlation functions in isotropic turbulence. L. BRILLOUIN: A practical method for solving HILL's equation.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVIII. Nr. 5. August 1948.

G. IUGA: Şiruri de forme ternare reprezentate prin determinanţi. Notă matematică. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

AL. CLIMESCU. Sur une matrice attachée à toute suite de nombres.

LUCREŢIA CONSTANTINESCU. Sur les transformations infinitésimales qui conservent les directions des normales.

ION CREANGĂ. Sur la correspondance „T" entre deux surfaces regleés.

I. S. GAL. A theorem concerning regular polygones.

GH. GHEORGHIU. Etudes des surfaces au voisinage d'une courbe.

L. GODEAUX. Etude d'une involution cyclique appartenant à une surface algebrique.

ADOLF HAIMOVICI. Sur une famille de surfaces en relation avec les développables d'une congruence de droites et sur les surfaces à réseau ortogonal de courbes planes.

LOTHAR HEFFTER. Differentiation und Integration bestimmter Integrale nach einem Parameter.

I. HORVATH. Note sur un problème de L. FEJER.

ION IRIMESCU. Etude des courbes définies par certaines relations entre leur éléments intrinseques.

D. I. MANGÉRON. Sur quelques problémes du calcul des variations liés à la théorie d'une classe d'équations aux dérivées partialles d'ordre supérieur.

GR. C. MOISIL. Sur une génération de la fonction D'AIRY.

A. MYLLER. Coarde ortoptice.

ILIE POPA. Transformations infinitésimales des surfaces conservant les aires.

L. FEJES TOTH & H. HADWIGER. Ueber Mittelwerth in einem Bereichsystem.

(Ultimele 15 broşuri sunt extrase din *Buletinul Politehnicei* „GH. ASACHI" Vol. 3).

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 20 (G. M., Vol. XXI, 420). Se întreabă când a făcut studii de matematică, la universitatea din Berlin prinţul GR. M. STURDZA ?

Iată ce găsim în: « *Trecute vieţi de Doamne şi Domniţe* », Vol. III de C. GANE la pag. 194:

. . . „*In 1835 îi aflăm deci în capitala Prusiei* (e vorba de GR. M. STURDZA şi DIMITRIE STURDZA fraţi) *unde* MIHAI KOGĂLNICEANU *se pune pe o muncă atât de serioasă încât peste câţiva ani se apucă să-şi tipărească pe nemţeşte broşuri despre Moldova, despre ţigani şi a. m. d.*

Dealtfel şi BEIZADEA GRIGORE *a fost un student silitor care a învăţat carte multă . . .* "

Iar mai departe la pagina 201, găsim:

. . . „*Dar* GRIGORE STURDZA *era dinpotrivă de-o inteligenţă remarcabilă, avea multă cultură, multă originalitate, multă neatârnare de caracter. . .*"

Comparaţia se face faţă de fratele său BEIZADEA DUMITRU.

O dovadă că GRIGORE STURDZA, a studiat şi matematicile o avem prin aceea că a scris şi o carte de matematici şi iată ce spune C. GANE, la pag. 201:

. . . „ *a scris o carte de matematică transcendentă;* **Legile fundamentale ale Universului;** *a fost un cunoscător al legilor şi un bun orator, . . .*"

La pagina 197, găsim:

. . . „*El hotărî — ca în April 1843 — că fii săi cari se aflau de 9 ani în străinătate vor trebui să părăsească Berlinul . . .* ".

De aici rezultă că GRIGORE STURDZA (zis viţelul) *şi-a făcut studiile la Berlin între anii 1835 şi 1843.*

Dela Berlin, a fost încă un an la Paris — iar în anul 1844 s'a înapoiat la Iaşi.

LT. COL. EUG. ŞT. IACOB.

DIVERSE

Domnul ANDREI POPOVICI a trecut doctoratul în matematici, la Universitatea din Bucureşti, la 26 Iunie 1948, cu subiectul: *Fizica acţiunii,* în faţa comisiunii compusă din d-nii profesori: G. VRÂNCEANU, preşedinte; D. BARBILIAN şi N. TEODORESCU, membri.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3419. *Fiind dată ecuația*

$$x(\alpha\sqrt{x^2-\alpha^2}+\beta\sqrt{x^2-\beta^2})=\alpha\beta\gamma+\gamma\sqrt{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)},$$

unde α, β, γ *sunt numere reale și pozitive, astfel ca suma a două din ele să fie mai mare totdeauna decât al treilea, se cere să se găsească o rădăcină reală și pozitivă a ei.*

CONST. C. POPOVICI.

Soluția. Luând o unitate de lungime arbitrară, cu numerele α, β, γ putem a construi un triunghiu ABC. In acest triunghiu avem relația

$$\sin 2A+\sin 2B=2\sin C\cos(A-B),$$

$$\therefore \quad \sin A\cos A+\sin B\cos B=\sin A\sin B\sin C+\sin C\cos A\cos B$$

sau încă

$$\sin A\sqrt{1-\sin^2 A}+\sin B\sqrt{1-\sin^2 B}=\sin A\sin B\sin C+\sin C\sqrt{(1-\sin^2 A)(1-\sin^2 B)}.$$

Notând cu R raza cercului circumscris triunghiului, această relație se mai poate scrie

$$2R[\alpha\sqrt{4R^2-\alpha^2}+\beta\sqrt{4R^2-\beta^2}]=\alpha\beta\gamma+\gamma\sqrt{(4R^2-\alpha^2)(4R^2-\beta^2)}.$$

Comparând această relație cu ecuația dată, rezultă că o soluție a ei, reală și pozitivă, este $x=2R$. Notând ca de obiceiu cu $2p=\alpha+\beta+\gamma$, soluția găsită se poate exprima numai cu ajutorul datelor problemei prin formula

$$x=\frac{\alpha\beta\gamma}{2S}=\frac{\alpha\beta\gamma}{2\sqrt{p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}}.$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4287. *Fără a se desvolta determinantul să se deducă identitatea:*

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c & 0 \\ 0 & a & 0 & b & c \end{vmatrix} = a^2 c^2 (a + b + c).$$

Generalizare. AL. AL. ROŞU.

Soluţia şi generalizarea acestei probleme este cuprinsă în soluţia şi generalizarea dată problemei 4458 la pag. 179, Vol. LIII.

Notă. 1°. Intre Δ_{2n+1} din această problemă şi D_{2n+2} din problema 4458 există relaţia

$$(-1)^n (A_0 - A_1 + A_2 - \ldots \pm A_n)\, \Delta_{2n+1} = D_{2n+2}$$

2°. D-l I. A. ILIE, pe când era elev la colegiul militar „N. Filipescu" a dat următoarea soluţie. Fie cazul general

$$\Delta_{2n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & \ldots & a_k & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & \ldots & a_k & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & \ldots & a_k & \ldots & a_n & 0 & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_n \end{vmatrix} \quad (k < n)$$

Adunăm toate coloanele la prima şi apoi dăm pe Σa_i în factor.

Scădem linia a $2n-1$ din linia a $n-a$ şi dăm ca factor pe a_1. In general se scade linia a $(2n-k-1)-a$ din linia a $(n-k)-a$, unde $k = 0, 1, \ldots (n-2)$ şi dăm ca factor pe a_1. Se obţine.

$$\Delta_{2n-1} = A a_1^{n-1} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \qquad (0)$$

unde A este un factor de gradul $n-1$ căci Δ este de gradul $2n-1$. Se observă că în desvoltarea lui Δ_{2n-1} trebue să se găsească şi termenul $a_1^n\, a_1^{n-1}$, ori după (1) trebue să avem

$$A a_n^n = a_1^n\, a_1^{n-1} \quad \therefore \quad A = a_1^{n-1}$$

aşa că $\Delta_{2n-1} = a_1^{n-1}\, a_n^{a-1} (a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots + a_n)$.

Pentru $n = 3$, se găseşte cazul particular din enunţ.

3°. D-l N. E. WEGENER (Bucureşti) a rezolvat foarte bine problema pe calea dată de rezolvarea problemei 4458 la pag. 179, Vol. LIII.

4°. Au demonstrat identitatea din enunţ pe calea de la 2° şi apoi au dedus că „*tot aşa se poate stabili identitatea generală*" d-nii: I. GR. BOGDAN, P. P. COJOCARU, CONST. COTESCU, CĂLIN I. C. DIMITRIU, C-TIN N. GAVRILESCU, S. KNALL.

5°. Au verificat identitatea, prin dezvoltarea determinantului, fără a enunţa generalizarea d-nii: I. I. BUZINCU, VINTILĂ GRIGORESCU şi BIBY UNTER.

PROBLEMA 5416. *Pe o dreaptă* xx' *se dă punctul fix* F *şi două puncte mobile* A *şi* B. *Se construeşte triunghiul isoscel* ABC, *dreptunghic în* A, *aşa în cât*

$$\overline{AF} + \overline{AC} = C^t.$$

Fie M *intersecţia lui* CF *cu cercul ce trece prin* F *şi este tangent în* B *la* CB. *Să se demonstreze că* MB *trece printr'un punct fix când* A *şi* B *se mişcă pe* xx'.

G-L GH. BUICLIU.

Fie pe xx' punctele D, D' aşa în cât

$$\overline{FD} = \overline{FD'} = \overline{AF} + \overline{AC} = C^t = l.$$

Punctele D, D' sunt fixe şi din cauza relaţiei precedente triunghiul dreptunghic D'AC (pentru cazul din figură) este isoscel. Deci punctul C descrie dreapta D'C care face 45° cu xx' şi anume segmentul D'Q' cuprins între xx' şi perpendiculara FQ' pe xx', punctul Q' fiind aşa în cât

$$\overline{FD'} = \overline{FQ'}.$$

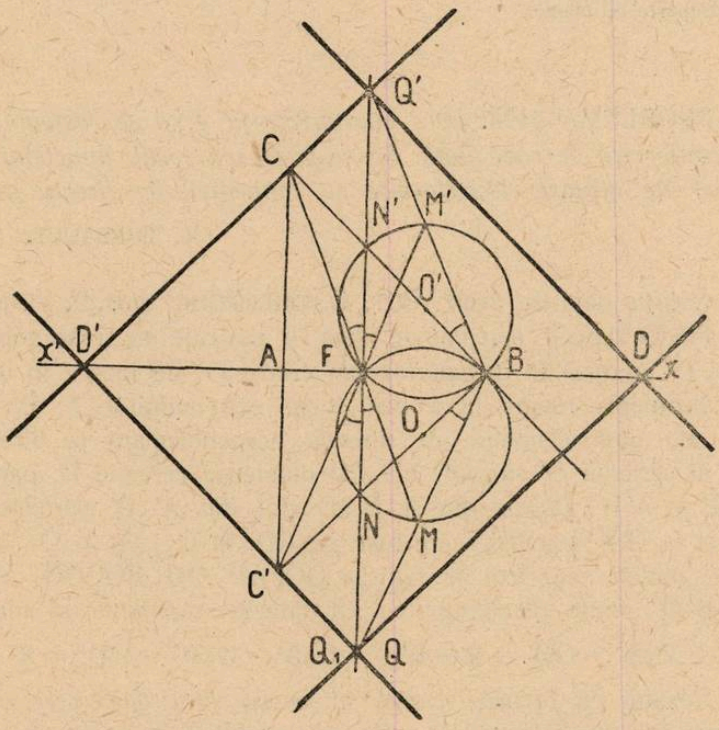
Examinând poziţiile lui C în celelalte cadrane se găseşte că C descrie laturile patratului D'Q'DQ cu diagonala egală cu $2l$.

Considerăm pe C în cadranul II, cazul figurei. Cercul de centru O, trecând prin F şi tangent în B la CB taie pe QQ' în N, iar unghiul NBF este evident egal cu 45° şi egal cu $\sphericalangle$ CBF. Deci BN trece prin C' simetricul lui C faţă de FA. Rezultă că FA este bisectoarea unghiului CFC' şi fiindcă NF $\perp$ AF, dreapta NF este bisectoarea unghiului C'FM, exterior unghiului CFC' în triunghiul CFC'. Acum se observă că

$$\sphericalangle C'FN = \sphericalangle C'FQ = \sphericalangle NFM = \sphericalangle C'BM$$

ultimele două având aceeaşi măsură în cercul O. Dacă Q_1 este intersecţia lui BM cu FN, rezultă din (1) că patrulaterul $Q_1C'FB$ este inscriptibil şi cum $\sphericalangle Q_1FB$ este drept şi $\sphericalangle Q_1C'B$ este drept. Dar figura C'D'CB este patrat prin construcţie, deci Q_1C' se confundă cu C'D' şi Q_1 cu Q. Dreapta BM trece prin urmare prin punctul fix Q. Tot prin Q trece dreapta BM corespunzătoare în cazul când C se mişcă pe DQ'.

Când C se mişcă pe D'Q sau QD atunci BM trece prin Q'.



Notă. 1°. Dacă C este pe prelungirile laturilor patratului D'Q'DQ, atunci B este pe prelungirile diagonalei DD' şi dacă

$$\overline{AF} - \overline{AC} = C^t$$

dreapta BM corespunzătoare trece prin Q sau Q' ceea ce se demonstrează pe aceeaşi cale elementară ca în cazul problemei din enunţ.

2°. Au dat soluţii geometrice pe căi mai lungi d-nii: MIRCEA D. POPA, P. P. DRĂGHICESCU şi MARIN GH. POPESCU.

3°. D-l P. P. DRĂGHICESCU a examinat şi cazul diferenţei dela 1° precedent.

4°. S'au primit bune soluţii prin geometria analitică dela d-nii: MIRCEA D. POPA, E. N. WEGENER, BENO MARCUS, GH. R. PETRESCU, FLORIN POPESCU, H. M. BODNĂRESCU, AL. JILETCOVICI, N. N. ANDRIEVICI, R. P. VOINEA, C. BAKONYI şi M. R. CONSTANTINESCU.

După cum se vede din soluţie, problema este mult prea elementară pentru a recurge la geometria analitică. Sfătuim corespondenţii că chiar dacă încep a ataca o problemă prin geometria analitică să caute apoi să o rezolve şi prin geometrie, dacă nu pentru altceva cel puţin pentru a verifica rezultatul. Dăm acest sfat pentrucă un reputat corespondent, necitat aici, făcând o eroare de calcul în folosirea geometriei analitice a ajuns la rezultate falşe, mult dreparte de adevăr.

PROBLEMA 5493. *Pe o circomferinţă fixă se rostogoleşte o circonferinţă de rază dată. Să se găsească locul punctelor de contact ale ultimei circonferinţe cu tangentele de direcţie dată.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de d-nii: OCT. C. GHEORGHIU şi R. P. VOINEA

Fie O centrul cercului de rază R pe care se rostogoleşte cercul O' de rază R' în exterior sau cercul O" de rază r în interior. Problema revine la a găsi locul extremităţilor A, B sau A', B' ale unui diametru, de direcţie perpendiculară pe direcţia dată, al cercului O' sau O". Fie CD diametrul cercului O, paralel cu AB şi A'B'. Ducem din A, B şi apoi din A', B' paralele la OO' şi la OO", paralele care taie pe CD în O_1, O_2 şi O_1', O_2'. Aceste puncte sunt fixe iar figurile OO_1AO', OO_2BO', $OO_1'A'O''$, $OO_2'B'O''$, sunt paralelograme cu laturile constante şi anume

$$O_1A = O_2B = OO' = R + R' \quad ; \quad O_1'A' = O_2'B' = OO'' = R - r.$$

Rezultă că locurile cerute în enunţ sunt *două cercuri cu centrele* O_1, O_2 *şi razele* $R + R'$ când cercul care se rostogoleşte este exterior şi *două cercuri cu centrele* O_1', O_2' *şi razele* $R - r$ când cercul care se rostogoleşte este interior.

Notă. 1°. D-nii P. P. DRĂGHICESCU şi C. D. EFTIMIE au rezolvat bine problema numai pentru O' exterior.

2°. D-l M. D. POPA a considerat ambele cazuri şi a găsit numai câte un cerc în fiecare caz.

3°. D-l N. SOTIRESCU (Lic. militar, Timişoara) a dat o lungă soluţie analitică. Problema este prea elementară pentru a recurge la geometria analitică.

4⁰. Centrul O' al cercului care se rostogoleşte descrie evident un cerc cu centrul O şi raza OO' iar lungimile O'A, O'B sunt continuu constante şi paralele. Deci A şi B descriu locul lui O' translatat pe direcţia AB în unul din sensurile O'A şi O'B cu lungimea razei R'. Adică două cercuri.

GH. B.

PROBLEMA 5589. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sin \frac{\pi}{n} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sin \frac{\pi}{n+1},$$

după diferite valori ale lui α.

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de d-nii: C. C. BAKONYI (Timişoara), M. R. CONSTANTINESCU (Ploieşti), MIRCEA D. POPA (Bucureşti), MARIN GH. POPESCU (Piteşti), P. P. TEODORESCU (Bucureşti), R. P. VOINEA (Bucureşti) şi N. E. WEGENER (Bucureşti).

Notând cu S_n suma primilor n termeni ai seriei, avem

$$S_n = -\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sin \frac{\pi}{n+1}.$$

Natura seriei depinde de limita acestei expresii. Cum

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{(n+1)}\right]}{\frac{\pi}{(n+1)}} = 1,$$

însemnează că limita lui S_n depinde de limita expresiei $(n+1)^{-\alpha-1}$, şi deci: 1⁰ dacă $-\alpha-1 \leqslant 0$, adică $\alpha \geqslant -1$ seria este *convergentă*; 2⁰ dacă $-\alpha-1 > 0$, adică $\alpha > -1$, seria este *divergentă*.

La această problemă simplă s'au primit multe soluţii greşite.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 5764. *Să se studieze variaţia funcţiei*

$$y = (a-x)\sqrt{x(b-x)}$$

şi să i se construiască curba reprezentativă, a *şi* b *fiind pozitive.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de d-l P. P. DRĂGHICESCU.

Curba dată are puncte reale numai în intervalul

$$0 \leqslant x \leqslant b.$$

Prima derivată a lui y este

$$y' = \frac{4x^2 - (3b + 2a)x + ab}{2\sqrt{x(b-x)}} = \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x(b-x)}}.$$

Ecuația

$$\varphi(x) = 4x^2 - (3b + 2a)x + ab = 0 \qquad (1)$$

are ambele rădăcini reale, căci realizantul R, este pozitiv

$$R = 4a^2 - 4ab + 9b^2 = (2a - b)^2 + 8b^2 > 0.$$

Rădăcinile sunt și pozitive, după cum se vede din valorile lor

$$x_1 = \frac{2a + 3b - \sqrt{(2a + 3b)^2 - 16ab}}{8}$$

și

$$x_2 = \frac{2a + 3b + \sqrt{(2a + 3b)^2 - 16ab}}{8}$$

cantitatea $\sqrt{(2a + 3b)^2 - 16ab}$ fiind evident mai mică decât $(2a + 3b)$. De oarece R nu se anulează decât pentru $a = b = 0$, ecuația (1) are totdeauna 2 rădăcini diferite între ele.

Avem apoi

$$\varphi(b) = b(b - a) \gtrless 0 \quad \text{după cum} \quad a \lesseqgtr b.$$

Dacă $a < b$ tabloul de variația lui y este

x	0		x_1		a		x_2		b
y'		+	0	−		−	0	+	
y	0	↗	Max.	↘	0	↘	Min.	↗	0

Semnele lui y' arată că a este situat între x_1 și x_2, ceea ce de altfel se poate stabili și prin comparația algebrică a lui a cu fiecare din valorile x_1 și x_2.

Pentru construcția curbei, în toate cazurile care se pot prezenta, să calculăm și derivata a doua a lui y. Avem

$$y'' = \frac{-8x^3 + 12bx^2 - 3b^2x - ab^2}{4x(b-x)\sqrt{x(b-x)}} = \frac{f(x)}{4x(b-x)\sqrt{x(b-x)}}.$$

Derivând numărătorul şi anulând, obţinem ecuaţia

$$f'(x) = 3(-8x^2 + 8bx - b^2) = 0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$\alpha_1 = b\frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad \text{şi} \quad \alpha_2 = b\frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Apoi avem

$$f(\alpha_1) = b^3\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{b}\right) < 0 \quad \text{şi} \quad f\alpha_2) = b^3\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{b}\right) \gtrless 0$$

după cum $a \lessgtr b\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Găsim după aceasta,

$$f(0) = -ab^2 < 0 \quad \text{şi} \quad f(b) = b^2(b-a) \gtrless 0$$

după cum $a \lessgtr b$, iar

$$f(a) = 4a(b-a)(2a-b)$$

şi vom avea

$$f(a) > 0 \quad \text{pentru} \quad \frac{b}{2} < a < b$$

$$f(a) < 0 \quad \text{„} \quad 0 < a < \frac{b}{2} \quad \text{şi} \quad b < a.$$

Se găseşte apoi prin calcule uşor de urmărit, că

pentru $0 < a < \frac{b}{2}$ avem $x_1 < x_2 < \alpha_1 < \alpha_2$

„ $\frac{b}{2} < a$ „ $\alpha_1 < x_1 < \alpha_2 < x_2$.

Avem de considerat deci următoarele cazuri pentru construcţia curbei:

I. $0 < a < \frac{b}{2}$ cu $0 < a < b\frac{2-\sqrt{2}}{4}$; $(a < \alpha_1)$.

In acest caz avem

$$\begin{array}{ccccccc} f(0) & f(x_1) & f(a) & f(\alpha_1) & f(x_2) & f(\alpha_2) & f(b) \\ - & - & - & - & + & + & + \end{array}$$

II. $b\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} < a < \dfrac{b}{2}$ cu $\alpha_1 < a$. Avem

$$\begin{array}{ccccccc} f(0) & f(x_1) & f(\alpha_1) & f(a) & f(x_2) & f(\alpha_2) & f(b) \\ - & - & - & - & + & + & + \end{array}$$

In ambele aceste cazuri curba are un punct de inflexiune între punctul $(a, 0)$ și punctul minim. Forma curbei este ca în figurile 1 și 2.

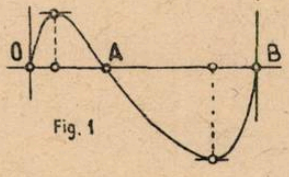


Fig. 1

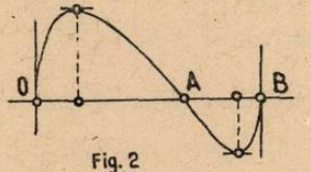


Fig. 2

III. $b < a$. Pentru $b < a < b\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ avem

$$\begin{array}{ccccc} f(0) & f(\alpha_1) & f(x_1) & f(\alpha_2) & f(b) \\ - & - & - & + & - \end{array}$$

Curba are forma din fig. 3 cu 2 puncte de inflexiune între maxim și $(b, 0)$. De oarece am văzut că $a < x_2$ înseamnă că minimul este în regiunea în care curba nu are puncte reale.

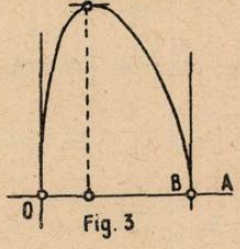


Fig. 3

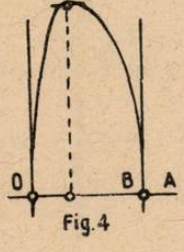


Fig. 4

IV. $b < a$ cu $b\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} < a$. In acest caz

$$\begin{array}{ccccc} f(0) & f(\alpha_1) & f(x_1) & f(\alpha_2) & f(b). \\ - & - & - & - & - \end{array}$$

Curba are forma din figura 4 fără punct de inflexiune.

V. Caz particular $a = \frac{b}{2}$, curba are forma din figura 5 cu un punct de inflexiune chiar în punctul $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$.

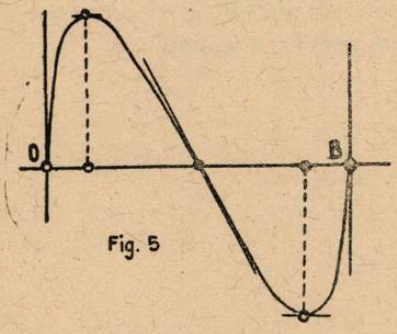


Fig. 5

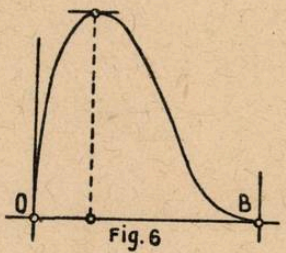


Fig. 6

VI. Caz particular $a = b$. Curba are forma din figura 6, tangentă la axa Ox în punctul $(a, 0)$.

In toate cazurile curba este tangentă în origină la axa y.

Notă. Am propus construcţia acestei curbe ca exerciţiu pentru clasa a VII-a în 1941 cu Nr. 589 în *Suplimentul cu Exerciţii*, dar neprimind nicio soluţie mulţumitoare am repropus-o în Vol. XLVII, *Gazeta Matematică*. Am primit numai dela d-l P. P. DRĂGHICESCU, la 3 Iunie 1943, soluţia completă, după care se publică redijarea precedentă. Anterior şi ulterior s'au primit soluţii necomplete cu construcţia neexactă a curbei din cauza neexprimărei punctelor de inflexiune dela d-nii: C. BACKONYI, M. R. CONSTANTINESCU, G. GH. DONŢU, OCT. C. GHEORGHIU, N. V. IONESCU, VLAD GH. JURIST, P. P. TEODORESCU, D-TRU GH. VASILIU şi E. N. WEGENER.

D-nii A. H. CUBAT şi TR. GH. DUMITRESCU au considerat numai cazul $a < b$, fără a se ocupa de punctele de inflexiune.

S'a mai primit o soluţie parţială dela d-l M. V. SOARE.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5792. *Dându-se ecuaţia*

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - a = 0$$

să se determine a astfel ca să avem relaţia:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & a \\ x_1 & a & x_3 \\ a & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

şi să se rezolve. Generalizare.

LT.-COL. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

Soluție și generalizare, date de d-l MIRCEA D. POPA (student inginer București).

Să considerăm ecuația de grad n

$$f(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0 \qquad (1)$$

ai cărei coeficienți sunt funcții de un parametru a, pe care vrem să-l determinăm astfel ca să se îndeplinească condiția:

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} a & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & a & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 & a & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & a \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Condiția (2) poate fi pusă sub altă formă, care permite mai ușor găsirea lui a.

Determinantul Δ se transformă prin scăderea succesivă a fiecărei linii din următoarea, astfel:

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} a & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 - a & a - x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - a & a - x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a - x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} - a & a - x_n \end{vmatrix}$$

Dacă-l desvoltăm acum după elementele liniei 1-a avem:

$$\Delta(a) = a(a - x_2)(a - x_3) \dots (a - x_{n-1})(a - x_n) + \\ + x_2(a - x_1)(a - x_3) \dots (a - x_{n-1})(a - x_n) + \dots \\ + x_n(a - x_1)(a - x_2) \dots (a - x_{n-1}),$$

sau, ținând seamă de (1):

$$\Delta(a) = a\frac{f(a)}{a - x_1} + x_2\frac{f(a)}{a - x_2} + \dots + x_i\frac{f(a)}{a - x_i} + \dots + x_n\frac{f(a)}{a - x_n}$$

$$\therefore \Delta(a) = a\frac{f(a)}{a - x_1} + (a + x_2 - a)\frac{f(a)}{a - x_2} + \dots + (a + x_i - a)\frac{f(a)}{a - x_i} + \dots \\ + (a + x_n - a)\frac{f(a)}{a - x_n}$$

Condiția (2) se scrie deci:

$$af(a)\sum_{1}^{n}\frac{1}{a-x_i}-(n-1)f(a)=0,$$

sau ținând seamă de derivata lui $f(x)$ din (1):

$$af'_x(a)-(n-1)f(a)=0 \qquad (3)$$

Valorile lui a scoase din (3) și introduse în (1) ne dau posibilitatea să rezolvăm ecuațiile astfel obținute.

In cazul particular al ecuației din enunț avem:

$f(x)\equiv 2x^3+3x^2-3x-a \quad \therefore \quad f(a)=2a^3+3a^2-4a$

$f'(x)=6x^2+6x-3 \quad \therefore \quad f'_x(a)=6a^2+6a-3$

Condiția (3) se scrie:

$$a(6a^2+6a-3)-2a(2a^2+3a-4)=0 \ \therefore \ a(2a^2+5)=0. \qquad (4)$$

Ecuația (4) are rădăcinile

$$a_1=0\ ;\ a_2=i\sqrt{\frac{5}{2}}\ ;\ a_3=-i\sqrt{\frac{5}{2}}$$

1°. *Pentru* $a=a_1=0$, rădăcinile ecuației (1) sunt:

$$x_1=0\ ;\ x_{2,3}=\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}\pm\sqrt{11})}{4}$$

2°. Pentru $\quad a=a_{2,3}=\pm i\sqrt{\frac{5}{2}}$

avem succesiv:

$$2x^3+3x^2-3x-a=\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{9}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)+1-\frac{a}{2}=0$$

care ne dă rădăcinile:

$$x'_1, x''_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{A}+\mathrm{B}$$

$$x'_2, x''_2=-\frac{1}{2}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\mathrm{A}-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\mathrm{B}$$

$$x'_3, x''_3=-\frac{1}{2}-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\mathrm{A}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\mathrm{B}$$

unde $\quad \mathrm{A}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{-4+2a+\sqrt{-1-16a}}$

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{-4+2a-\sqrt{-1-16a}}\ ;\ \left(a=\pm i\sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

Inlocuind valorile lui a în A şi B găsim:

$$A=\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{8+\sqrt{1\pm 8\sqrt{10}}-\sqrt{1\mp 8\sqrt{10}}}{2}+i\,\frac{\pm 2\sqrt{10}+\sqrt{1\pm 8\sqrt{10}}+\sqrt{1\mp 8\sqrt{10}}}{2}}$$

$$B=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{-8+\sqrt{1\pm 8\sqrt{10}}-\sqrt{1\mp 8\sqrt{10}}}{2}-i\,\frac{\mp 2\sqrt{10}+\sqrt{1\pm 8\sqrt{10}}+\sqrt{1\mp 8\sqrt{10}}}{2}}$$

Semnele se corespund.

Notă. D-nii VAL. MIHAIL I. STANCIU (student inginer Buc.) şi SOFRONIE ŞTEFĂNESCU (Lic. Armatei, Craiova) au găsit numai soluţiile cazului particular pentru $a = 0$.

PROBLEMA 5880. *Dându-se în plan patru drepte neparalele câte două şi neconcurente câte trei, se cere:*

a) *Câte puncte există în planul dreptelor, astfel ca proiecţiile lor pe celé patru drepte să fie conciclice?*

b) *Să se găsească caracteristicile acestor cercuri şi să se dea proprietăţile punctelor ce satisfac problemei.*

c) *Cazuri particulare.*

LT. COL. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

Soluţie dată de DL. MIRCEA D. POPA.

a) Să presupunem că F_1 este unul din punctele căutate şi a_1, b_1, c_1, d_1 proiecţiile sale pe laturile BC, CD, DA, AB, ale patrulaterului format iar O centrul cercului *abcd*. Fie deasemenea a_2, b_2, c_2, d_2 punctele în care cercul (O) taie din nou laturile patrulaterului ABCD.

Este clar că a_2, b_2, c_2, d_2 sunt şi ele proiecţiile unui punct F_2, simetric al punctului F_1 faţă de centrul O al cercului, pe laturile lui ABCD.

Fie acum a_1', b_1', c_1', d_1', respectiv a_2', b_2, c_2', d_2', simetricele punctelor F_1 şi F_2 faţă de aceleaşi laturi.

Perechile de drepte (F_1a_1', F_2a_2'), (F_1b_1', F_2b_2), (F_1c_1', F_2c_2'), (F_1d_1, F_2d_2') se intersectează în 4 puncte M_a, M_b, M_c, M_d respectiv pe BC, CD, DA, AB, care sunt, conform construcţii clasice, punctele de contact ale unei *conice*, înscrisă în ABCD şi care are ca focare punctele F_1 şi F_2.

Putem deci spune că *punctele căutate sunt focarele conicelor înscrise în patrulaterul format de cele 4 drepte date.*

Aceste conice formează un *fascicol tangențial* de conice.

Pentru a găsi toate punctele ce îndeplinesc condiția dată trebue să găsim *locul* focarelor conicelor unui fascicol tangențial, loc care este cunoscut[1]: *o cubică circulară* (care trece prin punctele ciclice ale planului) și care conține următoarele puncte: *cele 6 vârfuri ale patrulaterului complet* format de cele 4 drepte date, *picioarele înălțimilor triunghiului format de diagonalele patrulaterului*, PQR și prin *punctul lui* MIQUEL.

Iată locul punctelor căutate de enunțul problemei.

b) Se știe că proiecțiile focarelor F_1 și F_2 ale unei conice, cu centrul în O, și tangentă laturilor BC, CD, DA, AB sunt situate pe cercul de centru O și care are ca diametru, mărimea axei mari a conicei, numit și *cercul principal* al acesteia.

Prin urmare, cercul $a_1b_1c_1d_1\,a_2b_2c_2d_2$ este cercul principal al conicei cu focarele în F_1, F_2 și înscris în ABCD.

Locul centrului său O este locul centrelor conicelor fasciculului tangențial înscris în ABCD, care este o dreaptă, ce unește mijloacele diagonalelor patrulaterului, sau *dreapta lui* NEWTON-GAUSS a patrulaterului.

c) Punctele F_1 și F_2 având proiecțiile lor pe laturile triunghiurilor formate cu câte trei din dreptele date, pe același cerc, rezultă conform unei teoreme cunoscute că sunt *isogonale* față de aceste triunghiuri.

Aceasta este prima lor proprietate.

O a 2-a proprietate rezultă din faptul că dreapta F_1F_2 este axa conicei înscrise.

Înfășurătoarea axelor conicelor fasciculului tangențial este o curbă de clasa 3-a.

Înfășurătoarea dreptei F_1F_2 care unește două puncte isogonale cerute de enunțul problemei este deci *o curbă de clasa* 3-a *tangentă dreptei dela infinit* și care admite *următoarele tangente*: *dreapta* NEWTON-GAUSS, *diagonalele, bisectoarele unghiurilor patrulaterului* și *înălțimile triunghiului format de diagonale.*

d) *Cazuri particulare.* 1°. *Dreptele sunt paralele câte două.*

---

1) M. H. PIQUET: *Traité de géométrie analytique.* pag. 535.

In acest caz, locul punctelor F_1 şi F_2 cuprinde *dreapta dela infinit*, deoarece cubica are 4 puncte comune cu aceasta (punctele ciclice şi cele 2 vârfuri ale paralelogramului format de dreptele date).

In afară de dreapta dela infinit, cubica se reduce la *o conică*, circumscrisă paralelogramului. Conica având puncte la infinit (picioarele înălţimilor triunghiului format de diagonale) şi centrul în punctul de întâlnire al diagonalelor acestuia, este *hiperbolă*.

Punctele dela infinit ale hiperbolei sunt situate pe înălţimile triunghiului format de diagonale, care sunt bisectoarele unghiului format în O (punctul de întâlnire al diagonalelor) de paralele la laturile paralelogramului.

Asimptotele hiperbolei sunt deci paralele cu bisectoarele unghiurilor paralelogramului.

2° *Trei drepte sunt concurente.* Este evident că *orice punct al celei de-a* 4-a *drepte* satisface condiţiile problemei.

3° *Patrulaterul este dublu-circumscriptibil.* In acest caz *axa de simetrie a patrulaterului*, adică bisectoarea comună a două din unghiurile opuse, pe care se află centrele O_1 şi O_2 ale cercurilor înscrise în patrulater, face parte din loc, proiecţiile punctelor de pe ea formând trapeze isoscele.

Cubica lor se reduce deci la *axa de simetrie* O_1O_2 şi *o conică*.

Conica, trecând prin punctele ciclice, este un *cerc*, care trece prin O_1 şi O_2, puncte ce satisfac problemei şi are aceeaşi axă de simetrie O_1O_2, adică este cercul de diametru $\overline{O_1O_2}$.

Suntem în cazul problemei Nr. 6048 (G. M., vol. 4, pag. 167) care are deasemenea şi o demonstraţie directă.

Notă. Am propus problema 5880, pentru a îndruma pe corespondenţ într'un domeniu puţin cercetat în paginile revistei, acela al fascicolelor şi reţelelor de conice. O completare a ei se va face într'o notă viitoare.

PROBLEME PROPUSE

6511. Dacă D şi M sunt c. m. m. d. c. şi c. m. m. m. c. al numerelor N_1 şi N_2, iar S_1, S_2 sunt sumele divizorilor fiecăruia din aceste numere, să se găsească N_1 şi N_2 ştiind că

$$D = 24 \; ; \; M = 5040 \text{ şi } S_1 + S_2 = 2162.$$

VICTOR ŞERBĂNESCU.

6512. Să se determine toate soluțiile întregi ale ecuației diofantiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3t^2,$$

iar din rezultat să se deducă soluția generală în întregi a ecuației

$$u^2 + v^2 + w^2 = t(u + v + w).$$

M. GHERMĂNESCU.

6513. Dacă a_n și b_n sunt termenii de rang n ai unei progresii aritmetice și ai unei progresii geometrice, se cere condiția pe care trebue să o îndeplinească acele progresii, pentru ca seria cu termenul general

$$u_n = \frac{b_{n+1}^{a_{n+1}}}{b_n^{a_n}}$$

să fie convergentă. Să se găsească apoi suma seriei.

ANTON I. VARGĂ.

6514. Să se determine n astfel ca sistemul

$$a\sin 2x + b\cos 2x + 2 = 0,\quad a\sin 2y + b\cos 2y - 2n = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x & 0 \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & (1-n)\sec(x-y) \\ \cos(x+y) & -\sin(x+y) & (1+n)\operatorname{cosec}(x-y) \end{vmatrix} = \operatorname{tg}^{n+1} 2x + \operatorname{cotg}^{n+1} 2x,$$

să fie compatibil. Apoi să se rezolve.

MARIANA F. NEDELCU.

6515. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & 2ab & 2bc & 2ca \\ b^2 & c^2 & a^2 & 2bc & 2ca & 2ab \\ c^2 & a^2 & b^2 & 2ca & 2ab & 2bc \\ ab & bc & ca & ca+b^2 & ab+c^2 & bc+a^2 \\ bc & ca & ab & ab+c^2 & bc+a^2 & ca+b^2 \\ ca & ab & bc & bc+a^2 & ca+b^2 & ab+c^2 \end{vmatrix}$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6516. Se dă linia poligonală ABCD şi se notează cu B', C' mijloacele segmentelor AC, BD. Fie Δ_a, Δ_c paralelele duse prin A şi C la BB', iar Δ_b, Δ_d paralelele duse prin B şi D la CC'. Să se arate că punctele:

$$M \equiv (\Delta_a, \Delta_b) \; ; \; N \equiv (BB', CC') \; ; \; P \equiv (\Delta_c, \Delta_d)$$

sunt în linie dreaptă.

GH. D. SIMIONESCU.

6517. Se ştie că tangentele în punctele A, B, C la o conică circumscrisă triunghiului ABC întâlnesc laturile acestui triunghiu în trei puncte situate pe o dreaptă Δ. Să se arate că:

1°. Înfăşurătoarea dreptelor Δ, corespunzătoare hiperbolelor circumscrise triunghiului, este o elipsă tritangentă laturilor triunghiului şi având ortocentrul drept punct al lui GERGONNE.

2°. Polurile dreptei Δ în raport cu hiperbolele echilatere considerate se găsesc pe axa ortică a triunghiului ABC.

EM. E. MARINESCU.

6518. Să se găsească locul centrelor cercurilor tritangente laturilor triunghiului ABC, înscris în cercul (O), cunoscând poziţia vârfului A şi un punct fix prin care trece latura BC.

G-L GH. BUICLIU.

6519. Considerăm sferele S_1, S_2, S_3, S_4 având respectiv ca centre vârfurile tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$. Luăm un punct oarecare M şi determinăm trei sfere α_2, α_3, α_4 toate cu centrul în A_1, astfel ca fiecare din perechile de sfere (α_2, S_2), (α_3, S_3), (α_4, S_4) să aibă un plan radical trecând prin M. Fie a_2, a_3, a_4 razele sferelor α_2, α_3, α_4. Determinăm o nouă sferă σ_1 tot cu centrul în A_1, a cărei rază ρ_1 este dată de relaţia:

$$\rho_1^2 = k(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$$

k fiind o constantă. In mod analog şi întrebuinţând aceeaşi constantă k, determinăm sferele σ_2, σ_3, σ_4 cu centrele în A_2, A_3, A_4. Fie M_1 centrul radical al sferelor σ_1, σ_2, σ_3, σ_4. Să se demonstreze că transformarea $(M \to M_1)$ este o omotetie care pentru $k = \frac{1}{4}$ se reduce la transformarea identică.

E. ARGHIRIADE.

6520. Să se studieze cuadricile date de ecuația

$$[(a+b)^2-\lambda]x^2+(a^2-\lambda)y^2+(b^2-\lambda)z^2-2a(a+b)xy-$$
$$-2b(a+b)xz+2abyz+2ax+2by-2(a+b)z=0,$$

în care a și b sunt două numere date oarecare, iar λ un parametru variabil. Să se găsească ecuația cea mai simplă a acestor cuadrice, în toate cazurile.

O. N. ȚINO.

6521. Tangentele duse dintr'un punct P la conicele unui fascicol tangențial taie o dreaptă Δ în punctele M și N.

Perpendicularele în aceste puncte la PM, respectiv PN, se taie în Q.

1°. Să se arate că locul lui Q este o dreaptă δ, exterioară parabolei π de focar P și tangentă în vârf la Δ.

2°. Să se găsească înfășurătoarea perpendicularelor duse în M și N la PN, respectiv PM, precum și locul punctului R, de intersecție al acestor două perpendiculare.

PETRE P. TEODORESCU.

6522. Fie seria cu termenul general

$$u_n=\sqrt{3a_n^2+1}-a_n\sqrt{3},\quad \text{unde}\quad a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}$$

și $a_0=0\ ,\ a_1=1.$ Să se arate că:

1°. $\sqrt{3a_{n+1}^2+1}=4\sqrt{3a_n^2+1}-\sqrt{3a_{n-1}^2+1}.$

2°. Suma seriei $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\frac{1}{1+\sqrt{3}}.$

C. IONESCU-ȚIU.

6523. Se dă un cerc cu centrul în O. Printr'un punct P, situat în interiorul cercului, se duc coardele APB și CPD perpendiculare una pe alta. Fie E, F, H, I, L, M mijloacele coardelor AB, CD, AC, BD, CB, AD. Să se arate că segmentele de drepte EF, HI, LM și PO sunt concurente în mijlocul lor, într'un punct G, care reprezintă centrul de greutate a patru masse egale așezate în A, B, C și D. Să se găsească alte segmente de drepte, ce trec prin G, punct, care să le împartă în raportul 1 : 3.

ALEXANDRU STOENESCU.

6524. Printr'un punct M din planul unei parabole se duc cele trei normale MM', MM'', MM''' la parabolă şi se notează cu a, b, c lungimile razelor de curbură în punctele M', M'', M'''. Să se arate că:

1. Locul punctului M astfel ca

$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}} = constant,$$

este o dreaptă perpendiculară pe axa parabolei.

2. Locul punctului M astfel ca

$$(ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} = constant,$$

se compune din două drepte perpendiculare pe axa parabolei.

3. Locul punctului M astfel ca

$$a \,.\, b \,.\, c = constant,$$

este un cerc.

CEZAR COŞNIŢĂ.

6525. Considerăm ecuaţia diferenţială lineară

$$y'' + py' + qy = 0,$$

derivatele fiind luate în raport cu x; notăm

$$\rho = \frac{1}{2} p^2 - 2q + p'.$$

Să se arate că dacă facem o schimbare de funcţie şi de variabilă independentă

$$y = uz \quad , \quad t = t(x)$$

şi notăm cu $\overline{\rho}$ transformatul lui ρ, avem

$$\overline{\rho} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 . \rho - \{t\}$$

$\{t\}$ fiind schwarzianul lui t în raport cu x.

Aplicaţie pentru ecuaţia

$xy''' - y'' = 0$ şi transformarea $y = t^2 z \quad , \quad t = 3x.$

N. N. MIHĂILEANU.

ERATĂ. 1°. La problema 6494 ultimul cuvânt « *egale* » se înlocueşte prin « *neegale* ».

2°. La problema 6498 primul termen al seriei « $\frac{u_n}{n}$ » se înlocueşte prin « $\frac{u_n}{p}$ ».

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Adrian M. E. (6262); *Băghină V. V.* (6262); *Bucur A. N.* (6483, 503); *Constantinescu R. M.* (5436, 61, 5, 8, 70, 86, 97, P); *Cosma I. Gh.* (6391, 438, 71); *Crăciunescu E.* (P); *Deutsch Emeric* (6153, 365, 78); *Diaconescu C. Const.* (P); *Enescu G. G.* (4520. 6422, 4, 41, 61, 97, 501); *Gămănescu Şt.* (6262); *Hangan M. Th.* (6350, 4, 78, 95, 441); *Ionescu-Bujor C. Claudiu* (6485, 501, 2, 3); *Meriu C. Gh.* (6446, 64. 86); *Moraite Gh. Al.* (6262, 86, 341, 6, 54, 424, 9, 41, 74, 85); *Nicolescu C. I.* (6262); *Novac I. I.* (5969, 6394, 416, 22, 4, 6, 45, 61, 71, 83, 91, P); *Păunescu Şt. Gh.* (5942, 6379); *Petcu A. Val.* (6503); *Popa D. M.* (4104, 326, 93, 5795, 6288, 379, 98, 414, 8, 23, 8, 9, 32, 6, 54, 6, 60, 7, 84, 93, 508, P); *Ristea Gh. Gh.* (6314); *Schlomiuk H. Norberi* (6461, 71); *Şuta Mihai* (6416, 61); *Teleman A. Silviu* (6446); *Teodorescu P. P.* (6501, 2, 3, 4, 5); *Vargă Anton* (3412, 6497, 9, 503, 4, 5, 7); *Visarion A. V.* (4184, 99, 5678, 6296, 323, 65); *Wegener E. N.* (3287, 4084, 118, 705, 88, 93, 815, 909, 5506, 89, 625, 35, 742, 84, 6294).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate, cu preţul de 200 lei volumul pentru volumele I—XXV; 400 lei pentru volumele XXVI—L; 800 lei pentru volumele LI—LIII şi eventual numere izolate cu preţul de 20 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.270

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . Lei 230

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele şi ori-ce sume se pot trimite la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 13.314.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIV

NUMĂRUL 2. — OCTOMBRIE 1948

SUMARUL

1. Asupra determinantului Vandermonde . . *P. Boldescu*
2. Din proprietăţile patrupunctului . . . . *G-l Gh. I. Popescu*
3. Note matematice: 4—6.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 350.
7. Probleme rezolvate: 1735, 2284, 5367, 6007, 6297, 6322, 6326, 6395.
8. Probleme propuse: 6526—6540.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALA
1948

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie, compusă în prezent din d-nii: **G. G. Constantinescu,** Doctor în Matematici; **C. C. Teodorescu,** Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **General Gr. Zapan,** (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 25 Octombrie ora 17^{30}: In localul din Str. Răsuri Nr. 25, se va aduna materia pentru Nr. 3.

Luni 8 Noembrie ora 17^{30}: In Calea Griviţei 158. Facerea copertei Nr. 3 şi fixarea programului pentru concursul *Gazetei Matematice* din 1949.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1948 sunt indicate în tabla de materii a volumului LIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6511, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cursul mediu şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 150
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»* . . . . . „ 500

ASUPRA DETERMINANTULUI VANDERMONDE

In problema 6297 [1], d-l Ing. F. NEDELCU propune să se calculeze un determinant VANDERMONDE generalizat prin înlocuirea unei linii cu alta având exponenţi superiori celor ai ultimei linii. Soluţia acestei probleme a fost dată de d-l N. N. MIHĂILEANU într'un studiu publicat în revista *„Pozitiva"* (Anul II, Nr. 5—6). Folosind acest studiu, vrem să dăm soluţia unei probleme mai generale, care, schimbând, în vederea simplificării scrisului, liniile cu coloanele, se poate enunţa:

Să se calculeze valoarea unui determinant VANDERMONDE *de ordinul* n, *în care* p *coloane sunt înlocuite cu altele cuprinzând puteri superioare lui* $n-1$.

Studiul d-lui N. N. MIHĂILEANU fiind publicat într'o revistă care nu mai apare şi nu e la îndemâna tuturor cititorilor, şi pentru a introduce unele mici modificări de notaţie, utile pentru generalizarea ulterioară, socotim potrivit să reproducem, în prealabil, raţionamentul d-lui N. N. MIHĂILEANU.

I.

1. Fie

$$Q(x) \equiv x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_m$$

un polinom multiplu al polinomului

$$P(x) \equiv x_n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n .$$

Din identitatea

$$Q(x) = P(x) . (x^{m-n} + r_1 x^{m-n-1} + \ldots + r_{m-n})$$

deducem

$$\begin{aligned}
&p_1 + r_1 = q_1 \\
&p_2 + p_1 r_1 + r_2 = q_2 \\
&p_3 + p_2 r_1 + p_1 r_2 + r_3 = q_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&p_{m-n} + p_{m-n-1} r_1 + \ldots + r_{m-n} = q_{m-n} \\
&p_{m-n+1} + p_{m-n} r_1 + \ldots + p_1 r_{m-n} = q_{m-n+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&p_n r_{m-n} = q_m
\end{aligned} \qquad (1)$$

1) A se vedea soluţia la pag. 90 din acest număr.

k fiind un întreg mai mare ca $m—n$ şi considerând primele $m—n$ relaţii din (1), plus relaţia de rangul k, drept $m—n+1$ ecuaţii lineare admiţând soluţia $(1, r_1, \ldots, r_{m-n})$, deducem

$$\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \ldots . 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & 0 \ldots . 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 \ldots . 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{m-n} & p_{m-n-1} & \ldots\ldots & 1 \\ p_k & p_{k-1} & \ldots\ldots\ldots & p_{k-m+n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & 0 \ldots . 0 \\ q_2 & p_1 & 1 & 0 \ldots . 0 \\ q_3 & p_2 & p_1 & 1 \ldots . 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{m-n} & p_{m-n-1} & \ldots\ldots & 1 \\ q_k & p_{k-1} & \ldots\ldots\ldots & p_{k-m+n} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Dacă desvoltăm determinantul din partea dreaptă a egalităţii (2) după elementele primei coloane, cu o notaţie care se înţelege uşor, ea devine

$$\Delta_k^{m-n} = q_1 \Delta_{k-1}^{m-n-1} - q_2 \Delta_{k-2}^{m-n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-n+1} q_{m-n} \Delta_{k-m+n}^{0} + (-1)^{m-n} q_k \quad (3)$$

Indicii superiori, măriţi cu 1, marchează ordinul determinantului

$$\Delta_{k-m+n}^{0} = p_{k-m+n}$$

2. Să însemnăm acum

$$V_n = | 1 \; x \; x^2 \ldots x^{n-k_1} \ldots x^{n-1} | \quad (4)$$

şi

$$W_{n(k_1)}^{m_1} = | 1 \; x \; x^2 \ldots x^{m_1} \ldots x^{n-1} | \; , \quad (5)$$

(5) fiind obţinut din (4) prin înlocuirea coloanei cu x^{n-k_1} printr'o coloană cu x^{m_1} $(m_1 > n-1)$

Considerăm încă polinoamele

$$P(x) \equiv (x—x_1)(x—x_2) \ldots (x—x_n)$$
$$\equiv x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$$
$$Q(x) \equiv x^{m_1} + q_{m_1-n+1} x^{n-1} + q_{m_1-n+2} x^{n-2} + \ldots + q_{m_1} \; ,$$

x_i fiind elementele determinantului (4), iar $Q(x)$ multiplu al lui $P(x)$, ceeace este totdeauna posibil, numărul coeficienţilor nuli în $Q(x)$ fiind egal cu numărul rădăcinilor, de care putem dispune.

Din felul cum este alcătuit Q (x), urmează că avem egalităţile

$$q_{m_1} + x_1 q_{m_1-1} + x_1^2 q_{m_1-2} + \ldots + x_1^{n-1} q_{m_1-n+1} = -x_1^{m_1}$$
$$q_{m_1} + x_2 q_{m_1-1} + x_2^2 q_{m_1-2} + \ldots + x_2^{n-1} q_{m_1-n+1} = -x_2^{m_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_{m_1} + x_n q_{m_1-1} + x_n^2 q_{m_1-2} + \ldots + x_n^{n-1} q_{m_1-n+1} = -x_n^{m_1}$$

constituind un sistem linear, din care putem deduce

$$-q_{m_1-n+k_1} = \frac{W_{n(k_1)}^{m_1}}{V_n} \tag{6}$$

Pentru a avea pe $W_{n(k_1)}^{m_1}$ rămâne să exprimăm pe $q_{m_1-n+k_1}$ cu ajutorul funcţiilor simetrice fundamentale p_i de rădăcinile x_i. Aceasta se face prin relaţia (3). In cazul de care ne ocupăm, $q_1 = q_2 = \ldots = q_{m_1-n} = 0$ şi (3) se reduce la

$$(-1)^{m_1-n} q_k = \Delta_k^{m_1-n},$$

adică, făcând $k = m_1 - n + k_1$, la

$$(-1)^{m_1-n} q_{m_1-n+k_1} = \Delta_{m_1-n+k_1}^{m_1-n} \tag{7}$$

Din (6) şi (7) deducem

$$W_{n(k_1)}^{m_1} = (-1)^{m_1-n+1} V_n \Delta_{m_1-n+k_1}^{m_1-n} \tag{8}$$

Relaţia (8), datorită d-lui N. N. MIHĂILEANU, rezolvă problema propusă, în cazul înlocuirii unei singure coloane a determinantului VANDERMONDE.

Observăm că determinantul $\Delta_{m_1-n+k_1}^{m_1-n}$ se poate calcula printr'o relaţie de recurenţă, care se capătă din (3) prin înlocuirea lui q cu p:

$$\Delta_{m_1-n+k_1}^{m_1-n} = p_1 \Delta_{m_1-n+k_1-1}^{m_1-n-1} - p_2 \Delta_{m_1-n+k_1-2}^{m_1-n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m_1-n+1} p_{m_1-n} \Delta_{k_1}^{0} + (-1)^{m_1-n} p_{m_1-n+k_1} \tag{9}$$

II

1. Pentru generalizare demonstrăm mai întâi următoarea teoremă. *Fie*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots l_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n & b_n & c_n \ldots l_n \end{vmatrix}$$

şi $\alpha_i, \beta_i \ldots, \omega_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *p grupe de n numere.*

Dacă însemnăm cu D_k^{ε} *determinantul obținut prin înlocuirea, în* D, *a coloanei de rangul* k, *cu numerele* ε_i, *avem*

$$\begin{vmatrix} D_{k_1}^{\alpha} & D_{k_1}^{\beta} & \dots & D_{k_1}^{\omega} \\ D_{k_2}^{\alpha} & D_{k_2}^{\beta} & \dots & D_{k_2}^{\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{k_p}^{\alpha} & D_{k_p}^{\beta} & \dots & D_{k_p}^{\omega} \end{vmatrix} = D^{p-1} \cdot D_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{\alpha, \beta, \dots, \omega}, \qquad (10)$$

unde $D_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{\alpha, \beta, \dots, \omega}$ *este determinantul obținut din* D *prin înlocuirea coloanelor de rang* $k_1, k_2, \dots, k_p$, *respectiv, cu numerele* $\alpha_i, \beta_i, \dots, \omega_i$.

Pentru mai multă claritate luăm $n = 5, p = 3, k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 5$

Raționamentul este același în cazul general. Avem, pe de o parte,

$$\begin{vmatrix} D_2^{\alpha} & D_2^{\beta} & D_2^{\gamma} \\ D_3^{\alpha} & D_3^{\beta} & D_3^{\gamma} \\ D_5^{\alpha} & D_5^{\beta} & D_5^{\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma\alpha_i B_i & \Sigma\beta_i B_i & \Sigma\gamma_i B_i \\ \Sigma\alpha_i C_i & \Sigma\beta_i C_i & \Sigma\gamma_i C_i \\ \Sigma\alpha_i E_i & \Sigma\beta_i E_i & \Sigma\gamma_i E_i \end{vmatrix}, \qquad (11)$$

$A_i, B_i, \dots, E_i$, fiind *coeficienții* elementelor $a_i, b_i, \dots, e_i$, în determinantul D.

Pe de altă parte

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} D & \Sigma\alpha_i A_i & \Sigma\beta_i A_i & 0 & \Sigma\gamma_i A_i \\ 0 & \Sigma\alpha_i B_i & \Sigma\beta_i B_i & 0 & \Sigma\gamma_i B_i \\ 0 & \Sigma\alpha_i C_i & \Sigma\beta_i C_i & 0 & \Sigma\gamma_i C_i \\ 0 & \Sigma\alpha_i D_i & \Sigma\beta_i D_i & D & \Sigma\gamma_i D_i \\ 0 & \Sigma\alpha_i E_i & \Sigma\beta_i E_i & E & \Sigma\gamma_i E_i \end{vmatrix} \qquad (12)$$

$$= D^2 \begin{vmatrix} \Sigma\alpha_i B_i & \Sigma\beta_i B_i & \Sigma\gamma_i B_i \\ \Sigma\alpha_i C_i & \Sigma\beta_i C_i & \Sigma\gamma_i C_i \\ \Sigma\alpha_i E_i & \Sigma\beta_i E_i & \Sigma\gamma_i E_i \end{vmatrix}$$

Ţinând seama de valoarea cunoscută a determinantului adjunct, din compararea relaţiilor (11) şi (12), rezultă

$$D^4 \cdot D^{\alpha,\beta,\gamma}_{2,3,5} = D^2 \begin{vmatrix} D^\alpha_2 & D^\beta_2 & D^\gamma_2 \\ D^\alpha_3 & D^\beta_3 & D^\gamma_3 \\ D^\alpha_5 & D^\beta_5 & D^\gamma_5 \end{vmatrix} \qquad (13)$$

In cazul general (13) ia forma

$$D^{n-1} \cdot D^{\alpha,\beta,\ldots,\omega}_{k_1,k_2,\ldots,k_p} = D^{n-p} \cdot \begin{vmatrix} D^\alpha_{k_1} & D^\beta_{k_1} \ldots D^\omega_{k_1} \\ D^\alpha_{k_2} & D^\beta_{k_2} \ldots D^\omega_{k_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^\alpha_{k_p} & D^\beta_{k_p} \ldots D^\omega_{k_p} \end{vmatrix}$$

şi, prin simplificare cu D^{n-p}, forma

$$D^{p-1} \cdot D^{\alpha,\beta,\ldots,\omega}_{k_1,k_2,\ldots,k_p} = \begin{vmatrix} D^\alpha_{k_1} & D^\beta_{k_1} \ldots D^\omega_{k_1} \\ D^\alpha_{k_2} & D^\beta_{k_2} \ldots D^\omega_{k_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^\alpha_{k_p} & D^\beta_{k_p} \ldots D^\omega_{k_p} \end{vmatrix}$$

care este relaţia (10) din enunţul teoremei.

2. Aplicată la determinantul VANDERMONDE, teorema de mai sus dă

$$V_n^{p-1} \cdot W^{m_1,m_2,\ldots,m_p}_{n(k_1,k_2,\ldots,k_p)} = \begin{vmatrix} W^{m_1}_{n(k_1)} & W^{m_2}_{n(k_1)} \ldots W^{m_p}_{n(k_1)} \\ W^{m_1}_{n(k_2)} & W^{m_2}_{n(k_2)} \ldots W^{m_p}_{n(k_2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W^{m_1}_{n(k_p)} & W^{m_2}_{n(k_p)} \ldots W^{m_p}_{n(k_p)} \end{vmatrix} \qquad (14)$$

Conform însă cu (8),

$$W^{m_i}_{n(k_i)} = (-1)^{m_i-n+1} \; V_n \cdot \Delta^{m_i-n}_{m_i-n+k_i},$$

iar (14) devine

$$V_n^{p-1} \cdot W^{m_1,\ldots,m_p}_{n(k_1,\ldots,k_p)} = (-1)^{\sum m_i - p(n-1)} \cdot V_n^p \begin{vmatrix} \Delta^{m_1-n}_{m_1-n+k_1} & \Delta^{m_2-n}_{m_2-n+k_1} \ldots \Delta^{m_p-n}_{m_p-n+k_1} \\ \Delta^{m_1-n}_{m_1-n+k_2} & \Delta^{m_2-n}_{m_2-n+k_2} \ldots \Delta^{m_p-n}_{m_p-n+k_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{m_1-n}_{m_1-n+k_p} & \Delta^{m_2-n}_{m_2-n+k_p} \ldots \Delta^{m_p-n}_{m_p-n+k_p} \end{vmatrix}$$

Prin simplificare,

$$W^{m_1,\ldots,m_p}_{n(k_1,\ldots,k_p)} = (-1)^{\Sigma m_i - p(n-1)} \cdot V_n \begin{vmatrix} \Delta^{m_1-n}_{m_1-n+k_1} & \Delta^{m_2-n}_{m_2-n+k_1} \ldots \Delta^{m_p-n}_{m_p-n+k_1} \\ \Delta^{m_1-n}_{m_1-n+k_2} & \Delta^{m_2-n}_{m_2-n+k_2} \ldots \Delta^{m_p-n}_{m_p-n+k_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{m_1-n}_{m_1-n+k_p} & \Delta^{m_2-n}_{m_2-n+k_p} \ldots \Delta^{m_p-n}_{m_p-n+k_p} \end{vmatrix} \quad (15)$$

Relaţia (15) ne dă descompunerea în factori a determinantului VANDERMONDE generalizat.

Observare. Am indicat, pentru calculul determinanţilor $\Delta^{m_i-n}_{m_i-n+k_i}$, relaţia (9). Se poate proceda şi altfel.

Desvoltând determinantul din (2) după elementele ultimei linii obţinem

$$(-1)^{m-n}\Delta^{m-n}_k = p_k - p_{k-1}.p_i + p_{k-2}.\Delta^1_2 - p_{k-3}.\Delta^2_3 + \ldots \\ \ldots + (-1)^{m-n} p_{k-m+n}\Delta^{m-n-1}_{m-n}. \quad (16)$$

Pentru determinanţii de felul Δ^{r-1}_r cuprinşi în (16) se poate demonstra fără dificultate, cu ajutorul relaţiei (9), formula

$$\Delta^{r-1}_r = (-1)^{r+\Sigma\alpha} \sum \frac{(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} p_i^\alpha p_j^\beta \ldots p_l^\lambda, \quad (17)$$

în care $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ trebue să verifice relaţia de condiţie

$$i\alpha + j\beta + \ldots + l\lambda = r.$$

Exemplu.

$$W^{6,4}_{3(2,1)} = \begin{vmatrix} 1 & a^6 & a^4 \end{vmatrix} = (-1)^{10-2.2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta^3_5 & \Delta^1_3 \\ \Delta^3_4 & \Delta^1_2 \end{vmatrix}.$$

Relaţia (16) ne dă

$$-\Delta^3_5 = p_3\Delta^1_2 - p_2\Delta^2_3 \; ; \; -\Delta^1_3 = p_3 - p_2p_1$$

iar (17),

$$\Delta^3_4 = p_1^4 + p_2^2 + 2p_1p_3 - 3p_1^2p_2 \; ; \; \Delta^1_2 = p_1^2 - p_2 \; ; \; \Delta^2_3 = p_1^3 + p_3 - 2p_1p_2$$

$$\ldots \begin{vmatrix} \Delta^3_5 & \Delta^1_3 \\ \Delta^3_4 & \Delta^1_2 \end{vmatrix} = -2p_1^2p_2p_3 - p_2^2p_3 + 2p_1p_3^2 + p_1p_2^3$$

Cum $p_1 = -\Sigma a$, $p_2 = \Sigma ab$, $p_3 = -abc$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a^6 & a^4 \end{vmatrix} = -(a-b)(a-c)(b-c)\,[2abc.\Sigma ab.(\Sigma a)^2 + \\ + abc.(\Sigma ab)^2 - 2a^2b^2c^2.\Sigma a - (\Sigma ab)^3.\Sigma a].$$

PETRE BOLDESCU.

DIN PROPRIETĂȚILE PATRUPUNCTULUI

In patrupunctul ABCD, punctele e, f și g, formând triunghiul diagonal, sunt intersecțiile laturilor opuse BC cu AD, CA cu BD și AB cu CD; punctele k și l, m și n, p și q sunt mijloacele acestor laturi, iar kl, mn și pq sunt medianele patrupunctului.

1. Centrele conicelor circumscrise patrupunctului, sunt pe o *conică* (C), care trece prin e, f și g, centrele conicelor descompuse în laturile opuse și punctele k, l, m, n, p și q. Acestea împreună cu punctul dela infinit de pe laturi, sunt conjugate cu toate conicele fascicolului punctual ABCD.

Conica (C), trece prin ω, centrul iperbolei echilaterale H, a fascicolului.

Medianele kl, mn și pq, se taie în s, mijlocul lor comun, și centrul conicei (C).

Cercurile EULER kmp, lnp, etc., ale triunghiurilor ABC, ADB, etc., înscrise în iperbola echilaterală H, trec prin ω. Simetricele lor, cercurile lnq, kmq, etc., față de s, trec prin un punct R.

Punctul R, *este diametral opus, în conica* (C) *a centrului* ω, *față de* s.

Din patrulaterele inscriptibile ωpln și ωnkq și triunghiul gBD, se obțin relațiile

$$\sphericalangle p\omega q = 180^0 - \sphericalangle p\mathrm{BD} - \sphericalangle \mathrm{BD}g = \sphericalangle \mathrm{B}g\mathrm{D},$$

din care reese că,

$$\sphericalangle p\omega q = 180^0 - \sphericalangle pgq,$$

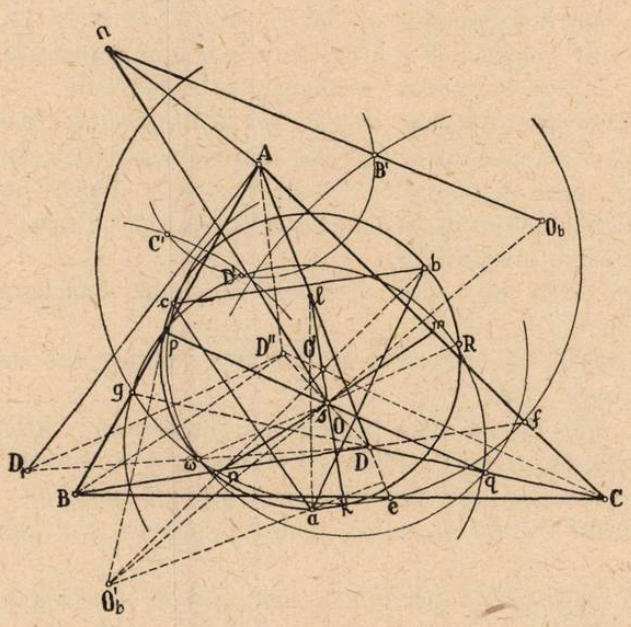
de unde se deduce că, *cercul* pgq, simetricul cercului ωpq, față de s și de mediana pq, *trece prin punctul* R.

Cercurile circumscrise triunghiurilor ekl, fmn *și* gpq, formate din laturile opuse și mediana lor, *concură în punctul* R[1]. Se regăsește problema 205 din G. M., vol. III pag. 136, propusă de F. DUBESSET.

---

1) *Gazeta Matematică*, Vol. LI, pag. 148 articolul d-lui Profesor D. BARBILIAN: « *Cea dintâi colaborare străină la G. M.* » unde se dau și alte proprietăți ale punctului R.

Punctul R, fiind pe conica C, este centrul unei conice, din fascicolul punctual ABCD şi în care concură *şapte cercuri*, indicate mai sus.



2. Patrupunctul ABCD, are trei figuri asociate: ABDC, BCDA şi CADB şi din fiecare, se formează câte trei patrulatere complete.

Din prima figură fac parte: A*g*D*f*BC, ABDC*fg* şi B*f*C*g*AD, care au în comun: laturile AB, BD, DC şi CA tangente la parabola P_a; diagonalele AD, BC şi *fg*; cele patru triunghiuri formate, în fiecare patrulater, de cele patru laturi.

In fiecare patrulater, dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse, sunt tangente la parabola P_a, fiindcă divid în părţi proporţionale laturile opuse.

In patrulaterul ABDC*fg*, *medianele mn şi pq*, sunt tangente la această parabolă, iar mediana *kl*, este paralelă cu axa ei.

Cum triunghiurile *fmn* şi *gpq*, sunt circumscrise parabolei P_a, cercurile *fmn* şi *gpq* trec prin focarul parabolei, iar *b* şi *c* ortocentrele triunghiurilor, se găsesc pe directoarea *bc*, a acestei parabole.

Considerând cele trei figuri asociate, rezultă că: *în fiecare din triunghiurile* ekl, fmn şi gpq, *sunt înscrise câte două, din parabolele* P_a, P_b *şi* P_c, *iar punctul* R, *este focarul comun a trei parabole înscrise câte una, în fiecare din aceste triunghiuri.*

— Cercurile *ekl, fmn* şi *gpq*, trec fiecare prin câte două focare, ale parabolelor P_a, P_b şi P_c;

— *Ortocentrele* a, b *şi* c, *ale triunghiurilor* ekl, fmn *şi* gpq, *sunt la intersecţiile directoarelor, acestor parabole.*

3. In triunghiul *pgq*, punctul C fiind ortocentru, unghiul *pgq*, este egal cu unghiul *pcq. Cercul* pcq *este simetricul cercului* gpqR, faţă de mediana *pq* şi *trece prin* ω, după cum s'a arătat la 1.

Astfel *cercurile* ωkl, ωmn *şi* ωpq, *trec prin ortocentrele* respective, *a, b* şi *c.*

Din triunghiurile *cωq, aωl* şi *lωq* şi patrulaterul *slDq*, se obţine:

$$\sphericalangle\, \omega ca = \sphericalangle\, lDq + \sphericalangle\, pqg - \sphericalangle\, kle = \sphericalangle\, lsq = 180^0 - abc$$

patrulaterul *ωcba* este inscriptibil şi deci, *cercul* abc *trece prin centrul* ω.

Conicele circumscrise patrupunctului ABCD, sunt conjugate triunghilui său diagonal *efg* şi cercul său circumscris, este *armonic circumscris* iperbolei echilatere H, şi *trece prin* ω.

Dreptele *ae, bf* şi *cg*, sunt paralele, cu laturile triunghiului *abc.*

Rezumând, prin punctul ω, *trec 13 cercuri, legate de patrupunctul* ABCD: *cercul triunghiului diagonal, cercul triunghiului ortocentrelor, cercurile* EULER *ale triunghiurilor patrupunctului, cercurile circumscrise triunghiurilor podare, ale vârfurilor patrupunctului şi cele trei cercuri, ce trec prin mijloacele laturilor opuse şi câte un ortocentru (*alk *etc.)*

4. Dacă punctul D″ este simetricul lui D, faţă de *s*, segmentele D″A, D″B şi D″C, sunt paralele şi egale cu medianele *kl, mn*, şi *pq* şi mai rezultă că, *triunghiurile* ABC *şi* abc *sunt ortologice, centrul de ortologie* pentru ABC, fiind *punctul* D″.

Se mai poate spune că, coordonatele polare absolute ale punctului D″, sunt egale cu medianele patrupunctului şi razele vectorii, respective, sunt paralele cu aceste mediane.

Se obţin astfel centrele ortologice A″, B″, C″ şi D″ ale celor patru triunghiuri ale patrupunctului ABCD, faţă de triunghiul lor ortologic, *abc.*

Dacă din mijloacele laturilor patrupunctului ABCD, se duc paralele, la laturile lor opuse, se obține tot patrupunctul A″B″C″D″, simetricul față de *s* al patrupunctului dat ABCD. In noul patrupunct, *conica* (C), *punctele* k *cu* l, m *cu* n, p *cu* q *și* ω *cu* R, *rămân comune* celor două patrupuncte, schimbând numai rolurile lor. De ex. R, este centrul iperbolei echilatere, din noul patrupunct.

5. Fie A′B′C′D′, isogonalele vârfurilor A, B, C și D, în triunghiurile respective, ale patrupunctului dat.

Punctul Ω, din care se văd sub același unghiu, cercurile circumscrise triunghiurilor patrupunctului ABCD, [1] este inversul comun al punctelor A′B′C′D′, față de cercurile de mai sus. Așa în triunghiul ABC, se are $\overline{OA}^2 = OD' \cdot O\Omega$, etc.

Fie A_1, B_1, C_1 și D_1, isogonalele punctului Ω, în cele patru triunghiuri ale patrupunctului ABCD. Vom arăta că aceste puncte sunt simetricele vârfurilor respective, ale patrupunctului ABCD, față de centrul ω.

In condițiile de mai sus, ținând seamă și de relația indicată, unghiurile OΩA și OΩB sunt respectiv egale, cu unghiurile OAD′ și OBD′, de unde rezultă că unghiurile ADB și AD_1B, sunt egale și conform unei proprietăți ale iperbolei echilatere, cum AB este o coardă în iperbola H, punctele D și D_1 sunt diametral opuse, adică simetrice față de ω. Se mai știe, făcând aceiași demonstrație că *punctele* D *și* D_1 sunt *puncte gemene* în triunghiul ABC, ghiului.

fiind la intersecția cercurilor simetrice, față de laturile triun-

Din triunghiurile asemenea Dω*s* și DD_1D'', se vede că *segmentul* $D''D_1$ *este egal și paralel cu segmentul* ωR, adică patrupunctul A, B, C, D, se obține prin o translație, a patrupunctului, A″B″C″D″.

6. Rămâne de găsit centrele de ortologie ale triunghiului *abc*, față de triunghiurile patrupunctului ABCD.

Dreptele *al* și *bn*, înălțimi în triunghiurile *ekl* și *fmn*, fiind perpendiculare pe BC și CA, intersecția lor, punctul O′, este centrul ortologic al triunghiului *abc* cu ABC. Punctul O′, este simetricul lui O, centrul cercului ABC, față de *s*.

---

1) A se vedea articolul d-lui ȘERBAN GHEORGHIU « *Asupra cercurilor de asemănare* », din G. M., vol. XLIX, pag. 329.

Dacă O_a, O_b şi O_c, sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor patrupunctului ABCD, centrele ortologice căutate, sunt vârfurile patrupunctului O', O'_a, O'_b şi O'_c, simetric faţă de s, cu patrupunctul format din centrele cercurilor patrupunctului dat.

Cazul de faţă este un exemplu, când un triunghiu, este ortologic cu patru triunghiuri date şi invers.

GENERAL GH. I. POPESCU.

NOTE MATEMATICE

4. *O rectificare.* In exerciţiul VII: 22 din „*Culegere de probleme de Algebră*", partea a II-a, de A. G. IOACHIMESCU (pag. 17), se cere să se afle derivata funcţiei:

$$y = \arcsin \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}}$$

iar la pag. 157 se dă soluţia

$$y' = \frac{-x\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)(a^2+b^2-2x^2)}}.$$

Această soluţie e însă greşită, adevărata soluţie fiind:

$$y' = \frac{-x\sqrt{b^2 - a^2}}{(b^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Obs. Eroarea mi-a fost semnalată de d-l FL. ŞTEFAN.

PETRE P. TEODORESCU.

5. *Rădăcinile raţionale ale unei ecuaţii algebrice.*

Fie $$\varphi(x) = Ax + B$$

un divizor al polinomului $f(x)$ cu coeficienţi numerele întregi A şi B.

Dacă α şi β sunt două numere întregi, punând

$$a = \varphi(\alpha) \quad \text{şi} \quad b = \varphi(\beta)$$

atunci a divide pe $f(\alpha)$, b divide pe $f(\beta)$ şi avem

$$A = \frac{b-a}{\beta-\alpha}, \quad B = \frac{a\beta - b\alpha}{\beta - \alpha},$$

deci $\beta - \alpha$ divide pe $b - a$ şi pe $a\beta - b\alpha$.

Rezultă că pentru a găsi rădăcinile raționale ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi

$$f(x) = 0,$$

vom alege arbitrar două numere întregi diferite α și β, vom lua toți divizorii a ai lui $f(\alpha)$ și divizorii b ai lui $f(\beta)$, vom forma toate diferențele $a - b$ și $a\beta - b\alpha$, înlăturând pe acelea nedivizibile cu $\beta - \alpha$.

Rădăcinile raționale se vor găsi printre fracțiile

$$\frac{a\beta - b\alpha}{a - b}$$

formate cu diferențele rămase.

Simplificând aceste fracții, vom păstra numai pe acelea al căror numărător și numitor divid respectiv termenul liber și coeficientul termenului de cel mai mare grad al ecuației.

Vom căuta, însfârșit, care dintre fracțiile rămase verifică ecuația dată.

Să luăm în particular $\alpha = -1$, $\beta = +1$. Rădăcinile raționale ale ecuației vor fi de forma

$$\frac{a+b}{a-b},$$

unde a și b $(a \neq b)$ sunt numere întregi de aceeași paritate (căci $\beta - \alpha = 2$), divizori respectivi ai lui

$$f(-1) \text{ și } f(+1), \quad [f(-1) \text{ și } f(+1) \neq 0].$$

Putem lua pentru a și b numai valori pozitive și să considerăm și inversele fracțiilor obținute, căci schimbând pe a în $-a$ sau b în $-b$ fracția de sus se inversează.

Ca exemplu numeric să luăm ecuația

$$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Avem $f(-1) = -36$, $f(+1) = 14$ și

$$a = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 \; ; \; b = 1, 2, 7, 14.$$

Luând valori de aceeași paritate, obținem grupele

$$a = 2, 4, 6, 12, 18, 36 \; ; \; b = 2, 14 \quad \text{și} \quad a = 1, 3, 9 \; ; \; b = 1, 7.$$

Simplificând numerele primei grupe cu 2, obţinem valorile

$$a = 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\ ;\quad b = 1,\ 7$$

printre care se găsesc şi numerele grupei a doua.

Avem deci de considerat fracţiile

$$\frac{a+b}{a-b} = -\frac{4}{3},\ 3, -\frac{9}{5},\ 2, -\frac{5}{2},\ \frac{7}{5},\ -13,\ \frac{5}{4},\ 8,\ \frac{19}{17},\ \frac{25}{11}$$

şi inversele lor

$$-\frac{3}{4},\ \frac{1}{3},\ -\frac{5}{9},\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{5},\ \frac{5}{7},\ -\frac{1}{13},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{8},\ \frac{17}{19},\ \frac{11}{25}.$$

Excluzând pe acelea ai căror numărători sau numitori nu divid respectiv ultimul şi primul coeficient al ecuaţiei, rămân de încercat în ecuaţie numerele

$$2,\ 3,\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{5}.$$

Obţinem ca rădăcini pe:

$$\frac{1}{3},\ -\frac{2}{5}.$$

RĂDUCANU GEORGESCU.

6. *Asupra ariei patrulaterului convex. Aria unui patrulater convex este echivalentă cu aria trapezului isoscel, obţinut prin proiectarea ortogonală a vârfurilor patrulaterului, pe cele două perpendiculare ridicate, — din mijloacele a două laturi opuse, — pe dreapta definită de acele mijloace.*

Această problemă cred că este cunoscută, deşi pusă sub această formă, nu am văzut-o în diferitele tratate uzuale, ce mi-au căzut în mână.

Problema enunţată, în felul arătat mai sus, are avantajul de a fi uşor aplicabilă patrulaterelor înfinitezimale.

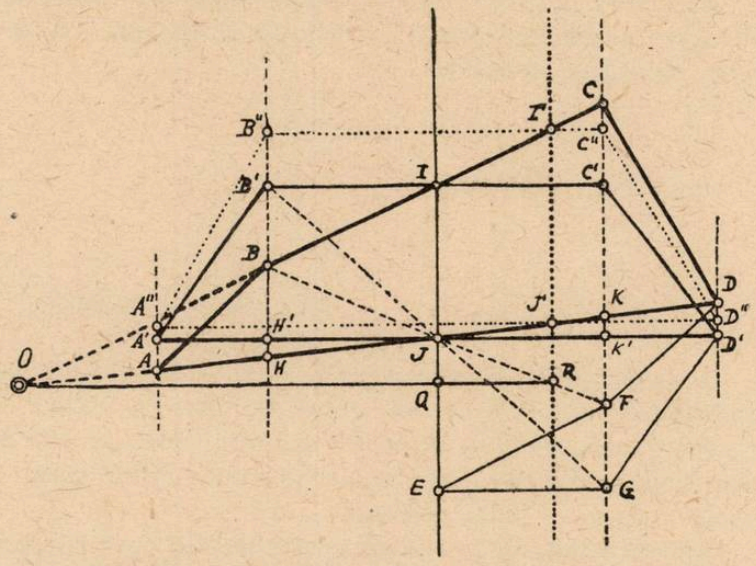
Fie un patrulater convex ABCD, ale cărui laturi BC şi AD, opuse una faţă de alta, se taie în punctul O. Fie I şi J mijloacele respective ale acestor două laturi.

Dacă în I şi J se ridică câte o perpendiculară pe dreapta IJ şi dacă pe aceste perpendiculare se proiectează ortogonal vârfurile patrulaterului, se obţine trapezul isoscel A'B'C'D'.

Vrem să demonstrăm că aria patrulaterului ABCD, este echivalentă cu aria trapezului isoscel A'B'C'D'.

1°. Fie E, F şi D, simetricele punctelor I, B şi A, faţă de punctul J.

Figura EFDJ este simetrica figurii IBAJ. De asemenea construim şi simetrica figurii IB'A'J faţă de acelaş punct J. Ea va fi EGD'J. Pentru a demonstra proprietatea ce ne interesează este de ajuns să arătăm că aria ICDFE, este echivalentă cu aria IC'D'GE. Dar aria ICDFE, se poate descompune în paralelogramul ICFE şi triunghiul CDF. De asemenea, aria IC'D'GE se descompune în dreptunghiul IC'GE si triunghiul C'D'G.



Observăm însă că paralelogramul ICFE şi dreptunghiul IC'GE au ariile egale ca având aceiaş bază comună IE şi aceiaşi înălţime IC'. La fel, observăm că şi triunghiurile CDF şi C'D'G, au ariile egale, ca având bazele CF şi C'G egale şi aceleaşi înălţimi.

Rezultă dar că aria patrulaterului ABCD este echivalentă cu aria trapezului isoscel A'B'C'D'.

2°. Aria patrulaterului dat ABCD, se poate însă descompune direct într'un trapez BCKH şi două triunghiuri ABH şi CDK, iar aria trapezului A'B'C'D', se descompune într'un dreptunghiu B'C'K'H' şi două triunghiuri A'B'H' şi C'D'K'.

Ori aria trapezului BCKH, este egală cu:

$$S = \frac{BH + CK}{2} \times B'C' = IJ \times B'C'$$

care este tocmai aria dreptunghiului B'C'K'H'.

Pe de altă parte, cele două triunghiuri ABH şi CDK însumate, sunt echivalente cu cele două triunghiuri A'B'H' şi C'D'K', însumate.

In adevăr:

$$\text{aria } ABH = \frac{1}{2} BH \times A'H' \quad ; \quad \text{aria } CDK = \frac{1}{2} CK \times D'K'$$

ori cum $A'H' = D'K'$, avem:

$$\text{aria } ABH + \text{aria } CDK = \frac{1}{2} BH \times A'H' + \frac{1}{2} CK + D'K'$$

$$= \frac{1}{2} A'H' \ (BH + CK) = A'H' \times IJ.$$

La fel:

$$\text{aria } A'B'H' + \text{aria } C'D'K' = \frac{1}{2} B'H' \times A'H' + \frac{1}{2} C'K' \times D'K'$$

$$= \frac{1}{2} A'H' \ (B'H' + C'K') = A'H' \times IJ.$$

Aşa dar şi pe această cale, am demonstrat că aria patrulaterului ABCD, este echivalentă cu aria trapezului isoscel A'B'C'D'.

Observare: Dacă am lua dreapta Δ paralelă cu IJ, care să taie laturile opuse ale patrulaterului BC şi AD în punctele I' şi J', atunci se formează trapezul A"B"C"D", (vezi fig. 1) care are bazele egale cu ale trapezului A'B'C'D', dar cu o înălţime I'J' diferită de IJ.

Avem deci:
$$\frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } A''B''C''D''} = \frac{IJ}{I'J'} = \frac{OQ}{OR} = \frac{\mu}{\nu}$$

$$\text{aria } ABCD = \frac{\mu}{\nu} \cdot \text{aria } A''B''C''D''.$$

M. NICOLAU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Politehnica din București. Secția de mine. Examenul de analiză. Iulie 1948

I. Să se integreze ecuația diferențială

$$(1-x^2)y' + xy = \frac{1}{x} + x\,\mathrm{L}\,x - x$$

și să se arate că integrala sa generală se prezintă sub două forme, una valabilă în intervalul (0, 1) și alta valabilă în intervalul $(1, +\infty)$.

II. Fiind dată funcțiunea

$$f(x, y) = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$$

în care x și y sunt variabile independente, se cere:

1°. Să se determine o funcțiune $g(x, y)$ depinzând de o constantă arbitrară C, astfel încât să avem simultan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}.$$

2°. Să se arate că funcțiunile $f(x, y)$ și $g(x, y)$ verifică relațiunea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3°. Dacă se notează prin z numărul complex $x + iy$ să se exprime în funcție de z, numărul complex $f + ig = \varphi(z)$, determinând constanta C astfel încât $g(x, 0) = 0$.

4°. Să se desvolte în serie întreagă după puterile crescătoare ale lui z, funcțiunea $z\varphi(z)$ determinându-se intervalul de existență al desvoltării.

III. Să se calculeze aria interioară curbei (Γ) definită prin ecuațiile parametrice

$$x = \frac{-2at}{(1+t^2)^2}, \quad y = \frac{a(t^2-1)t^2}{(1+t^2)^2}$$

utilizând o integrală curbilinie și schimbarea de variabilă $t = \mathrm{tg}\alpha$, cu $0 < \alpha < \pi$.

BIBLIOGRAFIE

Archives Internationale d'Histoire des Sciences. Tome XXVII. No. 4. Juillet 1948.

Boletin Mamteatico. Ano XXI. No. 2 (274). Julio de 1948.

Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky. Ročnik 73. Sešit 1. Praha 1948. V. JARNIK: On the main theorem of the MINKOWSKI geometry of numbers, V. JARNIK: On the successive minima of arbitrary sets. J. BILEK: Sur une involution du plan J_{11} de la deuxième classe. K. SITTE: A study on a contaminated cloud chamber. I. ŠIMON: Measurement of permeability and ferromagnetic resonance at microware frequencies.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVIII. 7 Septembrie 1928. C-pt C-dor C. V. COSTĂCHESCU: Generalizarea unei probleme de cinematică aeronavală. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

V. MARIAN—R. ŢIŢEICA. *Curs de fizică generală*, Vol. II [1]). Acustica şi Căldura. Cluj 1948. 196 pagini.

In volumul al doilea al cursului lor de fizică pentru studenţii anului I dela Facultatea de ştiinţe a Universităţii „V. BABEŞ" din Cluj, autorii tratează următorul material:

Capitolul I. *Vibraţii şi unde.* Problema acusticei. Vibraţiile (paragraf, în care, semnalăm, interesantul exemplu cu privire la oscilaţiile unui lichid într'un tub în formă de U, care lipseşte din manualele obişnuite de fizică). Oscilaţii amortizate şi forţate. Undele. (Acest ultim paragraf conţine o bună şi elementară demonstraţie a formulei lui NEWTON cu privire la viteza de propagare a undelor longitudinale).

Suntem de părere că la definiţia grupului de unde trebuia să se amintească faptul că acest grup de unde există şi la alte unde, nu numai la cele de suprafaţă. Formula vitezei grupului de unde este datorită lui R. RAYLEIGH, lucru care trebuia amintit.

Analiza efectului DOPPLER este superficială. Anume: lipseşte semnalarea faptului că propagarea undelor se face într'un anumit mediu, lucru care va ingreuia studenţilor înţelegerea teoriei relativităţii restrânse, căci în optică, problema mediului, a eterului, este de o importanţă capitală. Era deci bine dacă efectul DOPPLER se studia mai aprofundat.

Capitolul II studiază *vibraţiile corpurilor.* (Coarde, bare, plăci, membrane, tuburi, rezonatori).

Capitolul III se ocupă cu *studiul sunetelor.* Nimic neobişnuit.

Capitolul IV tratează *propagarea sunetelor în spaţii limitate.* Era mai bine dacă acest capitol era mai desvoltat, avându-se în vedere aplicaţiile sale practice (acustica sălilor, izolarea sonoră).

Capitolul V: *Ultracaustica* ne dă o documentată, deşi extrem de succintă, descriere a cuarţului piezoelectric.

In partea a doua a volumului, *capitolele VI—XI* ne redau materialul obişnuit al cursurilor de fizică cu privire la *căldură.*

Ca lucruri bine tratate trebue să amintim problema dilatării lichidelor, aceea a temperaturilor critice, principiul al doilea al termodinamicei, teoria cinetică a gazelor, propagarea căldurii.

In general, partea doua, deşi extrem de scurtă, este totuşi tratată într'un spirit modern, adecuat noilor motode de expunere ale fizicei generale. (Unele lipsuri se datoresc de sigur numărului redus de pagini pe care le-au avut la dispoziţie autorii).

---

1) Volumul I a fost recenzat la pag. 316, Vol. LII al acestei reviste.

Volumul II va face bune servicii acelora, care vor să cunoască temeinic aceste două capitole importante ale fizicei, de aceia îl recomandăm acelora dintre cititori noştri, care au nevoie de aceste cunoştinţe de bază.

Cursul cred că se poate procura la Institutul de fizică din Cluj, dar se vinde şi pe la librării.

T. VESCAN.

T. T. VESCAN. Problema determinismului fenomenelor fizice în lumina concepţiei marxist-leniniste. (Extras din *Analele Româno-Sovietice*, Nr. 11).

CERERI

350. In « *Exercices d'Algèbre* » par F. G M. VIII-e ed. page 914 este citată cartea « *Exercices de géométrie* » par F. I. C. Cine se ascunde sub aceste iniţiale?

P. P. TEODORESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1735. *Se dă polinomul*

$$P_{n_0}(x) = x^{n_0-1} + x^{n_0-2} + \ldots + x + 1.$$

Să se arate că dacă p *este un număr prim şi dacă punem:*

$$n_i = p^{k-i}, \quad Q_i(x) = x^{n_i(p-1)} + x^{n_i(p-2)} + \ldots + 1.$$

avem:

$$P_{n_0} = Q_1 . Q_2 . Q_3 \ldots Q_k$$

$Q_1, Q_2 \ldots Q_k$ *fiind prime între ele; să se arate în urmă că rădacinile unui polinom* Q_{i+1} *se exprimă raţional în raport cu rădăcinile polinomului* Q_i.

N. PRAPORGESCU

Se verifică că avem:

$$P_{n_0}(x) = \frac{x^{n_0}-1}{x-1} \quad \text{şi} \quad Q_i(x) = \frac{x^{n_i}-1}{x^{n_{i+1}}-1}$$

precum şi identitatea:

$$\frac{x^{n_0}-1}{x-1} = \frac{x^{n_0}-1}{x^{n_1}-1} \cdot \frac{x^{n_1}-1}{x^{n_2}-1} \cdots \frac{x^{n_{k-2}}}{x^{n_{k-1}}-1} \cdot \frac{x^{n_{k-1}}-1}{x^{n_k}-1}.$$

Rezultă astfel că avem identic [1]

$$P_{n_0} = Q_1 . Q_2 \ldots Q_k . \qquad (1)$$

Se demonstrează apoi [2] că ecuaţia $Q_i = 0$, care dă rădăcinile primitive ale ecuaţii $x^{n_i - 1} - 1 = 0$, este ireductibilă. Polinoamele $Q_1, Q_2, \ldots$ nu pot să aibă prin urmare nici un divizor, afară de ele înşele şi unitatea, ele sunt deci prime şi prime între ele. Relaţia (1) ne dă descompunerea în factori primi a polinomului P_{n_0}.

Ţinând seama apoi că

$$Q_{i+1}(x) = Q_i(x^p)$$

rezultă că rădăcinile polinomului Q_{i+1} sunt egale cu puterea p_a a rădăcinilor polinomului Q_i şi se exprimă astfel raţional faţă de acestea.

Proprietăţile precedente se menţin şi în cazul general pentru polinomul

$$P_n(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1,$$

în care $n = p^k . p'^{k'} \ldots$, $p, p', \ldots$ fiind numere prime, iar polinoamele Q au expresia:

$$Q(n) = \frac{P(n) . \Pi P(n_2) . \Pi P(n_4) \ldots}{\Pi P(n_1) . \Pi P(n_3) . \Pi P(n_5) \ldots} \qquad (2)$$

unde pentru scurtare s'a însemnat

$$P(n) = P_n(x) . (x - 1) = x^n - 1$$

şi $n_i = n : d_i$, d_i fiind un divizor al lui n cu i factori numere prime diferite de forma $p\,p' \ldots p^{(i-1)}$, iar $\Pi P(n_i)$ înseamnă produsul tuturor polinoamelor $P(n_i)$, d_i luând toate valorile divizorilor lui n cu i factori primi diferiţi inclusiv valoarea $p\,p'\,p'' \ldots$

Polinomul $Q(n)$ este de gradul

$$n - \Sigma n_1 + \Sigma n_2 + \ldots = \varphi(n) \qquad (3)$$

$\varphi(n)$ însumând numărul numerelor mai mici ca n şi prime cu el.

---

1) A se vedea soluţia problemei 1650 pag. 150, Vol. LII, G. M.

2) P. BACHMANN: *Die Lehre von der Kreistheilung*, pag. 33.

In adevăr, conform unei cunoscute teoreme din teoria numerelor [1] pentru $n' = p\,p' \ldots$ avem relaţia

$$n' - \Sigma \frac{n'}{p} + \Sigma \frac{n'}{pp'} - \ldots = \varphi(n')$$

şi din înmulţirea acesteia cu $p^{h-1} \cdot p'^{h'-1} \ldots$ se obţine relaţia (3).

Se demonstrează [2] că polinomul $Q(n)$ este ireductibil, are coeficienţi întregi şi rădăcinile lui sunt rădăcinile primitive ale ecuaţiei $P(n) = 0$. De fapt relaţia (2) este stabilită pentru $n = pp' \ldots$ se verifică însă uşor că ea este valabilă şi pentru cazul general $n = p^h \cdot p'^{h'} \ldots$ Pentru aceasta n'avem de cât să facem schimbarea $\overline{x^{pp'} \cdots} = X$.

Dacă $Q(n_i)$ inseamnă un polinom cu o expresie similară cu (2), cu deosebirea că n se înlocueşte prin n_i, între divizorii lui n_i considerându-se numai acei factori primi ai lui n care nu intră în compunerea lui d_i, se constată că $Q(n_i)$ se bucură de proprietăţi similare cu $Q(n)$ şi anume: el este ireductibil, are coeficienţi întregi şi rădăcinile lui sunt rădăcinile primitive ale polinomului $P(n_i)$, el este de gradul $\varphi(n_i)$.

Produsul

$$R(n) = Q(n)\ Q(n_1)\ Q(n_2) \ldots$$

ultimul factor fiind $Q\left(\frac{n}{p\,p'\,p'' \ldots}\right)$ este un polinom cu coeficienţi întregi de gradul

$$\varphi(n) + \varphi(n_1) + \varphi(n_2) + \ldots = n. \qquad (4)$$

In adevăr, conform unei cunoscute teoreme din teoria numerelor [3] pentru $n' = pp' \ldots$ avem relaţia:

$$\varphi(n') + \Sigma \varphi\left(\frac{n'}{p}\right) + \Sigma \varphi\left(\frac{n'}{pp' \ldots}\right) + \ldots = n',$$

din care prin înmulţirea cu $p^{h-1} \cdot p'^{h'-1} \ldots$ se obţine relaţia (4), de oarece

$$p^{h-1} \cdot p'^{h'-1} \ldots \varphi(pp' \ldots) = p^{h-1}(p-1) \cdot p'^{h'}(p'-1) \ldots = \varphi(p^h p'^{h'} \ldots).$$

---

1) P. BACHMANN: *Die Lehre von der Kreisth.* p. 11.
2) P. BACHMANN: *Die Lehre von der Kreisth.* p. 37.
3) BACHMANN, loc cit. pag. 11.

Ţinând seama apoi de expresia polinoamelor Q se deduce că avem $R(n) \equiv P(n)$, ceilalţi factori dela numărător şi numitor reducându-se doi câte doi.

Se obţine astfel descompunerea în factori primi a polinomului $P_n(x)$

$$P_n(x) = Q(n) \cdot Q(n_1).$$

Dacă presupunem că divizorii d_i sunt aşezaţi în ordinea lor crescătoare şi că $d_{i+1} = p^{(i)} \cdot d_i$, dacă punem $Q_i(x) = Q(n_i)$ avem

$$Q_{i+1}(x) = Q_i\left(x^{p^{(i)}}\right)$$

şi deci rădăcinile polinomului Q_{i+1} se exprimă raţional faţă de rădăcinile polinomului Q , de oarece ele sunt egale cu puterea $p^{(i)}$ a rădăcinilor lui Q .

Pentru alte proprietăţi ale rădăcinilor polinomului Q_i a se vedea soluţia problemei 1650, rezolvată la pag. 150, Vol. LII.

N. PRAPORGESCU.

D-l I. V. MĂTIEŞ a trimis la 18 Martie 1939 o foarte bună şi completă soluţie analoagă cu precedenta.

PROBLEMA 2284. *Dacă* p *este un număr par, să se arate că avem identitatea*

$$2^{p^n} - 1 = M\left[(2+1)\,(2^2+1)\ldots(2^n+1)\right]$$

n *fiind de forma* $2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot 2}}}}}$

C. AL. CALMUSCHI.

Să notăm

$$(2)_2 = 2^2,\ (2)_3 = 2^{(2)_2},\ \ldots\ (2)_k = 2^{(2)_{k-1}}.$$

Avem succesiv

$$x^{2^{(2)_k}} - 1 = \left(x^{2^{(2)_k - 1}} - 1\right)\left(x^{2^{(2)_k - 1}} + 1\right)$$

$$x^{2^{(2)_k - 1}} - 1 = \left(x^{2^{(2)_k - 2}} - 1\right)\left(x^{2^{(2)_k - 2}} + 1\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{2^{2-1}} - 1 = (x-1)\,(x+1).$$

Inmulţind membru cu membru şi simplificând avem

$$x^{2^{(2)_k}} - 1 = (x^{2^{(2)_k - 1}} + 1)(x^{2^{(2)_k - 2}} + 1) \ldots (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1).$$

Dacă $p = 2q$ şi $n = (2)_k$ atunci

$$x^{p^{(2)_k}} - 1 = M(x^{2^{(2)_k}} - 1) =$$

$$= M[(x^{2^{(2)_k - 1}} + 1)(x^{2^{(2)_k - 2}} + 1) \ldots (x^2 + 1)(x + 1)].$$

Relaţia precedentă nu numai că generalizează pe cea propusă, dar o completează şi o face mai precisă în acelaşi timp. Pentru $x = 2$, cădem în cazul dela care a plecat autorul problemei 2284.

Problema a fost rezolvată în cursul apariţiei volumelor XXI şi XXIV de d-nii: N. MAXIM, AL. PANTAZI şi V. PINTILESCU.

PROBLEMA 5367. *Se consideră iperbolele echilatere cu aceleaşi direcţii asimptotice, circumscrise celor patru triunghiuri formate de laturile unui patrulater.*

1°. *Iperbolele echilatere au un punct comun P.*

2°. *Locul lui P, când direcţia asimptotelor variază, este ortocentroidala patrulaterului.*

I. A. ILIE.

Ne bazăm pe următoarele proprietăţi:

1. Două iperbole cu aceleaşi direcţii asimptotice au, la distanţă finită, două puncte comune reale sau niciunul. Aceasta pentrucă două conice se taie în 4 punte (reale sau imaginare), dar iperbolele au două puncte comune la infinit pe direcţiile asimptotelor.

2°. Dacă prin punctul A, comun la două iperbole echilatere, cu aceleaşi direcţii asimptotice, se duc două secante care taie pe una din ele în B, C şi pe cealaltă în B', C', atunci dreapta ortocentrelor triunghiurilor ABC şi AB'C' trece prin al doilea punct comun iperbolelor.

Dau o soluţie analitică acestei proprietăţi.

Fie $xy - ax - by = 0$ şi $xy - a'x - b'y = 0$

ecuaţiile celor două iperbole echilatere cu asimptotele paralele axelor de coordonate şi având *origina* ca punct comun.

Fie apoi $y = \alpha y$ şi $y = \beta x$

ecuaţiile celor două secante duse prin origină. Punctele unde prima secantă taie cele două iperbole sunt:

$$B\left(\frac{a+b\alpha}{\alpha}, a+b\alpha\right); \quad B'\left(\frac{a'+b'\alpha}{\alpha}, a'+b'\alpha\right)$$

A doua secantă taie iperbolele în punctele:

$$C\left(\frac{a+b\beta}{\beta}, a+b\beta\right); \quad C'\left(\frac{a'+b'\beta}{\beta}, a'+b'\beta\right).$$

Ortocentrele celor două triunghiuri sunt:

$$H\left[b(1+\alpha\beta), a\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)\right]; \quad H'\left[b'(1+\alpha\beta), a'\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)\right].$$

(Se verifică imediat că fiecare ortocentru se află pe iperbola corespunzătoare).

Dreapta HH' are ecuaţia:

$$(a'-a)x - \alpha\beta(b'-b)y + (1+\alpha\beta)(ab'-a'b) = 0$$

care se vede că trece prin punctul

$$x = \frac{ab'-a'b}{a-a'}; \quad y = -\frac{ab'-a'b}{b-b'}$$

care este al doilea punct de intersecţie al iperbolelor.

3. Ortocentrele celor 4 triunghiuri formate de laturile unui patrulater sunt colineare (*ortocentroidala* patrulaterului).

Trecem acum la problema propusă. Fie patrulaterul complet ABCDEF. Dreapta ortocentrelor celor două iperbole echilatere circumscrise triunghiurilor ADF şi ABE (A comun), trece prin al doilea punct P de intersecţie al acestor iperbole.

Considerăm iperbolele circumscrise triunghiurilor ADF şi FBC (F comun). Ele au un al doilea punct P' de intersecţie, care se află pe linia ortocentrelor, deci pe ortocentroidală. Insă P şi P' trebue să se confunde căci altfel ar urma ca ortocentroidala să taie iperbola ADE în trei puncte: P, P' şi ortocentrul H al triunghiului ADE.

Analog se arată că şi iperbola circumscrisă triunghiului CDE trece prin P.

Când direcţiile asimptotice variază punctul P descrie evident ortocentroidala.

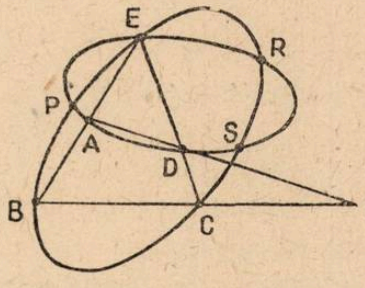
PAUL P. DRĂGHICESCU.

Soluția autorului: Să demonstrăm întâi următoarea teoremă: *Cele patru conice circumscrise celor patru triunghiuri formate de laturile unui patrulater și care mai trec prin două puncte date R și S, au încă un punct comun.*

Fie ABCD patrulaterul dat, apoi E≡(AB, CD) și F≡(BC, DA). Se cunoaște următoarea teoremă asupra cubicelor, numită și *teorema celui de al nouălea punct*[1]).

Prin opt puncte date, din care șapte nu sunt pe o conică și nici patru pe o aceeași dreaptă, trece o infinitate de cubice care au un al nouălea punct comun.

Observăm că vârfurile patrulaterului complet, împreună cu punctele date R și S, fac opt puncte. Să numim cu $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ conicele care trec prin R și S și care sunt circumscrise respectiv triunghiurilor ADE, BCE, ABF, CDF. Următoarele cubice formate din câte o conică și o dreaptă:



$\Gamma_1.(BC)$; $\Gamma_2.(AD)$;
$\Gamma_3.(CD)$; $\Gamma_4.(AB)$

trec toate prin cele opt puncte fixe, deci mai au, conform teoremei de mai sus, *un al doilea punct comun.*

Cum cele patru drepte AB, BC, CD, DA nu sunt concurente, rezultă că acest punct este comun celor patru conice.

Dacă particularizăm punctele R *și* S *luându-le în punctele ciclice ale planului, conicele* Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, *devin cercuri și căpătăm teorema lui* MICHEL.

Trecem acum la problema propusă.

1°. Să presupunem că R și S se găsesc pe dreapta dela infinit, definind două direcții perpendiculare. Conicele Γ_i devin iperbole echilatere și conform teoremei generale au un punct comun P.

2°. Deoarece există o conică Γ_i circumscrisă triunghiurilor ADE și PRS, există și o conică înscrisă lor, după o teoremă cunoscută. Dar o conică este determinată de cinci tangente, pe care le vom lua astfel: AE, DE și laturile triunghiului PRS.

---

1) CHARLES MICHEL: *Compléments de Géométrie moderne*, pag. 103.

Acelaşi lucru se poate spune despre triunghiurile ACE şi PRS, iar conica înscrisă lor este determinată de aceleaşi *cinci* tangente, deci se confundă cu conica înscrisă triunghiurilor ADE şi PRS. Dar conica înscrisă acestor două din urmă triunghiuri o putem privi ca determinată de tangentele AD, DE şi laturile lui PRS, ceeace dovedeşte că este identică şi cu conica înscrisă triunghiurilor CDF şi PRS.

Continuând astfel ajungem la concluzia că există o conică (Γ) tangentă deodată celor *şapte drepte* formate de laturile patrulaterului ABCD şi laturile triunghiului PRS.

Când dreapta RS este aruncată la infinit această conică devine o parabolă. Focarul său trebue să se afle pe fiecare cerc circumscris triunghiurilor formate de laturile patrulaterului ABCD, este deci chiar punctul lui Miquel.

Dreptele PR şi PS sunt în acelaşi timp tangente parabolei (Γ) înscrisă şi direcţii asimptotice pentru conicele $\Gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ circumscrise triunghiurilor formate de laturile lui ABCD. Când Γ_i sunt iperbole echilatere, direcţiile asimptotice sunt perpendiculare iar punctul P este intersecţia a doua tangente perpendiculare ale parabolei Γ, deci se află pe *directoarea* sa, care este chiar dreapta ortocentrelor. Când direcţiile asimptotice variază, P descrie deci această ortocentroidală.

O bună soluţie geometrică s'a primit şi de la d-l M. D. POPA (student Politehnică, Bucureşti).

G. D. S.

PROBLEMA 6007. *Dacă* p_i *unde* $i = 1, 2, \ldots n$, *reprezintă primele n numere prime şi dacă* $p > 7$ *atunci avem*

$$p_{n+1} > 2(n+1)$$

unde p_{n+1} *este numărul prim imediat superior lui* p_n.

C-DOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de d-nii: I. A. BARBU şi GH. GH. VRÂNCEANU.

In *Suplimentul cu Exerciţii*, Vol. XI, pag. 40 s'a demonstrat, pentru aceleaşi notaţii, că

$$p_{n+k} > in + 2k.$$

Făcând $i = 2$ şi $k = 1$ se găseşte proprietatea din enunţ.

Au rezolvat problema prin inducție d-nii: GH. A. GRIGORE, GH. D. BRAȘOVEANU, M. R. CONSTANTINESCU, GEORGE ENESCU.

D-l C. BERDAN s'a folosit în soluția sa de tabloul numerelor prime din *Tables du Logarithmes* de J. DUPUIS.

PROBLEMA 6297 [1]. *Să se calculeze determinantul:*

$$\Delta_{k,\,i,\,\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ \vdots & & & \\ a_1^{i-2} & a_2^{i-2} & \dots & a_k^{i-2} \\ a_1^{i} & a_2^{i} & \dots & a_k^{i} \\ \vdots & & & \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \dots & a_k^{k-1} \\ a_1^{k+\alpha} & a_2^{k+\alpha} & \dots & a_k^{k+\alpha} \end{vmatrix}$$

obținut din determinantul VANDERMONDE *prin suprimarea liniei de rang* i *și adăogirea liniei de un rang superior ultimei linii.*

ING. F. NEDELCU.

1. *Cazul* $\Delta_{k,\,1,\,0}$. Insemnând cu Δ_k determinantul VANDERMONDE, avem

$$\Delta_{k,\,1,\,0} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_k \\ a_1^2 & a_2^2 \dots a_k^2 \\ \vdots & \\ a_1^k & a_2^k \dots a_k^k \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_k \Delta_k .$$

2°. *Să calculăm acum* $\Delta_{k,\,i,\,0}$. Punem:

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k) = x^k - m_1 x^{k-1} + m_2 x^{k-2} - m_3 x^{k-3} \dots$$
$$\dots + (-1)^{k-1} m_{k-1} x + (-1)^k m_k ,$$
$$\therefore \; -(-1)^k m_k - (-1)^{k-1} m_{k-1} x - \dots - (-1)^{k-(i-1)} m_{k-(i-1)} x^{i-1} -$$
$$-(-1)^2 m_2 x^{k-2} - (-1)^1 m_1 x^{k-1} = x^k - (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)$$

Insemnând:

$$R_1 = -(-1)^k m_k \;,\; R_2 = -(-1)^{k-1} m_{k-1} \,,\; \dots\; R_i = -(-1)^{k-(i-1)} m_{k-(i-1)} \,,$$
$$R_{k-1} = -(-1)^2 m_2 \;,\; R_k = -(-1)^1 m_1 ,$$

ecuația devine:

$$R_1 + R_2 x + \dots + R_i x^{i-1} + \dots + R_{k-1} x^{k-2} + R_k x^{k-1} =$$
$$= x^k - (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k).$$

---

1) A se vedea articolul dela pag. 65 din acest număr.

Inlocuind succesiv pe x prin $a_1, a_2, \ldots a_k$ obţinem:

$$R_1 + R_2 a_1 + \ldots + R_{i-1} a_1^{i-2} + R\, a_1^{i-1} + R_{i+1} a_1^{i} + \ldots + R_k a_1^{k-1} = a_1^k$$
$$R_1 + R_2 a_2 + \ldots + R_{i-1} a_2^{i-2} + R_i a_2^{i-1} + R_{i+1} a_2^{i} + \ldots + R_k a_2^{k-1} = a_2^k$$
$$\vdots$$
$$R_1 + R_2 a_k + \ldots + R_{i-1} a_k^{i-2} + R_i a_k^{i-1} + R_{i+1} a_k^{i} + \ldots + R_k a_k^{k-1} = a_k^k$$

$$\therefore\ R_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 \ldots a_1^{i-2} & a_1^k & a_1^i \ldots a_1^{k-1} \\ 1 & a_2 \ldots a_2^{i-2} & a_2^k & a_2^i \ldots a_2^{k-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & a_k \ldots a_k^{i-2} & a_k^k & a_k^i \ldots a_k^{k-1} \end{vmatrix}}{\Delta_k} =$$

$$= (-1)^{k-i} \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 \ldots a_1^{i-2} & a_1^i \ldots a_1^{k-1} & a_1^k \\ 1 & a_2 \ldots a_2^{i-2} & a_2^i \ldots a_2^{k-1} & a_2^k \\ \vdots & & & \\ 1 & a_k \ldots a_k^{i-2} & a_k^i \ldots a_k^{k-1} & a_k^k \end{vmatrix}}{\Delta_k}.$$

Trecând coloanele în linii această relaţie devine, ţinând seamă de notaţiile de mai sus:

$$R_i = (-1)^{k-i} \frac{\Delta_{k,\,i,\,0}}{\Delta_k} = -(-1)^{k-(i-1)}\, m_{k-(i-1)}$$

$$\therefore\quad \Delta_{k,\,i,\,0} = m_{k-(i-1)}\, \Delta_k = \Sigma\, a_1\, a_2 \ldots a_{k-i+1}\, \Delta_k.$$

In cazul $i=1$ obţinem valoarea de la 1°.

$$\Delta_{k,\,1,\,0} = m_k\, \Delta_k = a_1\, a_2 \ldots a_k\, \Delta_k.$$

3°. *Trecem la cazul* $\Delta_{k,\,i,\,1}$. Punând iarăşi:

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k) = x^k - m_1 x^{k-1} + m_2 x^{k-2} + \ldots + (-1)^k m_k$$

efectuând împărţirea:

$$(x^{k+1} - 1) : [x^k - m_1 x^{k-1} + m_2 x^{k-2} - \ldots + (-1)^k m_k]$$

obţinem:

$$x^{k+1} - 1 = (x + m_1)\, [(x - a_1)\, (x - a_2) \ldots (x - a_k)] +$$
$$+ R_1 + R_2 x + \ldots + R_i x^{i-1} + \ldots + R_{k-1} x^{k-2} + R_k x^{k-1}, \quad (1)$$

unde:

$$R_i = (-1)^{k-(i-2)} [m_1\, m_{k-(i-1)} - m_{k-(i-2)}]$$
$$R_1 = (-1)^{k+1}\, m_1\, m_k - 1.$$

In (1) facem succesiv $x = a_1$, $a_2 \ldots a^k$ şi obţinem:

$$R_1+R_2 a_1+\ldots+R_{i-1} a_1^{i-2}+R_i a_1^{i-1}+R_{i+1} a_1^{i}+\ldots+R_{k-1} a_1^{k-2}+R_k a_1^{k-1}=a_1^{k+1}-1$$

$$R_1+R_2 a_2+\ldots+R_{i-1} a_2^{i-2}+R_i a_2^{i-1}+R_{i+1} a_2+\ldots+R_{k-1} a_2^{k-2}+R_k a_2^{k-1}=a_2^{k+1}-1$$

$$\vdots$$

$$R_1+R_2 a_k+\ldots+R_{i-1} a_k^{i-2}+R_i a_k^{i-1}+R_{i+1} a_k^{i}+\ldots+R_{k-1} a_k^{k-2}+R_k a_k^{k-1}=a_k^{k+1}-1$$

De unde scoatem:

$$R_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 \ldots a_1^{i-2} & a_1^{k+1}-1 & a_1^{i} \ldots a_1^{k-2} & a_1^{k-1} \\ 1 & a_2 \ldots a_2^{i-2} & a_2^{k+1}-1 & a_2^{i} \ldots a_2^{k-2} & a_k^{k-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_k \ldots a_k^{i-2} & a_k^{k+1}-1 & a_k^{i} \ldots a_k^{k-2} & a_k^{k-1} \end{vmatrix}}{\Delta_k}$$

Adunând coloana I la coloana i şi apoi trecând această coloană la urmă obţinem:

$$R = (-1)^{k-i} \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 \ldots a_1^{i-2} & a_1^{i} \ldots a_1^{k-1} & a_1^{k+1} \\ 1 & a_2 \ldots a_2^{i-2} & a_2^{i} \ldots a_2^{k-1} & a_2^{k+1} \\ \vdots & & & \\ 1 & a_k \ldots a_k^{i-2} & a_k^{i} \ldots a_k^{k-1} & a_k^{k+1} \end{vmatrix}}{\Delta_k}.$$

Trecând coloanele în linii obţinem, ţinând seamă de notaţiile puse:

$$R_i = \frac{(-1)^{k-i}\Delta_{k\ i,1}}{\Delta_k} = (-1)^{k-(i-2)}\left[m_1 m_{k-(i-1)} - m_{k-(i-2)}\right]$$

$$\therefore \Delta_{k,\,i,1} = \left[m_1 m_{k-(i-1)} - m_{k-(i-2)}\right]\Delta_k$$

$$= \left[(\Sigma a_1)(\Sigma a_1 a_2 \ldots a_{k-i+1}) - \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{k-i+2}\right]\Delta_k,$$

relaţie valabilă pentru $2 \leqslant i \leqslant k$.

4°. *Cazul* $\Delta_{k,\,1,\,1}$. Din împărţirea de la 3° avem:

$$R_1 = (-1)^{k+1} m_1 m_k - 1,$$

iar din sistemul de ecuaţii avem:

$$R_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1^{k+1}-1 & a_1 & a_1^2 \ldots a_1^{k-1} \\ a_2^{k+1}-1 & a_2 & a_2^2 \ldots a_2^{k-1} \\ \vdots & & \\ a_k^{k+1}-1 & a_k & a_k^2 \ldots a_k^{k-1} \end{vmatrix}}{\Delta_k} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}\Delta_{k,\,1,\,1} - \Delta_k}{\Delta_k} = \frac{(-1)^{k-1}\Delta_{k,\,1,\,1}}{\Delta_k} - 1.$$

Egalând aceste două valori ale lui R_1 obținem:

$$\Delta_{k,\,1,\,1} = m_1 m_k \Delta_k = a_1 a_2 \ldots a_k (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \Delta_k .$$

5°. *Cazul general* $\Delta_{k,\,i,\,\alpha}$. Pentru ușurință voi calcula mai întâi pe $\Delta_{k,\,i,\,\alpha+1}$.

Punând iarăși:

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k) = x^k - m_1 x^{k-1} + m_2 x^{k-2} \ldots + (-1)^k m_k$$

și efectuând împărțirea

$$(x^{k+\alpha+1} - 1) : [x^k - m_1 x^{k-1} + m_2 x^{k-2} + \ldots + (-1)^k m_k]$$

obținem:

$$x^{k+\alpha+1} - 1 = (x^{\alpha+1} + u_1 x^\alpha + \ldots + u_\alpha x + u_{\alpha+1}) \times$$
$$\times [(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)] + R_1 + \qquad (2)$$
$$+ R_2 x + \ldots + R_i x^{i-1} + \ldots + R_{k-1} x^{k-2} + R_k x^{k-1} .$$

unde:

$$R_i = -(-1)^{k-i+1} [m_{k-i+1} u_{\alpha+1} - m_{k-i+2} u_\alpha + m_{k-i+3} u_{\alpha-1} - \ldots]$$
$$R_1 = -(-1)^k m_k u_{\alpha+1} - 1. \qquad (3)$$

In (2) facem succesiv $x = a_1, a_2 \ldots a_k$ și obținem:

$$R_1 + R_2 a_1 + \ldots + R_{i-1} a_1^{i-2} + R_i a_1^{i-1} + R_{i+1} a_1^i + \ldots + R_k a_1^{k-1} = a_1^{k+\alpha+1} - 1$$
$$R_1 + R_2 a_2 + \ldots + R_{i-1} a_2^{i-2} + R_i a_2^{i-1} + R_{i+1} a_2^i + \ldots + R_k a_2^{k-1} = a_2^{k+\alpha+1} - 1$$
$$\vdots$$
$$R_1 + R_2 a_k + \ldots + R_{i-1} a_k^{i-2} + R_i a_k^{i-1} + R_{i+1} a_k^i + \ldots + R_k a_k^{k-1} = a_k^{k+\alpha+1} - 1$$

De unde scoatem:

$$\therefore R_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 \ldots a_1^{i-2} & a_1^{k+\alpha+1} - 1 & a_1^i \ldots a_1^{k-1} \\ 1 & a_2 \ldots a_2^{i-2} & a_2^{k+\alpha+1} - 1 & a_2^i \ldots a_2^{k-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & a_k \ldots a_k^{i-2} & a_k^{k+\alpha+1} - 1 & a_k^i \ldots a_k^{k-1} \end{vmatrix}}{\Delta_k}$$

Adunând coloana I la coloana i și apoi trecând această coloană la urmă obținem:

$$R_i = (1)^{k-i} \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 \ldots a_1^{i-2} & a_1^i \ldots a_1^{k-1} & a_1^{k+\alpha+1} \\ 1 & a_2 \ldots a_2^{i-2} & a_2^i \ldots a_2^{k-1} & a_2^{k+\alpha+1} \\ \vdots & & & \\ 1 & a_k \ldots a_k^{i-2} & a_k^i \ldots a_k^{k-1} & a_k^{k+\alpha+1} \end{vmatrix}}{\Delta_k}$$

Trecând coloanele în linii obținem, ținând seamă de notațiile puse și de (3) avem:

$$R_i = \frac{(-1)^{k-1}\Delta_{k,\,i,\,\alpha+1}}{\Delta_k} = -(-1)^{k-i+1}[m_{k-i+1}u_{\alpha+1} - m_{k-i+2}u_\alpha + m_{k-i+3}u_{\alpha-1} - \ldots].$$

De unde scoatem:

$$\Delta_{k,\,i,\,\alpha+1} = [m_{k-i+1}u_{\alpha+1} - m_{k-i+2}u_\alpha + m_{k-i+3}u_{\alpha-1} - \ldots]\Delta_k \quad (4)$$

și deci:

$$\Delta_{k,\,i,\,\alpha} = [m_{k-i+1}u_\alpha - m_{k-i+2}u_{\alpha-1} + m_{k-i+3}u_{\alpha-2} - \ldots]\Delta_k \quad (5)$$

unde cantitățile u sunt coeficienții din (2), după efectuarea împărțirii. Acești coeficienți sunt succesiv:

$u_0 = 1$

$u_1 = m_1 = \Sigma a_1$

$u_2 = m_1u_1 - m_2 = m_1^2 - m_2 = (\Sigma a_1)^2 - \Sigma a_1a_2,$

$u_3 = m_1u_2 - m_2u_1 + m_3 = m_1(m_1^2 - m_2) - m_2m_1 + m_3 = m_1^3 - 2m_2m_1 + m_3$

$u_4 = m_1u_3 - m_2u_2 + m_3u_1 - m_4 = m_1(m_1^3 - 2m_2m_1 + m_3) -$

$- m_2(m_1^2 - m_2) + m_3m_1 - m_4 = m_1^4 - 3m_2m_1^2 + 2m_1m_3 - m_4 + m_2^2.$

. . . . . ,

iar $m_1 = \Sigma a_1$, $m_2 = \Sigma a_1a_2$, $m_3 = \Sigma a_1a_2a_3$, etc.

Conform demonstrației, relația (4) este valabilă pentru $2 \leqslant i \leqslant k$, rămânând de tratat cazul pentru $i = 1$, adică $\Delta_{k,\,1,\,\alpha}$.

In (5) făcând $\alpha = 1$, obținem formula calculată anterior pentru cazul $\Delta_{k,\,i,\,1}$.

6°. *Cazul* $\Delta_{k,\,1,\,\alpha}$. Din împărțirea de mai sus am avut

$$R_1 = -(-1)^k m_k u_{\alpha+1} - 1,$$

iar din rezolvarea ultimului sistem de ecuații avem

$$R_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1^{k+\alpha+1} - 1 & a_1 & a_1^2 \ldots a_1^{k-1} \\ a_2^{k+\alpha+1} - 1 & a_2 & a_2^2 \ldots a_2^{k-1} \\ \vdots & & \\ a_k^{k+\alpha+1} - 1 & a_k & a_k^2 \ldots a_k^{k-1} \end{vmatrix}}{\Delta_k}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}\Delta_{k,\,1,\,\alpha+1} - \Delta_k}{\Delta_k} = \frac{(-1)^{k-1}\Delta_{k,\,1,\,\alpha+1}}{\Delta_k} - 1.$$

Egalând două valori ale lui R_1, obținem:

$$\Delta_{k,\,1,\,\alpha+1} = m_k\, u_{\alpha+1}\, \Delta_k \quad \therefore \quad \Delta_{k,\,1,\,\alpha} = m_k\, u_\alpha\, \Delta_k .$$

ING. FLOREA NEDELCU.

Notă. 1°. D-l P. P. TEODORESCU a găsit valoarea exactă plecând dela determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_h & x \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1^{i-2} & a_2^{i-2} & \dots & a_h^{i-2} & x^{i-2} \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \dots & a_h^{i-1} & x^{i-1} \\ a_1^{i} & a_2^{i} & \dots & a_h^{i} & x^{i} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \dots & a_h^{k-1} & x^{k-1} \\ a_1^{k+\alpha} & a_2^{k+\alpha} & \dots & a_h^{k+\alpha} & x^{k+\alpha} \end{vmatrix}$$

a cărui valoare este cunoscută [1]. D-sa arată că valoarea lui $\Delta_{k,\,i,\,\alpha}$ a fost dată pe altă cale și cu alte notații de d-l Prof. N. N. MIHAILEANU în articolul „*Asupra determinantului* VANDERMONDE" din revista *Pozitiva*, Vol. II, pag. 140.

2°. Soluții analoage cu cea din *Pozitiva* s'au primit și dela d-nii I. T. MUNTEANU și E. A. DODU.

PROBLEMA 6322. *Fie* I *și* I_a *centrele cercurilor înscris și exînscris triunghiului* ABC *cu mijloacele laturilor în* A', B', C'. *A patra tangentă comună cercurilor* I *și* I_a *întâlnește pe* A'B' *și* A'C' *respectiv în* L *și* M. *Să se demonstreze că patrulaterul* B'C'ML *este inscriptibil.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluție, dată de d-nii: CEZAR N. BOERESCU, M. R. CONSTANTINESCU (Politehnica București); P. P. TEODORESCU (Lic. „Matei Basarab", București); VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Lic. „R. Greceanu", Slatina); VAL. A. PETCU (Lic. „Mihai Viteazul" București); TH. M. HANGAN (Lic. „T. Maiorescu" București); I. T. MUNTEANU, PAUL CONSTANTINESCU, C. V. ROȘU, VALENTIN IONESCU, I. N. MĂNCESCU (Col. Național, Predeal); DAN HERȘCOVICI (Galați); MIRCEA M. VASILIU și G. G. ENESCU.

---

1) TH. ANGHELUȚĂ. *Curs de Algebră superioară,* fasc. I. Cap. III 16 Ex. 18.

Fie A_1, B_1, C_1 intersecțiile laturilor BC, CA, AB cu a patra tangentă LM la cercurile I și I_a. Punctele A și A_1 fiind centrele de asemănare ale cercurilor I și I_a sunt colineare cu I, I_a. Cum AII_a este bisectoarea unghiului BAC, punctul A este piciorul acestei bisectoare pe BC. Se observă că unghiurile BA_1C_1, CA_1B_1 sunt egale ca opuse la creștet I, unghiurile CA_1A și C_1A_1A sunt egale fiind simetrice față de AA_1 și în fine $\sphericalangle BAA_1$ egal cu $\sphericalangle B_1AA_1$. Rezultă că $\sphericalangle AB_1A_1 = \sphericalangle AB_1A_1$ deci patrulaterul BC_1CB_1 este inscriptibil, deci LM este antiparalelă lui BC în unghiul BAC. Cum $BC \parallel B'C'$ dreapta LM este antiparalelă lui B'C' în unghiul $B'A_1C'$ și deci patrulaterul B'C'LM este inscriptibil.

Figura corespunzătoare acestei demonstrații presupune $AC < AB$.

PROBLEMA 6326. *Să se verifice identitatea*

$$\frac{1}{2n-2} + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} + \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2} = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{C_n^1}{2^n} + \ldots + \frac{C_{2n-3}^{n-2}}{2^{2n-3}},$$

unde C_n^m *este numărul combinărilor* a n *obiecte de câte* m.

TH. ANGHELUȚĂ.

Prima soluție dată de d-l MIHAI R. CONSTANTINESCU.

Notăm sumele, din primul și al doilea membru ai identității propuse, respectiv cu a_n și b_n. Vom dovedi întâiu egalitatea

$$a_n = 1 - \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-2}}, \qquad (1)$$

care rezultă cum urmează

$$1 - \frac{1}{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2}$$

$$1 - \frac{1}{2n-2} - \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} = \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 - \frac{1}{2n-2} - \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} - \ldots - \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2} = \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2}$$

Egalitatea (1) este astfel dovedită.

Suma b_n se poate scrie

$$b_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{C_{n-1}^1 + 1}{2^n} + \frac{C_n^2 + C_n^1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{C_{2n-4}^{n-2} + C_{2n-4}^{n-3}}{2^{2n-3}},$$

prin urmare

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{C_n^1}{2^n} + \ldots + \frac{C_{2n-4}^{n-3}}{2^{2n-4}} + \frac{C_{2n-3}^{n-2}}{2^{2n-3}}\right) - \frac{C_{2n-3}^{n-2}}{2^{2n-2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{C_{n-1}^1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{C_{2n-5}^{n-3}}{2^{2n-5}}\right) + \frac{C_{2n-4}^{n-2}}{2^{2n-3}}.$$

Cu notaţiile introduse, această egalitate devine

$$b_n = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} b_{n-1} + \frac{C_{2n-4}^{n-2}}{2^{2n-3}} - \frac{C_{2n-3}^{n-2}}{2^{2n-2}}.$$

Aşadar, suma b_n verifică relaţia de recurenţă

$$b_n - b_{n-1} = \frac{2 C_{2n-4}^{n-2} - C_{2n-3}^{n-2}}{2^{2n-3}}. \qquad (2)$$

Apoi din (1), deducem că a_n satisface relaţia, identică cu cea precedentă,

$$a_n - a_{n-1} = \frac{4 C_{2n-4}^{n-2} - C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-2}}, \qquad (3)$$

ţinând seamă de formula

$$2 C_{2n-3}^{n-2} = C_{2n-2}^{n-1}.$$

Din faptul că a_n şi b_n verifică aceeaşi relaţie de recurenţă nu putem deduce, că a_n este egal cu b_n fără dovadă. Punând $a_n - b_n = c_n$ din (2) şi (3), rezultă relaţia de recurenţă $c_n - c_{n-1} = 0$, deci $c_n = c_2$. Insă avem $c_2 = a_2 - b_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Identitatea propusă este demonstrată.

Vom schiţa a doua soluţie, care ne va da originea identităţii propuse. Este totodată un mijloc de a forma identităţi. Considerăm integrala nedefinită

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^n}$$

n fiind întreg şi pozitiv. Integrând prin părţi pe I_{n-1}, găsim relaţia

$$I_n = -\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{x}{(2n-2)(x^2-1)^{n-1}}. \qquad (4)$$

De aici, obţinem

$$I_n = -\frac{x}{(2n-2)(x^2-1)^{n-1}} + \frac{(2n-3)x}{(2n-2)(2n-4)(x^2-1)^{n-2}} - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3.x}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2(x^2-1)} +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2} \frac{1}{2} L \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

expresia de sub logaritm este luată în valoare absolută şi C o constantă.

Reducem funcţia raţională de x, din membrul al doilea, la acelaşi numitor şi observăm că termenul în x dela numărător are coeficientul $-a_n$.

Se poate calcula integrala I_n folosind descompunerea în elemente simple [1]

$$\frac{1}{(x^2-1)^n} = \frac{1}{2^n}\left[\frac{(-1)^n}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x-1)^n}\right] + \frac{C_n^1}{2^{n+1}}\left[\frac{(-1)^n}{(x+1)^{n-1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x-1)^{n-1}}\right] + \ldots + \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}}\left[\frac{(-1)^n}{x+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{x-1}\right]$$

Urmează prin integrare

$$I_n = -\frac{1}{2^n(n-1)}\left[\frac{(-1)^n}{(x+1)^{n-1}} + \frac{1}{(x-1)^{n-1}}\right] - \frac{C_n^1}{2^{n+1}(n-2)}\left[\frac{(-1)^n}{(x+1)^{n-2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x-1)^{n-2}}\right] - \ldots - \frac{C_{2n-3}^{n-2}}{2^{2n-2}}\left[\frac{(-1)^n}{x+1} + \frac{(-1)^{n-2}}{x-1}\right] +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}} L \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Reducând şi aici funcţia raţională, din membrul al doilea, la acelaşi numitor găsim că termenul în x dela numărător are coeficientul $-b_n$. Cele două expresii ale lui I_n fiind identice, rezultă identitatea dată.

Din această soluţie putem afla suma a_n dată de (1). In relaţia de recurenţă (4), după ce am redus partea raţională la acelaşi numitor, egalăm coeficienţii lui x din numărătorii ambilor membri şi găsim

$$(2n-2)\,a_n - (2n-3)\,a_{n-1} = 1$$

O relaţie de recurenţă identică satisface evident b_n.

---

1) TH. ANGHELUŢĂ, *Algebra superioară* vol. I, Exer. 9 p. 57.

Pentru determinarea lui a_n facem schimbarea

$$a_n = 1 - u_n$$

şi obţinem relaţia de recurenţă

$$u_n = \frac{2n-3}{2n-2} u_{n-1}.$$

Se găseşte

$$u_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4} u_2.$$

Insă avem $U_2 = 1 - a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Rezultă pentru a_n expresia din (1).

TH. A.

PROBLEMA 6395. *Să se construiască triunghiul* ABC, *cunoscând unghiul* A *şi lungimile medianelor din* B *şi din* C.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-l DAN D. POPOVICI (Col. Naţ. „Sf. Sava").

Presupunând problema rezolvată, fie BB', CC', G medianele şi centrul de greutate al triunghiului ABC. Notăm cu ω şi ρ centrul şi raza cercului BB'A şi cu D punctul luat pe prelungirea lui BB' aşa în cât

$$\overline{GB'} = \overline{B'D}.$$

Rezultă că G este mijlocul segmentului BD, şi cum C' este mijlocul lui BA, urmează

$$\overline{DA} = 2\overline{GC'} = \overline{GC} = C^t.$$

De aici se deduce construcţia cerută. Pe BB' se descrie un segment capabil de unghiul A, cercul ω pe care se află A. Intersecţia acestui cerc cu cercul de centru D şi raza GC determină punctul A. Vârful C se va găsi la întâlnirea lui AB' cu C'G.

Problema are 2, 1 sau 0 soluţii.

Notă. 1°. Fie E şi F intersecţiile lui Dω cu cercul BB'A. Pentru ca punctul A să existe este necesar şi suficient să avem

$$DE \leqslant DA \leqslant DF.$$

Notând cu b', c' medianele BB', CC', neegalităţile precedente se mai scriu

$$D\omega - \leqslant \frac{2c'}{3} \leqslant D\omega + \rho. \qquad (1)$$

Observăm că în triunghiul DBω avem

$$\sphericalangle DB\omega = \frac{\pi}{2} - A \quad ; \quad \omega B = \rho \quad ; \quad \overline{DB} = \frac{4b'}{3}$$

$$\therefore \quad \overline{D\omega}^2 = \frac{16b'^2}{9} + \rho^2 - \frac{8b'\rho}{3}\sin A$$

sau înlocuind pe ρ în funcție de b' și $\sin A$:

$$\overline{D\omega}^2 = \frac{16b'^2}{9} + \frac{b'^2}{4\sin A} - \frac{4b'^2}{3} = \frac{9 + 4\sin^2 A}{36\sin A}\,b'^2$$

$$\therefore \quad \overline{D\omega} = \frac{b'}{6\sin A}\sqrt{9 + 4\sin^2 A}\,.$$

Condiția (1) devine

$$\sqrt{9 + 4\sin A} - 3 \leqslant \frac{4c'\sin A}{b'} \leqslant \sqrt{9 + 4\sin A} + 3.$$

Vom avea 2 soluții în cazul neegalităților, o soluție în caz de egalitate sau nici o soluție când raportul este în afara intervalului limitat de primul și ultimul membru al neegalităților.

2°. D-l MIRCEA D. POPA (Politehnica București) a construit triunghiul determinând punctul C' prin intersecțiile cercului de diametru Bω cu cercul de centru G și rază GC'. D-sa a dat și discuția corespunzătoare.

3°. Au rezolvat problema ca la 1°, fără însă a schița vre-o discuție d-nii: SOFRONIE I. ȘTEFĂNESCU, MIRCEA M. VASILIU (Lic. militar, Craiova); DAN E. VASILIU (Lic. „Mihai Viteazul", București); ARISTIDE I. DELEANU (Lic. „Titu Maiorescu", București); M. D. COTARIU (Politehnica, București); I. MUNTEANU, PAUL CONSTANTINESCU (Lic militar, Predeal); P. A. CERNESCU (Târgoviște); TH. M. HANGAN și K. TELEMAN.

4°. D-nii M. V. SOARE (Politehnica București); N. I. ȚOPA (Lic. Buzău) au rezolvat triunghiul calculându-i elementele în funcție de datele enunțului.

5°. Problema este un caz particular al problemei 6356, dar nu-și are originea în acea problemă.

G-L GH. B.

PROBLEME PROPUSE

6526. Dacă p este un număr prim, iar A și n numere întregi oarecare, să se arate că:

$$A^{p^n - 1(p-1)+1} - A = \mathcal{M}p^n.$$

GENERAL GR. ZAPAN.

6527. Să se găsească numerele N și B știind că N are 2 cifre în baza de numerație B și 5 cifre în baza B—3.

VICTOR ȘERBĂNESCU.

6528. Care este cel mai mic număr de trei cifre, care are cel mai mare număr de divizori?

I. LINTEŞ.

6529. Intr'un patrulater convex ABCD, se dau $BC = 5$, $CD = 6$, $DA = 9$. Să se determine latura AB, conţinând un număr întreg de unităţi de lungime, astfel ca patrulaterul ABCD să fie inscriptibil.

M. GHERMĂNESCU.

6530. Fiind dat un triunghiu ABC, să se arate că:

1°. Pe latura BC se găsesc trei puncte M, N, P (M şi N în interior iar P în exterior) astfel că

$$\overline{MB}\cdot\overline{MC} = \overline{AM}^2 \; ; \quad \overline{NB}\cdot\overline{NC} = \overline{AN}^2 \; ; \quad \overline{PB}\cdot\overline{PC} = \overline{AP}^2. \quad (1)$$

2°. P_0 fiind puterea punctului P faţă de cercul ABC, atunci

$$P_0 = \overline{PM}\cdot\overline{PN}.$$

3°. $$\overline{MN}^2 = \frac{(b^2+c^2-2a^2)^2-4b^2c^2}{4a^2}.$$

4°. $$\overline{AM}^2+\overline{AN}^2+\overline{MN}^2 = a^2-\frac{1}{2}(b^2+c^2).$$

5°. $$2\,\overline{AM}\cdot\overline{AN} = bc.$$

MIRCEA D. POPA.

6531. Pe cercul O se dau punctele M_1, M_2 simetrice faţă de diametrul A_1A_2 al cercului. Cercurile O_1 şi O_2 de diametre A_1M_1, A_2M_2 se taie în R pe A_1A_2. Tangentele la O în M_1, M_2 tae pe O_1, O_2 în T_1, T_2. Dacă R_1, R_2 sunt simetricele lui R faţă de O_1 şi O_2, să se arate că:

1°. Patrulaterul $R_1T_1T_2R_2$ este inscriptibil într'un cerc concentric cu O.

2°. Patrulaterul $O_1T_1T_2O_2$ este inscriptibil într'un cerc ce trece prin O.

3°. Avem $M_1T_1 = M_2T_2$.

VIRGIL G. CONSTANTINESCU.

6532. Se dă trapezul ABCD ale cărui diagonale AC şi BD se întâlnesc în I. Fie E simetricul lui D faţă de I şi F intersecţia lui AC cu paralela din B la CE. Să se arate că FE este paralelă cu AD.

G-L GH. BUICLIU.

6533. 1°. Să se arate că laturile A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 ale eptagonului regulat $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, înscris în cercul de rază R sunt date de relaţiunile

$$A_0A_i = \frac{R}{3}\sqrt{9x_i + 21} \qquad (1)$$

unde $x_1 < x_2 < x_3$ sunt rădăcinile ecuaţiei

$$27x^3 - 21x + 7 = 0. \qquad (2)$$

2°. Să se rezolve ecuaţia (2) şi să se deducă apoi expresiile laturilor A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 în funcţie de R, folosind relaţia (1).

C. MIHU.

6534. Fie polinomul

$$P(u) \equiv [1+u^m+u^{2m}+\ldots+u^{(2^n-1)m}]^p + [1+u^p+u^{2p}+\ldots+u^{(2^n-1)p}]^m - 2[1+u^{mp}+u^{2mp}+\ldots+u^{(2^n-1)mp}].$$

Dacă m şi p sunt întregi impari congruenţi cu 1 mod. (2^n+1) polinomul $P(u)$ este divizibil cu

$$R_1(u) \equiv u(1+u)(1+u^2)\ldots(1+u^{2^n-1})(1+u+u^2+\ldots+u^{2^n})^2.$$

Dacă m şi p sunt întregi impari congruenţi cu r şi s mod. (2^n+1), (r şi s diferiţi de zero sau 1), polinomul $P(u)$ este divizibil cu polinomul

$$R_2(u) = u(1+u)(1+u^2)\ldots(1+u^{2^n-1})(1+u+u^2+\ldots+u^{2^n}).$$

Cazuri particulare interesante. Extinderi.

O. N. ŢINO.

6535. Se dau trei puncte A, B, C şi o dreaptă Δ în planul lor. Să se ducă prin A, B, C trei drepte paralele, care să determine pe Δ două segmente egale. Discuţie.

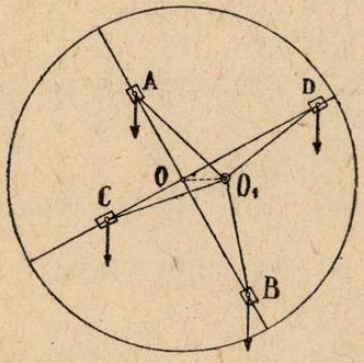
GH. D. SIMIONESCU.

6536. Se dă un cerc şi un diametru AB al său. O dreaptă arbitrară dusă prin punctul B intersectează tangenta în A la cerc în punctul C, iar cercul în punctul M. Paralela dusă din C la tangenta în M la cerc taie dreapta AM în punctul D.

Să se arate că patrulaterul ABDC este inscriptibil într'un cerc şi circumscriptibil altui cerc; să se deducă locul geometric al punctului D.

CEZAR COŞNIŢĂ.

6537. Un inventator mi-a descris un aparat al său la care lucra de câţiva ani şi care se compunea dintr'o roată, mobilă într'un plan vertical în jurul unui punct fix O, având două spiţe AOB şi COD *perpendiculare* una pe alta. Pe aceste *spiţe*, patru *cursori* identici A, B, C, D de greutăţi egale puteau aluneca *fără frecare*. Poziţia acestor cursori pe spiţe era determinată de patru bare AO_1, BO_1, CO_1 şi DO_1 *de aceeaşi lungime, articulate* atât la capetele lor mobile A, B, C, D în punctele unde erau legate de cursori cât şi la capătul comun fix O_1 situat pe orizontala lui O. Inventatorul pretindea, că pentru orice poziţie a sistemului, rezultanta greutăţilor celor patru cursori dă un moment *constant în mărime şi sens* în raport cu O sub acţiunea căruia roata se va învârti *necontenit* (perpetuum mobil).



Să se verifice cele afirmate de inventator şi să se arate *eroarea* comisă în spusele sale. Greutăţile barelor AO_1, BO_1, CO_1 şi DO_1, frecările şi rezistenţa aerului se vor neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

6538. O persoană de 35 ani, plăteşte unei societăţi de asigurare câte a lei timp de 3 ani, apoi continuă încă 5 ani să plătească prime lunare descrescătoare de 5% anual, plata pe prima lună fiind b lei, pentru asigurarea unui capital A plătibil urmaşilor dacă moare oricând dela 57 ani înainte.

a) Să se stabilească relaţia între a, b şi A.

b) Să se calculeze A când $a = 315.000$ lei şi $b = 25.000$ lei.

V. MEHEDINCU.

6539. Să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţiunile

$$\text{A)}\quad y = \frac{\pm\sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}}{x};$$

$$\text{B)}\quad y = \frac{x^3}{\pm\sqrt{x^4 - 17x^2 + 16}}.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6540. Se dă suprafaţa

$$(x^2 + y^2 + z^2)^n = ax^\lambda y^\mu z^\nu$$

raportată la un sistem tridreptunghiular $Oxyz$, numerele nenegative n, λ, μ, ν fiind legate prin relaţiunea

$$2n = \lambda + \mu + \nu + 3$$

iar a un factor pozitiv de omogeneitate. Să se calculeze volumul limitat de această suprafaţă.

B. M. BARBĂLAT.

ERATĂ. 1°. La pag. 9 textul din dreptul Nr. 92 se înlocueşte prin: CLAUDIAN VIRGIL, profesor la liceul „Mihai Viteazul" din Bucureşti, Strada Lt. Robescu Radu 4, Parcul Iancului, Bucureşti IV. Telef. 57546.

2°. Problema rezolvată la pag. 51 are numărul 5674, iar nu 5764.

3° La problema 6525, pag. 64, între rândul al doilea şi al treilea dela sfârşit să se adaoge:

Aceeaşi relaţie are loc şi pentru ecuaţia lineară de ordinul trei

$$y''' + py'' + qy' + ry = 0 \text{ şi } \rho = \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}p'$$

faţă de transformarea arbitrară de variabilă independentă şi de funcţie de orma $y = uz$, z fiind noua funcţie iar $u = u(x)$ o funcţie cunoscută.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Constantinescu R. M. (6502, 3, 4, 5, 6); *Deleanu I. Aristide* (5064, 6323, 422, 6, 33); *Georgescu Răducanu* (P); *Meriu C. Gh.* (6438); *Moraru Dinu* (6170, 485, 516); *Nestorescu C. N.* (6499); *Petcu A. Val.* (P); *Stănilă D. G.* (6350, 405, 20, 80, 99, 502); *Teleman A. Kostake* (5085, 6396, 461, 4, 501, 2, 3, 4, 5); *Teleman A. Silviu* (6417, 51, 97, 501, 2, 3); *Teodorescu P. P.* (6508, 11, 3, 5, 6, 23, 4); *Thebault V.* (N); *Ţibăr I. A.* (6438, 61, 71, 86, 502, 4); *Ţopa I. N.* (6412, 6, 64, 85); *Wegener N. E.* (4402, 6198, 444, P).

Orariul Bibliotecilor Gazeta Matematică

Sălile de bibliotecă sunt deschise după următorul orariu în luna Octombrie şi Noembrie:

Localul din Calea Griviţei Nr. 158: In fiecare zi de lucru dela 8 la 12 şi Miercurea dela 16 la 20.

Casa „I. Ionescu" din Str. Răsuri Nr. 25: Luni şi Vineri dela 8 la 10, Marţi şi Miercuri dela 16 la 20.

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de geometrie, a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ"

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 200 lei volumul pentru volumele I—XXV; 400 pentru volumele XXVI—L; 800 lei pentru volumele LI—LIII şi eventual numere izolate cu preţul de 20 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ"

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu**, *Mecanica raţională*, Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.270

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* Lei 230

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII" al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele şi ori-ce sume se pot trimite la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 13.482.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIV

NUMĂRUL 3. — NOEMBRIE 1948

SUMARUL

1. Rezolvarea unor tipuri de ecuaţii diofantice . . . . . *V. Claudian.*
2. Construcţia razei de curbură la curbele inverse . . . . . *Ad. Gheorghiu.*
3. Raport pentru decernarea premiului „V. Conta" pe anul 1948 . . . . . *G. G. Constantinescu, C. C. Teodorescu, Şerban Ţiţeica*
4. Note matematice: 7—9.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Probleme rezolvate: 2609, 3780, 5500, 5950, 6006, 6053, 6292, 6319, 6324.
9. Exerciţii: 1—2.
10. Probleme propuse: 6541—6555.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALA

1948

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, (Casa „*Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie, compusă în prezent din d-nii: **G. G. Constantinescu**, Doctor în Matematici; **C. C. Teodorescu**, Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **General Gr. Zapan**, (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. „*Gazeta Matematică*":
Luni 22 Noembrie ora 17^{30}: Adunarea materiei pentru Nr. 4.
Luni 6 Decembrie ora 17^{30}: Facerea copertei Nr. 4.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.
Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1948 sunt indicate în tabla de materii a volumului LIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **65**11, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 5.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii 1 — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cursul mediu şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La «*Gazeta Matematică*» se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 150
— Medalia comemorativă, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a «*Gazetei Matematice*» . . . . . „ 500

REZOLVAREA UNOR TIPURI DE ECUAȚII DIOFANTICE[1]

In expunerea ce urmează voi încerca să utilizez o metodă uniformă pentru stabilirea soluțiilor întregi ale unor ecuații diofantice.

I. Să considerăm tipurile de ecuații

$x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2+z^2=t^2$, $x^2+y^2+z^2+t^2=u^2$, etc.

1°. Să facem transformarea

$$x=1+ak \quad , \quad y=bk \quad , \quad z=1+ck \tag{1}$$

în ecuația pitagorică

$$x^2+y^2=z^2.$$

Vom găsi

$$k=\frac{2c-2a}{a^2+b^2-c^2}.$$

Dacă înlocuim în (1) și înlăturăm numitorul, deducem soluțiile întregi ale ecuației date:

$$x=-a^2+b^2-c^2+2ac=b^2-(c-a)^2,$$

$$y=2b(c-a) \quad , \quad z=a^2+b^2+c^2-2ac=b^2+(c-a)^2.$$

Aceste soluții, se vede imediat, sunt de forma

$$x=A^2-B^2 \quad , \quad y=2AB \quad , \quad z=A^2+B^2;$$

ele sunt soluțiile cunoscute ale ecuației pitagorice.

2°. Fie acum ecuația

$$x^2+y^2+z^2=t^2.$$

Să facem acum transformarea

$$x=1+ak \quad , \quad y=bk \quad , \quad z=ck \quad , \quad t=1+dk. \tag{2}$$

Efectuând toate calculele deducem:

$$k=\frac{2d-2a}{a^2+b^2+c^2-d^2}.$$

Dacă înlocuim în (2) și suprimăm numitorul comun la toate expresiile aflate, deducem

$$x=-a^2+b^2+c^2-d^2+2ad=b^2+c^2-(d-a)^2,$$

$$y=2b(d-a) \quad , \quad z=2c(d-a),$$

$$t=a^2+b^2+c^2+d^2-2ad=b^2+c^2+(d-a)^2,$$

---

1) Comunicare făcută la Societatea Română de Matematici în ziua de 21 Iunie 1948.

unde a, b, c, d, sunt numere întregi pozitive sau negative. Aceste soluții sunt de forma

$$x = A^2 + B^2 - C^2 \ , \ y = 2AC \ , \ z = 2BC \ , \ t = A^2 + B^2 + C^2. \quad (3)$$

Dacă aici facem

$$A = \beta - \gamma \ , \ B = \gamma - \alpha \ , \ C = \alpha - \beta,$$

avem următoarele soluții

$$t = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha \ , \ x = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma,$$
$$y = \beta^2 - \beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\gamma \ , \ z = \gamma^2 - \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\beta.$$

Ele au fost indicate de LONGCHAMPS în ediția a doua a algebrei sale; ele sunt un caz particular al soluțiilor (3) și anume acelea pentru care

$$A + B + C = 0.$$

3°. Să mai considerăm și ecuația

$$x^2 + y^2 + z^3 + t^2 = u^2.$$

Să facem transformarea

$$x = 1 + ak \ , \ y = bk \ , \ z = ck \ , \ t = dk \ , \ u = 1 + ek. \quad (4)$$

Făcând toate calculule ajungem la valoarea

$$k = \frac{2e - 2a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2}.$$

Introducând această valoare în (4) și suprimând numitorul comun, găsim soluțiile

$$x = b^2 + c^2 + d^2 - (e-a)^2 \ , \ y = 2b(e-a) \ , \ z = 2c(e-a),$$
$$t = 2d(e-a) \ , \ u = b^2 + c^2 + d^2 + (e-a)^2.$$

Aceste expresiuni sunt de forma:

$$x = A^2 + B^2 + C^2 - D^2 \ , \ y = 2AD \ , \ z = 2BD \ , \ t = 2CD,$$
$$u = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

unde A, B, C, D, sunt numere întregi pozitive sau negative.

II. Să considerăm acum tipurile de ecuații

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + s^2 = u^2 + v^2 + w^2 + t^2, \text{ etc.}$$

1°. Luăm ecuaţia

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

şi facem transformarea

$$x = 1 + ak \quad , \quad y = bk \quad , \quad u = 1 + ck \quad , \quad v = dk. \qquad (5)$$

După terminarea calculelor găsim

$$k = \frac{2c - 2a}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}.$$

Apoi din (5), după suprimarea numitorului, avem

$$x = b^2 - d^2 - (c - a)^2 \quad , \quad y = 2b(c - a),$$

$$u = b^2 - d^2 + (c - a)^2 \quad , \quad v = 2d(c - a).$$

Aceste expresiuni sunt de forma:

$$x = A^2 - B^2 - C^2 \quad , \quad y = 2AC \quad , \quad u = A^2 - B^2 + C^2 \quad , \quad v = 2BC.$$

Pentru a găsi soluţiile întregi ale aceleaşi ecuaţii, mai putem face şi transformarea

$$x = 1 + ak \quad , \quad y = 1 + bk \quad , \quad u = 1 + ck \quad , \quad v = 1 + dk. \qquad (6)$$

Căpătăm pentru k valoarea

$$k = \frac{2c + 2d - 2a - 2b}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}$$

care ne conduce la expresiile:

$$x = -a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ac + 2ad - 2ab,$$

$$y = \quad a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2bc + 2bd - 2ab,$$

$$u = \quad a^2 + b^2 + c^2 - d^2 + 2cd - 2ac - 2bc,$$

$$v = \quad a^2 + b^2 - c^2 + d^2 + 2cd - 2ad - 2bd.$$

Aceste soluţii sunt, cum uşor se poate vedea, de forma:

$$x = -A^2 + B^2 + C^2,$$

$$y = \quad A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC,$$

$$u = \quad A^2 + B^2 - C^2 - 2AB + 2BC.$$

$$v = \quad A^2 - B^2 + C^2 - 2AC + 2BC.$$

Ele depind prin urmare de *trei* parametri.

2°. Să considerăm ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$.

Facem transformarea:

$$x = 1 + ak\ ,\ y = bk\ ,\ z = ck\ ,\ u = 1 + dk\ ,\ v = ek\ ,\ w = fk. \quad (7)$$

Efectuând toate calculele avem pentru k:

$$k = \frac{2d - 2a}{a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - e^2 - f^2}.$$

Căpătăm apoi pentru necunoscute

$$x = b^2 + c^2 - e^2 - f^2 - (d - a)^2,$$

$$y = 2b(d - a)\ ,\ z = 2c(d - a),$$

$$u = b^2 + c^2 - e^2 - f^2 + (d - a)^2,$$

$$v = 2e(d - a)\ ,\ w = 2f(d - a).$$

Se vede imediat că aceste soluţii sunt de forma:

$$x = A^2 + B^2 - C^2 - D^2 - E^2\ ,\ y = 2AE\ ,\ z = 2BE,$$

$$u = A^2 + B^2 - C^2 - D^2 + E^2\ ,\ v = 2CE\ ,\ w = 2DE.$$

Pentru tratarea aceleaşi ecuaţii putem pune

$$x = 1 + ak\ ,\ y = 1 + bk\ ,\ z = ck\ ,\ u = 1 + dk\ ,\ v = 1 + ek\ ,\ w = fk \quad (8)$$

sau putem face transformarea

$$x = 1 + ak,\ y = 1 + bk,\ z = 1 + ck,\ u = 1 + dk,\ v = 1 + ek,\ w = 1 + fk. \quad (9)$$

Pentru fiecare din aceste transformări avem câte un grup de valori întregi ale ecuaţiei considerate.

3°. Ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 + s^2 = u^2 + v^2 + w^2 + t^2$, se tratează la fel cum am arătat în rândurile precedente.

III. Fie acum următoarele tipuri de ecuaţii

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^2 + v^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^2 + v^2 + w^2,\ \text{etc.}$$

1°. Pentru ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2$, facem următoarea transformare

$$x = 1 + ak\ ,\ y = 1 + bk\ ,\ z = ck\ ,\ u = 1 + dk\ ,\ v = 1 + ek. \quad (10)$$

Deducem, calculele fiind făcute, valoarea

$$k = \frac{2(d+e-a)}{a^2+b^2+c^2-d^2-e^2},$$

care ne dă soluţiile în numere întregi:

$$x = b^2+c^2-e^2+2ea-(d-a)^2$$
$$y = c^2-d^2-e^2+2bd+2be+(b-a)^2,$$
$$z = 2c(d+e-a),$$
$$u = b^2+c^2-e^2+2de+(d-a)^2,$$
$$v = b^2+c^2-d^2+2de+(e-a)^2.$$

Pentru rezolvarea aceleiaşi ecuaţii putem face transformarea

$$x = 1+ak\ ,\ y = bk\ ,\ z = ck\ ,\ u = 1+dk\ ,\ v = ek \quad (11)$$

care ne dă:

$$x = b^2+c^2-e^2-(d-a)^2\ ,\ y = 2b(d-a),$$
$$z = 2c(d-a),\ u = b^2+c^2-e^2+(d-a)^2,\ v = 2e(d-a).$$

Aceste soluţii sunt, evident, de forma

$$x = A^2+B^2-C^2-D^2\ ,\ y = 2AD\ ,\ z = 2BD,$$
$$u = A^2+B^2-C^2+D^2\ ,\ v = 2CD$$

2°. Să luăm ecuaţia $x^2+y^2+z^2+t^2 = u^2+v^2$.

Facem transformarea

$$x=1+ak\ ,\ y=1+bk\ ,\ z=ck\ ,\ t=dk\ ,\ u=1+ek\ ,\ v=1+fk. \quad (12)$$

Toate calculele fiind făcute, căpătăm

$$k = \frac{2(e+f-a-b)}{a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2}.$$

Această valoare ne conduce la soluţiile:

$$x = -a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2-2ae+2af-2ab,$$
$$y = a^2-b^2+c^2+d^2-e^2-f^2+2be+2bf-2ab,$$
$$z = 2c(e+f-a-b),$$
$$t = 2d(e+f-a-b),$$
$$u = a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-f^2+2ef-2ae-2be,$$
$$v = a^2+b^2+c^2+d^2-e^2+f^2+2ef-2af-2bf.$$

3°. Un procedeu asemănător ne dă soluţiile întregi ale ecuaţiei

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

IV. Să ne fixăm acum atenţia şi asupra următoarelor tipuri de ecuaţii

1°. $x^2 + xy + y^2 = z^2$

2°. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = u^2.$

1°. Pentru prima ecuaţie să punem

$$x = 1 + ak \quad , \quad y = bk \quad , \quad z = 1 + ck. \tag{13}$$

Transformarea (13) ne dă pentru ecuaţia 1°:

$$= \frac{2c - 2a - b}{a^2 + b^2 - c^2 + ab};$$

ea ne conduce la următoarele valori, după ce în prealabil s'a înlăturat numitorul:

$$x = b^2 - (c - a)^2 \quad , \quad y = 2b\,(c - a) - b^2,$$

$$z = b^2 + (c - a)^2 - b\,(c - a).$$

Aceste soluţii sunt de forma:

$$x = A^2 - B^2 \quad , \quad y = 2AB - A^2 \quad , \quad z = A^2 - AB + B^2,$$

2°. In ecuaţia 2° facem transformarea

$$x = 1 + ak \quad , \quad y = bk \quad , \quad z = ck \quad , \quad u = 1 + dk \tag{14}$$

care ne dă valoarea

$$k = \frac{2d - 2a - b - c}{a^2 + b^2 + c^2 - d^2 + ab + bc + ca}.$$

Deducem următoarele soluţii în numere întregi:

$$x = b^2 + c^2 - (d - a)^2 - ab + bc - ca,$$

$$y = 2b\,(d - a) - b^2 - bc.$$

$$z = 2c\,(d - a) - c^2 - bc,$$

$$u = b^2 + c^2 + (d - a)^2 + bc - (b + c)\,(d - a).$$

V. Putem generaliza, *într'o primă formă*, ecuațiile studiate în rândurile precedente. Putem rezolva în numere întregi următoarele tipuri de ecuații

$$Ax^2 + By^2 = (A + B)\, z^2,$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (A + B + C)\, z^2,$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = (A + B + C)\, u^2,$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = (A + B + C + D)\, u^2;$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = Du^2 + Ev^2,$$

în care

$$A + B + C = D + E;$$

și

$$Ax^2 + By^2 = Cu^2 + Dv^2,$$

în care

$$A + B = C + D,$$

precum și altele de acest fel.

Să rezolvăm, de pildă, *prima* dintre aceste ecuații. Facem transformarea

$$x = 1 + ak \quad , \quad y = 1 + bk \quad , \quad z = 1 + ck. \tag{15}$$

Atunci ecuația

$$Ax^2 + By^2 = (A + B)\, z^2,$$

ne dă:

$$k = -2\,\frac{Aa + Bb - (A + B)\, c}{Aa^2 + Bb^2 - (A + B)\, c^2}.$$

Căpătăm soluțiile:

$$x = -A(a - c)^2 + B(b - c)(b + c - 2a),$$

$$y = A(a - c)(a + c - 2b) - B(b - c)^2,$$

$$z = A(a - c)^2 + B(b - c)^2.$$

Ele sunt de formele următoare:

$$x = Bp^2 - (A + B)\, q^2 \quad , \quad y = Bp^2 + (A + B)\, q^2 - 2(A + B)\, pq,$$

$$z = Bp^2 - 2Bpq + (A + B)\, q^2$$

și depind de doi parametri p și q întregi.

Prin procedeul arătat, putem rezolva în numere întregi următoarele ecuații particulare:

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \quad ; \quad x^2 + 2y^2 = 3z^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3t^2;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + 2v^2 \quad ; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 5t^2 = 4u^2 + 7v^2; \text{ etc.}$$

Observare. Se poate considera, *ca o generalizare în a doua formă*, următoarea ecuaţie

$$Ax^2 + By^2 = Cz^2, \tag{16}$$

precum şi celelalte tipuri ce se deduc din cele considerate la începutul acestui paragraf.

Dacă avem o soluţie α, β, γ a ecuaţiei (16), adică

$$A\alpha^2 + B\beta^2 = C\gamma^2,$$

atunci facem transformarea:

$$x = \alpha + ak \quad , \quad y = \beta + bk \quad , \quad z = \gamma + ck \tag{17}$$

şi determinăm pe k.

Acest studiu va fi însă făcut complet cu altă ocazie.

* * *

In prima parte a acestei expuneri am rezolvat ecuaţii diofantice *omogene*. Vom încerca acum, mai departe, să utilizăm aceeaşi metodă pentru a găsi soluţii întregi ale unor ecuaţii diofantice *neomogene*.

VI. Vom considera grupul de ecuaţii de tipul

$$x^2 + y^2 = z^3 \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = u^3 \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^3, \text{ etc.}$$

$$x^2 + xy + y^2 = z^3, \text{ etc.}$$

1°. Pentru ecuaţia $x^2 + y^2 = z^3$, facem transformarea

$$x = 1 + k\alpha \quad , \quad y = k\beta \quad , \quad z = 1 + k\gamma \tag{18}$$

şi căpătăm ecuaţia de gradul II în k:

$$k^2\gamma^3 + (3\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)\, k + (3\gamma - 2\alpha) = 0. \tag{19}$$

Să punem $3\gamma - 2\alpha = 0$, adică $\gamma = \dfrac{2\alpha}{3}$; atunci

$$k = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 3\gamma^2}{\gamma^3}.$$

Luând $\alpha = 3\alpha_1$, $\gamma = 2\alpha_1$ (α_1 întreg), deducem:

$$k = \frac{\beta^2 - 3\alpha_1^2}{8\alpha_1^3}.$$

Introducând această valoare în (18), efectuând calculele şi suprimând numitorul comun găsim soluţiile:

$$x = \alpha_1(3\beta^2 - \alpha_1^2) \quad , \quad y = \beta(\beta^2 - 3\alpha_1^2) \quad , \quad z = \alpha_1^2 + \beta^2$$

care soluţii sunt de forma următoare

$$x = B(3A^2 - B^2) \quad , \quad y = A(A^2 - 3B^2) \quad , \quad z = A^2 + B^2$$

în care A şi B sunt numere întregi pozitive sau negative.

2°. Să considerăm ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = u^3$.

Facem transformarea:

$$x = 1 + k\alpha \quad , \quad y = k\beta \quad , \quad z = k\gamma \quad , \quad u = 1 + k\delta. \qquad (20)$$

Găsim următoarea ecuaţie de gr. II pentru determinarea lui k:

$$k^2\delta^3 + (3\delta^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)k + (3\delta - 2\alpha) = 0. \qquad (21)$$

Să luăm $3\delta - 2\alpha = 0$, adică $\delta = \frac{2\alpha}{3}$. Avem:

$$k = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3\delta^2}{\delta^3}.$$

Luând $\alpha = 3\alpha_1$, $\delta = 2\alpha_1$ (α_1 întreg), găsim pentru k:

$$k = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha_1^2}{8\alpha_1^3}.$$

Introducând această valoare în (20), făcând toate calculele şi reducerile; apoi suprimând numitorul comun, găsim valorile

$$x = \alpha_1(-\alpha_1^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2) \quad , \quad y = \beta(\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha_1^2),$$

$$z = \gamma(\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha_1^2) \quad , \quad u = \beta^2 + \gamma^2 + \alpha_1^2.$$

Aceste soluţii sunt de forma următoare

$$x = A(3B^2 + 3C^2 - A^2) \quad , \quad y = B(B^2 + C^2 - 3A^2),$$

$$z = C(B^2 + C^2 - 3A^2) \quad , \quad u = A^2 + B^2 + C^2.$$

Exemplu numeric. Punând A = 1, B = 2, C = 3 avem:

$$38^2 + 20^2 + 30^2 = 14^3.$$

3°. Să luăm acum ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^3$.

Facem transformarea următoare:

$$x = 1 + k\alpha \quad , \quad y = k\beta \quad , \quad z = k\gamma \quad , \quad t = k\delta \quad , \quad u = 1 + k\theta, \qquad (22)$$

şi obţinem ecuaţia de gr. II în k:

$$k^2\theta^3 + (3\theta^2 - \alpha^3 - \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)\, k + (3\theta - 2\alpha) = 0.$$

Să punem $3\theta - 2\alpha = 0$, $\theta = \frac{2\alpha}{3}$. Deci

$$k = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 3\theta^2}{\theta^3}.$$

Luând $\alpha = 3\alpha_1$, $\theta = 2\alpha_1$ (α_1 întreg), găsim

$$k = \frac{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 3\alpha_1^2}{8\alpha_1^3}.$$

Introducând această valoare în (22), efectuând toate calculele şi reducerile, şi suprimând numitorul comun, ajungem la soluţiile de forma:

$$x = A\,(3B^2 + 3C^2 + 3D^2 - A^2) \quad , \quad y = B\,(B^2 + C^2 + D^2 - 3A^2),$$

$$z = C\,(B^2 + C^2 + D^2 - 3A^2) \quad , \quad t = D\,(B^2 + C^2 + D^2 - 3A^2),$$

$$u = A^2 + B^2 + C^2 + D^2.$$

Observare. Se poate rezolva ecuaţia diofantică

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = x_{n+1}^3,$$

procedând la fel ca mai sus.

4°. Să luăm şi ecuaţia $x^2 + xy + y^2 = z^3$.

Să facem transformarea

$$x = 1 + ak \quad , \quad y = bk \quad , \quad z = 1 + ck. \qquad (23)$$

Obţinem următoarea ecuaţie de gr. II, spre a determina pe k:

$$c^3 k^2 + (3c^2 - a^2 - ab - b^2)\, k + (3c - 2a - b) = 0.$$

Să luăm $3c = 2a + b$, adică $c = \frac{2a + b}{3}$.

Punând aici $a = 3\alpha$, $b = 3\beta$ avem $c = 2\alpha + \beta$. Atunci avem:

$$k = \frac{a^2 + b^2 - 3c^2 + ab}{c^3} = \frac{3(-\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha\beta)}{(2\alpha + \beta)^3}.$$

Inlocuind în (23), făcând toate calculele şi suprimând numitorul comun, găsim:

$$x = -\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 24\alpha\beta^2 + \beta^3,$$
$$y = 9\beta(-\alpha^2 - \alpha\beta + 2\beta^2),$$
$$z = \alpha^2 + \alpha\beta + 7\beta^2.$$

Exemplu numeric. Luând $\alpha = 2$, $\beta = 3$ avem:

$x = 361$, $y = -540$, $z = 61$; $361^2 - 540 \cdot 361 + 540^2 = 61^3$.

Observare. Putem satisface relaţia $c = \frac{2a+b}{3}$, luând

$a = 3\alpha + r$, $b = 3\beta + r$, sau simplu , $a = 3\alpha \pm 1$, $b = 3\beta \pm 1$.

VII. Să considerăm ecuaţia pitagorică

$$A^2 + B^2 = C^2, \qquad (24)$$

pe care o scriem sub forma

$$A^2 + [A + (B - A)]^2 = [A + (C - A)]^2.$$

Considerăm ecuaţia de gradul II în u:

$$u^2 + (u + B - A)^2 = (u + C - A)^2,$$

adică $u^2 + 2(B - C)u + 2AC - 2AB - A^2 = 0.$

Această ecuaţie ne dă

$u = -(B - C) \pm (A + B - C)$, $u' = A$, $u'' = -A - 2B + 2C.$

Vom scrie, punând $A' = -A - 2B + 2C$:

$$\left.\begin{aligned} A' &= -A - 2B + 2C, \\ B' &= A' + (B - A) = -2A - B + 2C, \\ C' &= A' + (C - A) = -2A - 2B + 3C. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Dacă A, B, C verifică ecuaţia (24), transformarea (25) ne spune că şi A', B', C' verifică tot ecuaţia (24).

VIII. Să luăm ecuaţia

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2, \qquad (26)$$

pe care o scriem sub forma:

$$A^2 + [A + (B - A)]^2 + [A + (C - A)]^2 = [A + (D - A)]^2.$$

Considerând ecuația de gr. II

$$u^2 + (u + B - A)^2 + (u + C - A^2 = (u + D - A)^2,$$

sau $2u^2 + 2(B + C - A - D)u + (B - A)^2 + (C - A)^2 - (D - A)^2 = 0$

$$\therefore \quad 2u^2 + 2(B + C - A - D)u - 2AB - 2AC + 2AD = 0$$

$$\therefore \quad u = \frac{-(B + C - A - D) \pm (A + B + C - D)}{2}.$$

De aici avem: $u' = A \quad , \quad u'' = -B - C + D.$

De aici deducem următoarea transformare

$$\begin{aligned} A' &= -B - C + D \quad , \quad B' = -A - C + D, \\ C' &= -A - B + D \quad , \quad D' = -A - B - C + 2D. \end{aligned} \tag{27}$$

Această transformare ne spune că dacă A, B, C, D verifică ecuația diofantică (26), atunci A', B', C', D' verifică deasemenea ecuația (26).

IX. Dacă vom considera ecuația

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2, \tag{28}$$

pe care o vom scrie sub forma

$$A^2 + [A + (B - A)]^2 + [A + (C - A)]^2 = [A + (D - A)]^2 + [A + (E - A)]^2,$$

și considerăm în concluzie ecuația de gr. II

$$u^2 + (u + B - A)^2 + (u + C - A)^2 = (u + D - A)^2 + (u + E - A)^2,$$

ea ne va da, procedând ca mai sus:

$$u' = A \quad , \quad u'' = -A - 2B - 2C + 2D + 2E.$$

Obținem următoarea transformare

$$\left.\begin{aligned} A' &= -A - 2B - 2C + 2D + 2E, \\ B' &= -2A - B - 2C + 2D + 2E, \\ C' &= -2A - 2B - C + 2D + 2E, \\ D' &= -2A - 2B - 2C + 3D + 2E, \\ E' &= -2A - 2B - 2C + 2D + 3E, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

care ne spune că dacă A, B, C, D, E verifică ecuația (28), atunci A', B', C', D', E' verifică aceeași ecuație.

X. *Aplicații.* Cunoscând o soluție a ecuației (24), putem afla o soluție a ecuației (26), utilizând transformarea (27).

In adevăr, o soluție a ecuației (26) este

$$A = 0 \quad , \quad B = p^2 - q^2 \quad , \quad C = 2pq \quad , \quad D = p^2 + q^2.$$

Transformarea (27) ne dă imediat:

$$A' = 2q^2 - 2pq = 2q(q - p),$$

$$B' = (p - q)^2 \quad , \quad C' = 2q^2 \quad , \quad D' = p^2 - 2pq + 3q^2,$$

soluții care sunt de forma

$$2\alpha\beta \quad , \quad \alpha^2 \quad , \quad 2\beta^2 \quad , \quad \alpha^2 + 2\beta^2,$$

adică

$$(2\alpha\beta)^2 + (\alpha^2)^2 + (2\beta^2)^2 = (\alpha^2 + 2\beta^2)^2,$$

ceece este exact.

Transformările precedente ne permit a avea pentru ecuațiile dela nr. I soluții, ori de câte ori avem o soluție pentru o ecuație care o precede pe aceea considerată. Așa, de exemplu, putem găsi o soluție în numere întregi a ecuației $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^2$, dacă avem o soluție pentru ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Deasemenea putem avea o soluție pentru ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2$, dacă avem o soluție pentru ecuația $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$.

XI. **Notă.** Transformările dela nr. precedent le putem evidenția și altfel. Să considerăm următoarea ecuație diofantică

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2, \tag{30}$$

și fie x_1, y_1, z_1, u_1, o soluție a acestei ecuații, adică

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = u_1^2.$$

Să ne propunem să determinăm pe a astfel ca

$$x_1 - a \quad , \quad y_1 - a \quad , \quad z_1 - a \quad , \quad u_1 - a$$

să fie de asemenea soluții ale ecuației (30), adică

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - a)^2 + (z_1 - a)^2 = (u_1 - a)^2 \quad \therefore \quad a = x_1 + y_1 + z_1 - u_1.$$

Deci avem și soluțiile

$$X_1 = x_1 - a = -y_1 - z_1 + u_1 \quad , \quad Y_1 = y_1 - a = -x_1 - z_1 + u_1,$$

$$Z_1 = z_1 - a = -x_1 - y_1 + u_1 \quad , \quad U_1 = u_1 - a = -x_1 - y_1 - z_1 + 2u_1;$$

aceasta este însă transformarea (27), cu toate consecințele utile pe care le-am semnalat mai sus.

Acelaş procedeu pentru ecuaţia de tipul

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2,$$

şi care ne va conduce la transformarea (29).

XII. Metoda uniformă pe care am întrebuinţat-o în această expunere poate fi reluată şi utilizată cu folos la diverse tipuri de ecuaţii diofantice, omogene sau neomogene. Aşa, de pildă, pentru ecuaţia

$$x^2 + y^2 = z^4,$$

vom putea pune

$$x = 1 + at + bt^2 \quad , \quad y = ct + dt^2 \quad , \quad z = 1 + et, \qquad (31)$$

şi vom obţine ecuaţia de gr. III:

$$(e^4 - b^2 - d^2)\, t^3 + (4e^2 - 2ab - 2cd)\, t^2 + (6e^2 - a^2 - c^2 - 2b)\, t + (4e - 2a) = 0.$$

Această ecuaţie va trebui să fie studiată.

De asemenea se vor putea studia şi următoarele ecuaţii diofantice

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^4 \quad ; \quad x^3 + y^3 = u^3 + v^3;$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^3 + v^3;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^3 + v^3 + w^3 \quad ; \quad x^3 + y^3 = z^4, \text{ etc.}$$

Rezultatele ce am obţinut, le voiu comunica pe calea aceasta cititorilor acestei reviste.

VIRGIL CLAUDIAN.

CONSTRUCŢIA RAZEI DE CURBURĂ LA CURBELE INVERSE

Fie în plan (Fig. 1), faţă de un sistem de coordonate polare, de pol O, punctele $m(r, \varphi)$ şi $\mu(\rho, \varphi)$ inverse în inversiunea $I(O, k^2)$ adică astfel că:

$$r \cdot \rho = k^2. \qquad (1)$$

Fie pe două curbe inverse (C) şi (Γ) ce trec respectiv prin m şi μ, punctele infinit vecine corespunzătoare m_1 şi μ_1, astfel că

$$r_1 \cdot \rho_1 = k^2 \quad \text{şi} \quad (Om, Om_1) \equiv (O\mu, O\mu_1) = d\varphi. \qquad (2)$$

Notăm cu t, t_1 şi τ, τ_1 tangentele orientate, respectiv în punctele m, m_1 şi μ, μ_1 la curbele (C) şi (Γ). Notăm de asemenea:

$$(t, t_1) = dt \quad \text{şi} \quad (\tau, \tau_1) = d\tau \tag{3}$$

unghiurile de contingenţă corespunzătoare. Cu notaţiile obişnuite, se ştie că:

$$(Om, t) = V \quad , \quad (O\mu, \tau) = \pi - V$$
$$(Om_1, t_1) = V + dV \quad , \quad (O\mu_1, \tau_1) = \pi - V - dV.$$

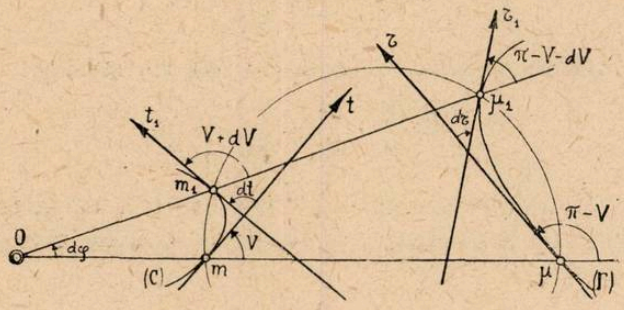


Fig. 1.

Observăm că:

$$(Om, t_1) = (Om, Om_1) + (Om_1, t_1) = (Om, t) + (t, t_1)$$

de unde: $$d\varphi + V + dV = V + dt$$

deci $$d\varphi + dV = dt. \tag{4}$$

Analog:

$$(O\mu, \tau_1) = (O\mu, O\mu_1) + (O\mu_1, \tau_1) = (O\mu, \tau) + (\tau, \tau_1)$$

de unde: $$d\varphi + \pi - V - dV = \pi - V + d\tau$$

$\therefore$ $$d\varphi - dV = d\tau. \tag{5}$$

Rezultă din relaţiile (4) şi (5):

$$dt + d\tau = 2\,d\varphi \tag{6}$$

adică: *unghiul polar a două puncte corespunzătoare pe două curbe inverse este media aritmetică a unghiurilor de contingenţă.*

Notând cu ds şi $d\sigma$ elementele de arc pe curbele (C) şi (Γ), razele lor de curbură sunt:

$$\frac{1}{R_C} = \frac{dt}{ds}, \text{ unde } ds = \sqrt{r'^2 + r^2}\,d\varphi \tag{7}$$

$$\frac{1}{R_\Gamma} = \frac{d\tau}{d\sigma}, \text{ unde } d\sigma = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\,d\varphi. \tag{8}$$

Dar

$$\rho = \frac{k^2}{r} \quad \text{şi} \quad \rho' = -\frac{k^2 r'}{r^2}, \quad \text{încât} \quad d\sigma = \frac{k^2}{r^2} ds. \tag{9}$$

ceea ce se poate stabili şi direct, din asemănarea triunghiurilor Omm_1 şi $O\mu_1\mu$ şi printr'o trecere la limită.

Impărţind relaţia (6) cu ds, avem:

$$\frac{dt + d\tau}{ds} = \frac{2\, d\varphi}{ds}$$

din care, ţinând seama de relaţiile (7), (8), (9) rezultă:

$$\frac{1}{R_C} + \frac{k^2}{r^2} \cdot \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{2}{\sqrt{r'^2 + r^2}}. \tag{10}$$

Fie C centrul cercului ce trece prin O, tangent în m la curba (C) şi fie S diametralul opus lui O în acest cerc (Fig. 2).

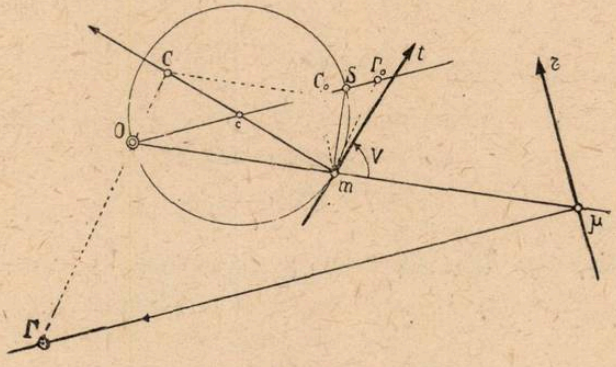


Fig. 2.

Se observă că (OS, mS) = V şi ştiind că $\text{tg}V = \frac{r}{r'}$, rezultă că $m\text{S} = r'$ şi că:

$$\overline{\text{OS}} = \sqrt{r'^2 + r^2} \tag{11}$$

încât ţinând seama şi de (1) relaţia (10) devine:

$$\frac{1}{R_C} + \frac{1}{\frac{r}{\rho} R_\Gamma} = \frac{2}{\overline{\text{OS}}}. \tag{12}$$

Fie C centrul de curbură în m la curba (C), adică $\overline{mC} = R_C$. Se ia pe diametrul OS punctul C_0 astfel că $\overline{OC_0} = R_C$ şi fie Γ_0 punctul definit de raportul armonic:

$$(OSC_0\Gamma_0) = -1. \tag{13}$$

Punctul Γ_0 este deci intersecţia cu OS a simetricei lui mC_0 faţă de mS, de oarece unghiul (mO, mS) este drept.

Dar, relaţia (12) se poate scrie:

$$\frac{1}{\overline{OC_0}} + \frac{1}{\overline{O\Gamma_0'}} = \frac{2}{\overline{OS}} \tag{14}$$

şi traduce raportul armonic:

$$(OSC_0\Gamma_0) = -1 \tag{15}$$

care comparat cu (13) conduce la $\Gamma_0' \equiv \Gamma_0$ şi deci Γ_0 construit ca mai sus conduce la construirea centrului de curbură Γ în μ la curba (Γ). In adevăr din (12) şi (14) rezultă:

$$\frac{\overline{O\Gamma_0}}{r} = \frac{R_\Gamma}{\rho}. \tag{16}$$

Pe de altă parte, observând că OS este paralelă normalei μ la (Γ), ca fiind antiparalelă cu normala în m la (C), faţă de raza vectoare O$m\mu$, rezultă că:

$$(Om,\ O\Gamma_0) = (\mu O,\ \mu\Gamma),$$

încât cu relaţia (16), rezultă că triunghiurile $Om\Gamma_0$ şi $\mu O\Gamma$ sunt asemenea şi invers omotetice şi deci $m\Gamma_0$ e paralelă cu OΓ. Dar $m\Gamma_0$ e paralelă cu OC ca fiind simetrica lui mC_0 faţă de mS (şi mC_0 este antiparalela lui OC faţă de direcţia mS). Rezultă în fine că C, O, Γ *sunt colineare.*

Adică: *curbele inverse au centrele de curbură în punctele corespunzătoare, colineare cu polul de inversiune, iar razele de curbură satisfac relaţia (12) care se mai poate scrie:*

$$\frac{r}{R_C} + \frac{\rho}{R_\Gamma} = 2\sin V.$$

ADRIAN GHEORGHIU.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „V. CONTA" PE ANUL 1948

Comisiunea nu a primit nicio lucrare tipărită sau manuscrisă pentru premiul « V. CONTA », în cursul anului 1947—1948.

Propunem deci ca premiul să nu fie acordat.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „V. CONTA"

G. G. CONSTANTINESCU, C. C. TEODORESCU, ȘERBAN ȚIȚEICA.

Acest raport a fost citit și aprobat în Adunarea generală din 24 August 1948.

NOTE MATEMATICE

7. *Generalizarea problemei 5705.* Proprietatea demonstrată în problema 5705 (G. M. Vol. XLVIII, pag. 565) este un caz particular al următoarei teoreme:

Dacă numerele $N_1, N_2, \ldots N_n$ *sunt asociate ciclice, adică un număr din șir se obține din precedentul mutându-i cifra dela dreapta la stânga lui, și dacă* P *este un divizor al lui* $10^n - 1$, *n fiind numărul cifrelor numerelor* N_i, *perioadele fracțiilor:*

$$\frac{N_1}{P} \; ; \; \frac{N_2}{P} \; ; \; \ldots \frac{N_n}{P}$$

sunt deasemenea numere asociate ciclic.

Demonstrația acestei proprietăți este imediată dacă observăm că

$$N_i = 10\, N_{i-1} - (10^n - 1)\, a_{i-1}$$

unde a_i este cifra cu care începe numărul N_i. In adevăr fie M_i perioada fracției $\frac{N_i}{P}$ și fie α_i cifra cu care începe, avem

$$\frac{10\, N_i}{P} = 10\, A + \frac{10\, M_i}{10^n - 1} = 10A + \alpha_i + \frac{10 M_i - (10^n - 1)\alpha_i}{10^n - 1}$$

$$\frac{N_{i+1} + (10^n - 1)\alpha_i}{P} = 10\, A + \alpha_i + \frac{10 M_i - (10^n - 1)\alpha_i}{10^n - 1}$$

$$\therefore \quad \frac{N_{i+1}}{P} = 10A - \frac{10^n - 1}{P}\, a_i + \alpha_i + \frac{10 M_i - (10^n - 1)\alpha_i}{10^n -}$$

$10M_i - (10^n - 1)\,\alpha_i$ fiind mai mic decât $(10^n - 1)$ urmează că este perioada fracției $\frac{N_{i+1}}{P}$ deci

$$M_{i+1} = 10M_i - (10^n - 1)\,\alpha_i$$

adică perioadele se deduc una din alta după legea de formare a numerelor ciclice, ceeace era de demonstrat.

I. B. FLORESCU.

8. *O relație între combinările simple și combinările cu repetiție.* Ne propunem, în rândurile de mai jos, să stabilim relația

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \Gamma_q^1 & \Gamma_q^2 & \Gamma_q^3 & \dots & \Gamma_q^n \\ 1 & \Gamma_q^1 & \Gamma_q^2 & \dots & \Gamma_q^{n-1} \\ 0 & 1 & \Gamma_q^1 & \dots & \Gamma_q^{n-2} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_q^1 \end{vmatrix} = C_q^n$$

unde C_m^n înseamnă combinări a m obiecte luate câte n și Γ_m^n înseamnă combinări cu repetiție a m obiecte luate câte n.

In adevăr, desvoltând după prima linie avem:

$$\Delta_n = \Gamma_q^1 \begin{vmatrix} \Gamma_q^1 & \Gamma_q^2 \dots \Gamma_q^{n-1} \\ 1 & \Gamma_q^1 \dots \Gamma_q^{n-2} \\ . & . \quad . \\ . & . \quad . \\ . & . \quad . \\ 0 & 0 \dots \Gamma_q^1 \end{vmatrix} - \Gamma_q^2 \begin{vmatrix} 1 & \Gamma_q^2 \dots \Gamma_q^{n-1} \\ 0 & \Gamma_q^1 \dots \Gamma_q^{n-2} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 0 & 0 \dots \Gamma_q^1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \Gamma_q^3 \begin{vmatrix} 1 & \Gamma_q^1 & \Gamma_q^3 & \Gamma_q^4 \dots \Gamma_q^{n-1} \\ 0 & 1 & \Gamma_q^2 & \Gamma_q^3 \dots \Gamma_q^{n-2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \Gamma_q^1 \end{vmatrix} - \dots + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \Gamma_q^1 \dots \Gamma_q^{n-2} \\ 0 & 0 \dots \Gamma_q^{n-3} \\ 0 & 0 \quad 1 \dots \\ . & . \quad . \\ . & . \quad . \\ . & . \quad . \\ 0 & 0 \quad 0 \dots 1 \end{vmatrix}$$

In virtutea notației din enunț, determinanții din membrul al 2-lea sunt:

$$\Delta_{n-1},\ \Delta_{n-2},\ \ldots,\ \Delta_1 = \Gamma_q^1,\ \Delta_0 = 1$$

astfel că avem:

$$\Delta_n = \Gamma_q^1 \Gamma_{n-1} - \Gamma_q^2 \Delta_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} \Gamma_q^{n-1} \Delta_1 + (-1)^{n-1} \Gamma_q^n. \quad (1)$$

Acum vom întrebuința metoda inducției complete, adică vom presupune că relația din enunț este adevărată când în locul lui n luăm $1, 2, \ldots, n-1$ și vom arăta apoi că ea este adevărată și pentru n.

In adevăr, în baza acestei presupuneri, putem scrie:

$$\Delta_{n-1} = C_q^{n-1}\ ,\ \Delta_{n-2} = C_q^{n-2}, \ldots,\ \Delta_1 = C_q^1$$

și atunci relația (1) devine:

$$\Delta_n = \Gamma_q^1 C_q^{n-1} - \Gamma_q^2 C_q^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} \Gamma_q^{n-1} C_q^1 + (-1)^{n-1} \Gamma_q^n. \quad (2)$$

Dar considerând identitatea:

$$1 = (1+x)^q \cdot (1+x)^{-q}$$

unde presupunem $|x| < 1$, desvoltând după binomul lui NEWTON, avem:

$$1 = (1 + C_q^1 x + C_q^2 x^2 + \ldots + C_q^q)(1 - \Gamma_q^1 x + \Gamma_q^2 x^2 - \Gamma_q^3 x^3 + \ldots)$$

și identificând coeficienții lui x^n din ambii membri, obținem:

$$0 = \Gamma_q^n - \Gamma_q^{n-1} C_q^1 + \Gamma_q^{n-2} C_q^2 + \ldots + (-1)^{n-2} \Gamma_q^1 C_q^{n-1} + (-1)^{n-1} C_q^n$$

de unde deducem:

$$C_q^n = \Gamma_q^1 C_q^{n-1} - \Gamma_q^2 C_q^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} \Gamma_q^{n-1} C_q^1 + (-1)^{n-1} \Gamma_q^n.$$

In virtutea acestei identități relația (2) devine:

$\Delta_n = C_q^n$, tocmai ceeace ne propusesem să demonstrăm.

Intre combinările cu repetiție și combinările obicinuite mai avem și relația

$$\begin{vmatrix} -C_q^1 & C_q^2 & -C_q^3 & \ldots & (-1)^n C_q^n \\ 1 & -C_q^1 & C_q^2 & \ldots & (-1)^{n-1} C_q^{n-1} \\ 0 & 1 & -C_q^1 & \ldots & (-1)^{n-2} C_q^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -C_q^1 \end{vmatrix} = (-1)^n \Gamma_q^n$$

demonstrată de d-l Prof. V. ALACI in *Revista Matematică din Timișoara*, vol. XV, pag. 58.

ILIE N. CONSTANTINESCU.

9. *Două triunghiuri și o cubică asociată.* Fie date triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ ale căror laturi opuse BC, B_1C_1, CA, C_1A_1; AB, A_1B_1 se întâlnesc respectiv în A_0, B_0, C_0 precum și A_a (BC_1, CB_1), B_b (CA_1, AC_1), C_c (AB_1, BA_1). Luând un punct M în plan, dreptele MA, MB, MC, taie laturile corespunzătoare ale triunghiului $A_1B_1C_1$ în A', B', C'. *Se cere locul geometric al punctului* M *pentruca* A', B', C' *să fie colineare.* Pentru aceasta voi determina punctele M ale locului pe o dreaptă Δ, din plan. Dacă M descrie dreapta Δ, punctele A', B', C' descriu pe B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 diviziuni omografice. Intr'adevar, fiind dat punctul A' rezultă imediat punctul M pe Δ deci și B', C' și reciproc. Rezultă că dreptele A'B', A'C' înfășoară două conici (C_b) și (C_c) tangente respectiv dreptelor C_1A_1, C_1B_1 și B_1A_1, B_1C_1. Pentru cele patru tangente comune ale conicelor C_b, C_c rezultă punctele A', B', C' colineare. Conice C_b și C_c au ca tangentă comună dreapta B_1C_1. Pentru ca dreapta A'B'C' să se confunde cu B_1C_1 trebue ca $B' \equiv C_1$, $C' \equiv B_1$ de unde ar rezulta că dreptele BC_1, CB_1 să fie concurente pe Δ lucru ce în general nu se întâmplă. Rezultă că numai pentru celelalte trei tangente comune ale conicelor C_b și C_c punctele A', B', C' pot fi colineare, iar M pe Δ, rezultând:

A) *Locul lui* M *este o cubică* (Γ), *trecând prin vârfurile triunghiurilor* ABC, $A_1B_1C_1$ *și prin punctele* A_0, B_0, C_0, $A_aB_bC_c$ *după cum ușor se poate constata.*

Acest rezultat se poate încă enunța:

B) *Prin punctele* A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_0, B_0, C_0, A_a, B_b, C_c *trece o cubică.*

Căutând acum locul punctelor M astfel ca dreptele MA_1, MB_1, MC_1 să taie laturile triunghiului ABC în trei puncte colineare vom găsi ca rezultat o cubică (Γ') trecând prin aceleași douăsprezece puncte de mai sus, de unde rezultă (Γ) ≡ (Γ'). De aici rezultă:

C) *Dacă dreptele* MA, MB, MC *întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului* $A_1B_1C_1$ *în trei puncte colineare, proprietatea e reciprocă* (N. BOTEA. G. M. XXXVIII p. 429).

Proprietatea *C)* pune în evidență o proprietate remarcabilă a cubicei (Γ) aici asociată celor două triunghiuri considerate.

Presupunând că punctul M descrie cubica (Γ) și se apropie de vârful A (de exemplu), atunci dreapta MA care e tot una MA'

tinde către tangenta în A la cubica (Γ). Rezultă de aici următoarea construcție simplă a tangentei în A la cubica (Γ):

D) *Dreptele* AB, A_1C_1 *și* AC, A_1B_1 *se taie respectiv în* A_b A_c. *Dreapta* A_bA_c *taie pe* B_1C_1 *în* A_2. *Dreapta* AA_2 *este tangenta căutată în* A *la* (Γ) căci se vede că A_b, A_c, A_2 sunt respectiv B, C', A' in cazul $M \equiv A$.

Ținând seama că cubica are trei direcții asimptotice, putem încă enunța:

E) *Există trei direcții în general distincte astfel că dreptele duse prin* A, B, C *paralel cu aceste direcții să taie laturile triunghiului* $A_1B_1C_1$ *în trei puncte colineare, în care caz proprietatea e reciprocă.*

Dacă trei din vârfurile triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ sunt colineare (de ex. B, C și A_1) cubica (Γ) se descompune în dreapta BC și o conică trecând prin A_1, B_1, C_1, B_0, C_0.

In mod analog deducem că dacă punem condiția ca punctele A'B'C' să fie picioarele a trei ceviene concurente — în triunghiul $A_1B_1C_1$ sau într'un al treilea $A_3B_3C_3$ — locul lui M este tot o cubică.

M. D. POPA.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI. FACULTATEA DE CONSTRUCȚII

Examenul de analiză. Iulie 1948

I. Se dă ecuația diferențială

$$xy'' - y' - 4x^3y = 0 \qquad (1)$$

și se cere:

1°. Să se determine cea mai simplă funcțiune $f(t)$ astfel în cât făcând schimbarea de variabilă

$$x = f(t)$$

ecuația transformată să nu conțină termenul de primul ordin.

2°. Să se integreze ecuația transformată deducându-se integrala generală a ecuației

$$xy'' - y' - 4x^3y = x^2 + e^{mx^2}$$

discutându-se forma ei după valorile parametrului m.

3°. Să se arate că funcţiunea $\lambda(x)$, care multiplicând primul membru al ecuaţiei (1) este astfel încât acesta este derivata unei funcţiuni de forma

$$A(x)y' + B(x)y,$$

verifică o ecuaţie diferenţială lineară de aceeaşi formă cu ecuaţia (1).

II. Funcţiunea $y(x)$ verifică relaţiunile

$$y'' = y\cos^2 u \qquad y' = y\sin u$$

în care y' şi y'' sunt primele două derivate ale lui y în raport cu x, iar u o funcţiune necunoscută de x care joacă rolul unui parametru.

Se cere:

1°. Să se calculeze $\frac{dx}{du}$ în funcţiune de u şi apoi $\frac{dy}{du}$ în funcţie de u şi y.

2°. Să se exprime explicit x şi y în funcţie de u şi să se arate că y^2 verifică o ecuaţie diferenţială de forma

$$\frac{dz^2}{dx^2} - k^2 z = 0.$$

III. Să se calculeze integralele nedefinite

$$\int \frac{x^2 dx}{(x\sin x + \cos x)^2} \quad \text{şi} \quad \int \frac{x^2 dx}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

făcând schimbarea de variabilă definită de

$$x - \operatorname{arctg} x = y.$$

BIBLIOGRAFIE

Actes du V-e Congrès International d'Histoire des Sciences. Lausanne (30 Sept.—6 Oct. 1947). Académie Internationale d'Histoire des sciences Herman & C-ie éditeurs. Paris.

Endeavour. Vol. VII. Nr. 27. 1948.

Quarterly of applied mathematics. Vol. VI. Oct. 1948. Nr. 3. B. EPSTEIN: A method for the solution of the DIRICHLET problem for certain types of domains.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVIII. Nr. 8. Octombrie 1948. E. ARGHIRIADE; Observaţiuni asupra teoremei lui ROLLE. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

A. GLODEN. Miscellanées mathématiques. 1948. Cuprinde extrase cu următoarele subiecte: Sur la résolution de la congruence

$$x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Solutions minima de la congruence

$$x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}, \quad \alpha = 2, 3 \text{ ou } 4 \text{ pour } p < 10^3.$$

Sur les nombres terminaux des cubes dans le système de numération décimal. Un noveau théorème sur les multigrades. (Extrase din *Revista Euclides*, Madrid). Un procédé élémentaire de résolution de l'équation diophantienne

$$Ax^3 + By^3 = Cz^3.$$

(Extr. din *Mathesis*) şi Analisi diofantea multigrados (traducerea notei din *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, pag. 429).

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 124 (G. M., Vol. XXXI, 33). Se întreabă dacă se poate conchide cert că era introdus în ţară cuvântul *milion* pe timpul lui RADU VODĂ MIHNEA.

RADU MIHNEA a domnit în Moldova şi Muntenia între anii 1611—1626, deci în secolul al XVI-lea. Iată ce spune d-l Prof. Dr. H. SCHUBERT în *Astra Nouă* [1], Nr. 16 la pag. 85:

« Cât priveşte vorbele « milion şi bilion *», nici una nu-i mai veche de două sute ani. Marele matematician al secolului al 16-lea,* ADAM RIESE, *nu cunoaşte încă vorba milion, de şi era calculator cu numere mai mari de şase cifre; el se ajuta aşa că zicea: o mie de mii, în locul milionului de astăzi.*

Cea mai tânără odraslă a numerelor noastre, cuvântul devenit astăzi atât de familiar « un miliard *» — în loc de o mie de milioane — întrebuinţat mai întâi în limba financiarilor, cu greu va fi având o dată mai veche de 1830 ...».*

Deci concluzia este că cuvântul *milion* nu era introdus în ţară pe vremea lui RADU VODĂ MIHNEA.

LT. COL. E. ST. IACOB.

DIVERSE

D-l Ing. I. S. ANTONIU, a fost proclamat Doctor Inginer în ziua de 27 Oct. 1948 susţinând subiectul *Studiul funcţionării aparatelor de măsură în regim deformant*, în faţa comisiei compusă din d-nii profesori: Ing. C. BUDEANU, GH. PETRESCU şi T. TĂNĂSESCU, membri.

1) Tipărită la Bucureşti în sec. XX, editura IG. HERTZ.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2609. *Se dă seria*

$$1-\frac{x}{T_1}+\frac{x^2}{T_1 T_2}-\frac{x^3}{T_1 T_2 T_3}+\ldots$$

în care T_i *este al i-lea număr triunghiular. Pentru ce valoare a lui* x *suma seriei este nulă?*

I. IONESCU.

Ştim că $T_i=\frac{i(i+1)}{2}$, deci seria dată se poate scrie

$$S(x)=\sum_0^\infty (-1)^n \frac{2^n x^n}{n!\,(n+1)!}.$$

Punând $x=\frac{z^2}{2^3}$, obţinem

$$S\left(\frac{z^2}{2^3}\right)=\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}.n!\,(n+1)!}.$$

Să reamintim acum că prin desvoltarea

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(z)$$

se definesc funcţiunile $J_m(z)$, cunoscute sub numele de *coeficienţii lui* BESSEL:

$$J_m(z)=\sum_0^\infty (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2n}}{n!\,(m+n)!}.$$

Aceste funcţiuni sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-n^2)\,y=0.$$

Ele îşi găsesc aplicaţii multiple în fizică şi se definesc şi sub forma de integrală

$$J_m(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)\,d\theta.$$

Observăm că

$$\frac{z}{2} S\left(\frac{z^2}{2^3}\right) = J_1(z).$$

şi că deci zerourile lui S depind de cele ale lui $J_1(z)$.

Problema zerourilor coeficienţilor lui BESSEL este una dintre cele mai dificile din teoria funcţiilor. LOMMEL a arătat că J_m are o infinitate de zerouri, toate reale. Natura acestor zerouri nu este însă deloc simplă. Se crede ca foarte probabilă afirmaţia că zerourile lui $J_m(z)$, afară de $z = 0$, sunt numere *transcendente*, adică nu pot fi rădăcini ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi.

Pentru valori mici ale lui *m*, s'au calculat aceste valori.

Pentru $J_1(z)$, zerourile pozitive în ordinea crescătoare sunt

3,8317060...; 7,0155867...; 10,1734681...; ...

(G. N. WATSON, *A treatise on the Theory of* BESSEL *Functions*, p. 748).

Cunoscând zerourile lui J_1, deducem imediat pe cele ale lui $S(x)$, prin relaţia

$$\frac{z^2}{2^3} = x.$$

$S(x)$ va avea deci numai zerouri pozitive, ceea ce era uşor de văzut. Cel mai mic zero al lui $S(x)$ este

$$\frac{3{,}831706^2}{8} = 1{,}835246...$$

PROBLEMA 3780. *Se dă cercul cu centrul* O *şi un diametru* AB. *Fie* BE *tangenta în* B *la cercul* O. *Pe cerc, se ia un punct mobil* M. *Tangenta în* M *la cerc, taie pe* BE *în* N. *Pe această tangentă, se iau segmentele*

$$NQ = NP = ON \quad \text{şi} \quad NR = NM = NB$$

Se cere locul geometric al punctelor P, Q, R.

M. NICOLAU.

Soluţie dată de d-l E. N. WEGENER (Student inginer, Bucureşti).

Raportăm figura la diametrul AB şi la diametrul paralel cu tangenta BN. Fie

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ecuația cercului O și M (R cos θ, R sin θ) un punct variabil pe el. Ecuația tangentei NM este

$$x \cos \theta + y \sin \theta - R = O \qquad (1)$$

Coordonatele lui N sunt

$$x = R\,,\ y = R\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = R \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

Din aceste elemente se deduce

$$ON = \sqrt{R^2 + R^2 \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{\theta}{2}} \text{ și } NB = R \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

Locul punctelor P *și* Q. Aceste puncte se găsesc la intersecția tangentei (1) cu cercul de centru N și raza ON, adică cercul de ecuație

$$x^2 + y^2 - 2Rx - 2Ry \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = 0 \qquad (2)$$

Locul punctelor P, Q se află eliminând pe θ între (1) și (2). Eliminarea se face înlocuind în (1) pe *cos* θ și *sin* θ respectiv prin

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} \text{ și } \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}$$

iar în rezultat se introduce valoarea lui $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ scoasă din (2). Se găsește ca rezultat curba de ecuație

$$x[4R^2y^2 - (x^2+y^2-2Rx)^2] + 4y^2(x^2+y^2-2Rx) =$$
$$= R[4R^2y^2 + (x^2y^2 - 2Rx)^2]$$

Locul punctelor R. Acest loc se găsește eliminând pe θ între (1) și ecuația cercului cu centrul în N și cu raza NB, adică

$$x^2 + y^2 - 2Rx - 2R\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}y + R^2 = 0 \qquad (3)$$

Scoțând pe $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ din (3) și ducând rezultatul în (1) ca în cazul precedent se găsește că punctul R descrie curba de ecuație:

$$x[4R^2y^2-(x^2+y^2-2Rx+R^2)^2]+4Ry^2[x^2+y^2-2Rx+R^2]=$$
$$=R[4R^2y^2+(x^2+y^2-2Rx+R^2)^2]$$

Notă. Locul lui R este o cisoidă DIOCLES și se poate găsi geometric. Iată o cale pentru a-l afla Fie A′ simetricul lui A față de B D intersecția lui BR cu perpendiculara în A′ pe AB și M′ proiecția lui A′ pe BD. Triunghiul MBR este dreptunghic în B pentrucă prin construcție

$$NM = NR = NB$$

M′ descrie cercul fix de diametru BA′. Triunghiurile dreptunghice AMB, BM′A′ având ipotenuzele egale și catetele BM, A′M′ paralele sunt egale, deci BM = A′M′. Rezultă că triunghiurile MBR și A′M′D sunt egale, având și unghiurile MBR, DA′M egale, urmează că

$$BR = M'D$$

ceeace arată că, întrucât D descrie dreapta fixă A′D și M′ cercul fix de diametru BA′, punctul R descrie cisoida lui DIOCLES cu punctul dublu în B și asimptota A′ D.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5500. *Să se demonstreze că dacă* (D^2-1) *se împarte exact prin 15, produsul numerelor a și b, care verifică egalitatea*

$$a^2 - Db^2 = 1$$

se împarte de asemenea cu 15.

I. B. FLORESCU.

Soluție dată de d-nii: P. P. DRĂGHICESCU, DUMITRU GH. VASILIU, AUREL N. POPA, IOAN T. MUNTEANU și C. CORDUNEANU.

Dacă avem

$D-1 \equiv 0 \pmod 4$ atunci $a^2 \equiv 1 + b^2 \pmod 3$

și deci $a^2 \equiv 1$, $b^2 \equiv 0 \pmod 3$ (1)

căci un patrat nu poate avea, față de divizorul 3, de cât resturile 0 sau 1. Din (1) rezultă

$$ab \equiv 0 \pmod 3.$$

Dacă însă

$$D + 1 \equiv 0 \pmod 3 \quad \therefore \quad a^2 \equiv 1 \text{ şi } b^2 \equiv 0 \pmod 3$$

care duce la aceeaşi concluzie.

Faţă de divizorul 5, avem la fel:

Dacă $D - 1 \equiv 0 \pmod 5$ $\therefore$, $a^2 \equiv 1 + b^2 \pmod 5$ (2)

Din (2) se deduce

$a^2 \equiv 0$, $b^2 \equiv 4 \pmod 5$ sau $a^2 \equiv 1$, $b^2 \equiv 0 \pmod 5$

căci resturile diviziunei unui patrat perfect prin 5 sunt 0, 1 sau 4.

Dacă $D + 1 \equiv 0 \pmod 5$ $\therefore$ $a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod 5$ şi

$a^2 \equiv 1$, $b^2 \equiv 0 \pmod 5$ sau $a^2 \equiv 0$, $b^2 \equiv 1 \pmod 5$.

Deci teorema este demonstrată.

PROBLEMA 5950. *Pentru aplicarea principiului* **conservării neştiinţei,** *aviaţia anglo-americană a bombardat oraşul Bucureşti în ziua de 4 Aprilie 1944, la ora* 13^{30} *(când s'a oprit ceasul dela clădirea gării de Nord), doborînd construcţii, stricând comunicaţii şi stingând vieţi omeneşti. Analele din Anglia şi Statele Unite vor înregistra probabil această ispravă.*

Se întreabă în ce zi şi la ce oră vor scrie că au făcut-o?

I. IONESCU.

Diferenţa între ora legală (ora fusului orar) Bucureşti şi Londra fiind de 2 ore, iar între Bucureşti şi Washington fiind de 7 ore, analele din Londra vor înregistra că bombardamentul s'a făcut în ziua de 4 Aprilie 1948 ora 11^{30}, iar cele din Washington în aceeaşi zi la ora 4^{30}.

P. P. TEODORESGU.

Dacă se consideră ora *locală mijlocie* atunci trebue să se ţină seamă de următoarele corespondenţe de ore: Bucureşti $1^h44^m23^s,180$ = Berlin $0^h53^m27^s,70$ = Paris $0^h9^m20^s,93$ = Londra 0^h = Washington $18^h51^m53^s,76$.

PROBLEMA 6006. *In ziua de 24 August 1944, orele 10,20 aviația germană a bombardat Bucureștii cu efecte dezastruoase, mai mari ca bombardamentul din 4 Aprilie a. c.*

Pentru acest nou bombardament se propune aceeași chestiune ca în problema Nr. 5950 din „Gazeta Matematică" Nr. 9, anul XLIX, luând ca localitate Berlinul.

I. IONESCU.

Ținând seamă de faptul că diferența oficială de oră între București și Berlin este de 1 oră, analele berlineze vor înregistra că au făcut bombardamentul în ziua de 24 August 1944 orele 9^{20}.

PETRE P. TEODORESCU.

PROBLEMA 6053. *Între* A *și* B *sunt mai puține numere prime de cât între* A^2 *și* AB *sau între* AB *și* B^2.

I. LINTEȘ.

In *Teoria Indicatorilor* de I. LINTEȘ, se demonstrează la pag. 101 că *între* A *și* B *sunt mai puține numere prime de cât între* KA *și* KB. In particular pentru K = A sau K = B este tocmai cazul din enunțul problemei de față, care se consideră astfel rezolvată.

Au dat aceste indicațiuni d-nii: GH. D. BRAȘOVEANU, M. R. CONSTANTINESCU, D. I. CRĂCEA, C. C. DIACONU, G. ENESCU, PETRE F. IONESCU, M. A. LEON și GEORGE M. NICOLAE.

D-nii: GH. D. BRAȘOVEANU și AL. N. PANTEA arată că problema este cuprinsă în articolul *Asupra distribuției numerelor prime*, publicat de propunător în *Gazeta Matematică* la pag. 113 din Vol. L, în care a fost propusă și problema de față.

PROBLEMA 6293. 1°. *In orice poligon regulat* ABC..., *cu un număr de laturi* $\geqslant 7$, *avem relațiile:*

$$\left(\frac{\overline{AB}}{R}\right)^2+\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=3\ ;\quad \left(\frac{\overline{AB}}{R}\right)^2+\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2=4\ ; \qquad (1)$$

R, *fiind raza cercului circumscris poligonului.*

2°. *Din* (1) *să se deducă relația:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\ ;$$

cunoscută pentru orice eptagon regulat.

3°. *Folosind relațiile* (1) *să se calculeze cu 2 zecimale exacte, lungimile* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, *ale laturilor eptagonului regulat știind că*:

$$4\,\overline{AD} = 5\,\overline{AC}.$$

C. MIHU.

Soluție. dată de d-l MIHAI R. CONSTANTINESCU, (stud. Ing. Politehnica București.

1°. Fie $n \geqslant 7$ numărul laturilor poligonului regulat ABC..., înscris în cercul de rază R și cu centrul în punctul O. Să notăm cu 2α, unghiul la centru, corespunzător arcului AB; avem:

$$\overline{AB} = 2\,R\sin\alpha \;\;;\;\; \overline{AC} = 2R\,.\,\sin 2\alpha \;\;;\;\; \overline{AD} = 2R\,.\,\sin 3\alpha;$$

unde $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Relațiile (1) devin:

$$\left(\frac{\overline{AB}}{R}\right)^2 + \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = 4\,.\,\sin^2\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 4\sin^2\alpha + \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= 4\,.\,\sin^2\alpha + 3 - 4\sin^2\alpha = 3;$$

$$\left(\frac{\overline{AB}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = 4\sin^2\alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{\sin^2\alpha} = 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 4;$$

2°. Scăzând relațiile (1) membru cu membru, găsim:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = -1; \quad \text{sau:} \quad \frac{\overline{AD} + \overline{AB}}{\overline{AB}} = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2$$

amplificând ultima relație cu $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ obținem:

$$\frac{\overline{AD} + \overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\;; \quad \text{sau:} \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\;;$$

3°. Va trebui să rezolvăm sistemul de ecuații:

$$\overline{AC} = \frac{4}{5}\,\overline{AD} \;\;;\;\; \left(\frac{\overline{AB}}{R}\right)^2 + \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = 3 \;\;;\;\; \left(\frac{\overline{AB}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = 4\;;$$

Dacă notăm: $\frac{\overline{AB}}{R} = x$; $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = y$; ultimile 2 ecuaţii (eliminând pe $\overline{AC}$, cu ajutorul primei) devin:

$$x^2 + y = 3 \quad ; \quad 25x^2 + 16y^2 = 100$$

sau, eliminând pe x^2, obţinem

$$16y^2 - 25y - 25 = 0;$$

$$\therefore \qquad y = \frac{25 \pm 5\sqrt{89}}{32} \quad ; \quad y = 2{,}25;$$

$$x^2 = 3 - y = 3 - 2{,}25 = 0{,}75 \quad ; \quad x = 0{,}86;$$

Am luat mumai valorile pozitive ale lui x şi y.

Revenind la notaţiile de mai sus, găsim:

$\overline{AB} = 0{,}86R$; $\overline{AD} = 2{,}25 \times 0{,}86R = 1{,}93R$; $\overline{AC} = 0{,}8 \times 1{,}93R = 1{,}54R$.

Notă. Au mai rezolvat problema d-nii: A. I. VARGĂ şi CEZAR U. I. BOERESCU (Politehnica Bucureşti), EUGEN A. DEDU şi MIHAI V. I. DĂSCĂLESCU (liceul Mihai Viteazul Bucureşti), BUCUR AL. NICULAE (liceul Titu Maiorescu Bucureşti), P. P. TEODORESCU (liceul M. Basarab Bucureşti), N. A. CERNESCU (liceul En. Văcărescu-Târgovişte), VIRGIL G. CONSTANTINESCU şi I. D. CRĂCEA (liceul R. Greceanu Slatina) şi VALERIU AL. PETCU (liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti).

C. MIHU.

PROBLEMA 6319. *O autocisternă străbate un drum rectilin şi orizontal cu o mişcare uniform accelerată, viteza sa iniţială fiind* v_0 *iar acceleraţia* w. *Dintr'un punct al platformei acestei autocisterne, la intervale de timp T, cad dela înălţimea* h *a platformei, picături de lichid, căderea primei picături coincizând cu plecarea autocisternei. Să se determine distanţele dintre urmele lăsate pe drum de picăturile de lichid.*

Rezistenţa aerului se va neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de d-nii: EMIL CONSTANTINESCU, M. R. CONSTANTINESCU, M. D. POPA, C. N. BOERESCU, AL. GH. MORAITE (Politehnica Bucureşti), IOAN KINSKY (Timişoara), M. MIHĂLCIOIU (Liceul Militar Craiova), N. A. BUCUR (Bacalaureat, Bucureşti) şi VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Liceul „R. Greceanu", Slatina).

Să considerăm origina O a spațiului și a timpului în momentul plecării autocisternei.

Spațiul s străbătut de acest vehicul în timpul t va fi dat de ecuația mișcării:

$$s \quad v_0 t + \frac{1}{2} w t^2$$

și *viteza* sa v la același moment t va fi

$$v = v_0 + wt$$

In clipa când cade a $(n+1)$ picătură de lichid, $t = n\mathrm{T}$, iar:

$$s = nv_0\mathrm{T} + \frac{1}{2} n^2 w\mathrm{T}^2 \quad \text{și} \quad v = v_0 + nw\mathrm{T}.$$

Timpul t_1 necesar ca picătura să străbată distanța h dela platformă până la drum ne va fi dat de relația:

$$\frac{1}{2} g t_1^2 = h \quad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

iar a $(n+1)$ picătură va străbate distanța orizontală $s_{n-1} = \mathrm{OA}_{n+1}$:

$$\mathrm{OA}_{n+1} = \mathrm{s} + vt_1$$

$$\mathrm{OA}_{n+1} = nv_0\mathrm{T} + \frac{1}{2} n^2 w\mathrm{T}^2 + (v_0 + nw\mathrm{T}) \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (1)$$

Pentru a obține distanța OA_n pe care o străbate picătura a n^a, înlocuim în (1) pe n cu $n-1$:

$$\mathrm{OA}_n = (n-1)v_0\mathrm{T} + \frac{1}{2} (n-1)^2 w\mathrm{T}^2 + [v_0 + (n-1)w\mathrm{T}] \cdot \sqrt{\frac{2h}{h}} \qquad (2)$$

Rezultă pentru distanța d_n dintre urmele A_{n+1} și A_n ale picăturilor:

$$d_n = \mathrm{OA}_{n+1} - \mathrm{OA}_n = v_0\mathrm{T} + \frac{2n-1}{2} w\mathrm{T}^2 + w\mathrm{T} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

De unde:

$$d_n - d_{n-1} = w\mathrm{T}^2.$$

Prin urmare, distanțele dintre urmele picăturilor lăsate pe șosea de autocisternă, *cresc necontenit în progresie aritmetică cu rația* $w\mathrm{T}^2$, distanța d_1 dintre primele două urme fiind:

$$d_1 = v_0\mathrm{T} + \frac{1}{2} w\mathrm{T}^2 + w\mathrm{T} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

AL. ST.

PROBLEMA 6324. *Dându-se latura* BC *a unui triunghiu, să se afle locul vârfului* A, *încât înălțimea* AD, *bisectoarea* BE *și mediana* CF *să fie concurente. Să se indice construcția grafică a unui astfel de triunghiu, când se dau* BC *și* AB *în mărime.*

CEZAR I. BOERESCU.

1°. *Soluție* dată de d-l M. D. POPA (Politehnica București). Dreptele AD, BE, CF fiind concurente, relația lui CEVA ne dă:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1. \qquad (1)$$

Cum însă:

$$\overline{FA} = -\overline{FB} \text{ și } \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$$

relația de mai sus devine

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = 1 \qquad (2)$$

P fiind intersecția laturei AC cu perpendiculara în C pe BC, avem

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$$

și relația (1) devine

$$\overline{AP} = \overline{BC} = C^t.$$

După cum se vede, locul punctului A este *concoida lui* NICOMEDE de pol B, relativă la dreapta CP.

Ea are în B un punct de întoarcere și asimptota CP.

Din relația (1) se observă că dacă BE este bisectoarea interioară a unghiului B, primele două rapoarte fiind negative, este necesar ca și $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$ să fie negativ, adică F situat între A și B.

In acest caz locul lui A este numai ramura dela stânga asimptotei CP.

Se mai observă din (1) că dacă BE este bisectoarea exterioară a unghiului B, produsul ultimelor 2 rapoarte este negativ și trebue deci ca $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$ să fie pozitiv, adică D să fie în afara lui BC.

In acest caz locul lui A este ramura concoidei situată la dreapta lui CP.

Construcția triunghiului ABC este evidentă.

In cazul bisectoarei interioare, perpendiculara în C pe BC este tăiată de cercul cu centrul în B și rază $\overline{AB} + \overline{BC}$ în 2 puncte simetrice față de BC, P_1 și P_2. Pe P_1B și P_2B se iau în spre B segmentele P_1A_1 și P_2A_2 egale cu $\overline{BC}$.

Triunghiurile căutate sunt A_1BC și A_2BC.

In cazul bisectoarei exterioare se obțin punctele P_1 și P_2 luând cercul cu centrul în B și rază $\overline{AB} - \overline{BC}$, iar vârfurile A_1, A_2 luând pe BP_1 și BP_2 segmente în sens opus lui B, egale cu $\overline{BC}$.

Problema este totdeauna posibilă în cazul bisectoarei interioare și are două soluții. In cazul bisectoarei exterioare este posibilă numai dacă $\overline{AB} - \overline{BC} > \overline{BC}$ adică $\overline{AB} > 2\,\overline{BC}$, când are deasemenea 2 soluții.

2°. *Soluție analitică* Luând BC ca axa *x-lor* și B origine, fie $C(a, o)$ și $A(\alpha, \beta)$.

Ecuațiile dreptelor care ne interesează sunt:

$$(AD)\quad x = \alpha\,, \qquad (BE)\quad y = \frac{\alpha y - \beta x}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\,, \qquad (CF)\quad y = \frac{\beta(x-a)}{\alpha - 2a}\,.$$

Eliminând x și y între ele, obținem:

$$\pm(\alpha - a)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = a\alpha$$

în care, punând $\alpha = \rho\cos\theta$ și $\beta = \rho\sin\theta$ găsim:

$$\pm\rho(\rho\cos\theta - a) = a\rho\cos\theta$$

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm a$$

care este locul vârfului A, adică o *concoidă a lui* NICOMEDE [1].

Discuția și construcția triunghiului ABC, ca la soluția 1ª.

Notă. a) O soluție analitică diferită, luând originea în mijlocul lui BC, a dat d-l MIHAI R. CONSTANTINESCU (Politehnica București) d-sa nu a arătat ce curbă este locul lui A dar a găsit locul intersecției celor 3 drepte.

D-l VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Lic. Slatina) a dat o soluție analitică apropiată de cea de față. Nu a indicat modul de construcție al triunghiului ABC.

1) N. ABRAMESCU — *Geometria analitică*, pag. 266.

D-l I. KINSKY (stud. inginer Timişoara) a dat o soluţie analitică similară cu aceea a d-lui M. R. CONSTANTINESCU.

b) D-l M. R. CONSTANTINESCU a arătat că triunghiul ABC este un *triunghiu special,* în care avem relaţiile:

$$\cos B = \frac{a}{a+c} \quad \text{şi} \quad a\cos B = b\cos C. \tag{3}$$

Triunghiul acesta, este cunoscut [1] şi studiat în parte chiar din 1906, în revista *Mathesis*, într'n notă, sub forma: *triunghiul în care piciorul înălţimei din* A, *al medianei din* C *şi acela al bisectoarei exterioare din* B *sunt colineare.*

Se dau acolo relaţiile (3) precum şi relaţia $\overline{AP} = \overline{BC} = C^t$.

In altă notă din aceeaşi revistă [2] se studiază din nou acest triunghiu, punându-se în evidenţă proprietatea: *diametrul vârfului* A, *cu bisectoarea din* B *şi simediana din* C *să fie concurente*, care este o consecinţă a primei, dreptele concurente în al 2-lea caz fiind izogonalele primelor.

Punctele de concurenţă în cele două cazuri sunt deci izogonale.

O altă proprietate a acestor triunghiuri speciale este relaţia între unghiuri:

$$\sin A = \operatorname{tg} B \cdot \cos C.$$

In fine, regretatul V. CRISTESCU [3] a reamintit într'unul din articolele sale de Geometria triunghiului despre acest triunghiu special şi cele câteva proprietăţi cunoscute.

Incheiem nota de faţă cu o recomandaţie. *Gazeta Matematică* tinde să dea orizont cercetărilor în soluţiile diferitelor probleme ce propune. Este necesar deci să se studieze întreaga bibliografie a chestiunilor.

M. I. F.

EXERCIŢII

1. *Să se găsească valorile lui* x *şi* y *care satisfac ecuaţia*

$$y^2 (x^2 + 4x + 3) - (2y + 3) x^2 - 2 (4y + 3) y - 3 (4x + 3) = 0$$

LT. COL. E. ST. IACOB.

R. Desfăcând parantezele şi grupând altfel termenii se găseşte

$$(y^2 - 2y - 3) (x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$\therefore \quad y_1 = -1 \ , \ y_2 = 3 \ ; \ x_1 = -1 \ , \ x_2 = -3.$$

1) *Mathesis*—DELAHAYE: Nota Nr. 16, Vol. 1906, pag. 182.

2) *Mathesis*—D. DÉPREZ: Vol. 1923, pag. 162.

3) *Gazeta Matematică* — V. CRISTESCU: *Câteva triunghiuri speciale*, Vol. 35, pag. 369.

2. *Intre elementele unui triunghiu avem*

$$(h_a - 2r)\sin^2\frac{A}{2} = (h_b - 2r)\sin^2\frac{B}{2} = (h_c - 2r)\sin^2\frac{C}{2}.$$

ILIE N. CONSTANTINESCU.

R. Se observă că

$$(h_a - 2r)\sin^2\frac{A}{2} = 2S\frac{p-a}{p}\frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{2S^3}{abcp^2}.$$

PROBLEME PROPUSE

6541. Se notează su N' răsturnatul lui N şi se cere să se găsească toate numerele $N < 1000$ pentru care produsul N^2N' se termină cu N sau cu N'.

INGINER O. ORĂNESCU.

6542. Să se găsească numerele care conţin trei factori primi, indicatorul lor doi factori primi, iar indicatorul indicatorului lor un singur factor prim. Pot exista asemenea numere care au trei cifre, indicatorul lor două, iar indicatorul indicatorului lor o singură cifră?

I. LINTEŞ.

6543. In triunghiul ABC, din cele două antiparalele la BC, tangente la cercul înscris I, fie Δ_A cea mai aproape de A. Δ_A este tangentă la I în M şi taie pe BC în D. Se obţin analog punctele N, P şi E, F.

Să se arate că:

1°. Dreptele AM, BN, CP, sunt concurente.

2°. Punctele D, E, F, sunt colineare.

CONSTANTIN C. DIACONU.

6544. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia

$$\sin 6x + \cos 5x + 2\cos x \cos 2x = 2m\sin x,$$

pentru diferitele valori ale lui m.

G-L GH. BUICLIU.

6545. Perpendiculara Δ în O_9 pe OH taie laturile triunghiului T în α, β, γ.

1°. Cercurile $\alpha O\beta$, $\alpha O\gamma$ și cercul care trece prin O și este tangent în α la Δ, taie laturile respective ale lui T, a doua oară, în trei puncte pe un cerc cu centrul în α. Să se definească cercul (a), în triunghiul T.

2°. Cercurile ce trec prin O și sunt tangente în α, β, γ, la Δ, taie laturile respective în trei puncte pe o paralelă la Δ.

LT. COL. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

6646. Se consideră ecuația

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

și se cere să se rezolve și să se găsească relațiile de condiție între coeficienți, când între rădăcinile ei avem, succesiv, fiecare din relațiile:

A) $x_1x_2 = x_3x_4 = x_5x_6$;

B) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6$.

Să se aplice la ecuațiile

A) $x^6 - 9x^5 + 17x^4 + 30x^3 + px^2 + qx - 27 = 0$;

B) $x^6 - 6x^5 + 3x^4 + mx^3 - 13x^2 + nx - 15 = 0$,

și să se afle valorile parametrilor.

VIRGIL CLAUDIAN.

6547. Să se arate că oricare ar fi a, b, c, avem:

$$\cos 2a \sin 2b \sin 2c + \sin 2a \cos 2b \cos 2c + \sin 2a \sin 2b \cos 2c + 4\cos(a-b)\cos(b-c)\cos(c-a) = \cos 2a \cos 2b \cos 2c + \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c;$$

$$\sin 2a \sin(b-c) \sin\left(b+\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right) + \sin 2b \sin(c-a) \sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right) + \sin 2c \sin(a-b) \sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(b+\frac{\pi}{4}\right) + \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a) = 0.$$

C. IONESCU-ȚIU.

6548. Să se arate că şirul $\frac{(\log n)^p}{n^{p+1}}$, unde $p > 0$, este un şir descrescător, apoi să se studieze natura seriilor

$$1^0.\ \sum_1^\infty \frac{(\log n)^p}{n^{p+1}},\ p>0\ ;\quad 2^0.\ \sum_1^\infty \frac{(\log n)^q}{n^p},\ p>0;$$

$$3^0.\ \sum_1^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^p}{n^{p+1}}.$$

N. GAIU.

6549. Să se cerceteze natura seriei cu termenul general

$$u_n = \frac{1}{x^{a\log n + b\log_2 n + c\log_3 n}},$$

unde $\log_2 n = \log\log n$, $\log_3 n = \log\log\log n$,
iar a, b, c, sunt constante date.

IOAN ST. TEODORESCU, Ploeşti

6550. In raport cu axele coordonate perpendiculare Ox, Oy considerăm iperbola (H) cu un vârf în O, cu o asimptotă paralelă cu Oy şi cu a doua asimptotă paralelă cu a doua bisectoare a unghiului axelor. Fie M un punct mobil pe (H), N proiecţia lui pe Ox şi P un punct pe MN astfel ca $\overline{NP}$ să fie medie geometrică între $\overline{ON}$ şi $\overline{MN}$. Să se arate că dacă M descrie o ramură a iperbolei, P descrie o cisoidă.

N. N. MIHĂILEANU.

6551. Fiind dată cubica (Γ) de ecuaţie

$$(y-3\lambda^2x+2\lambda^3)(\lambda^3x+y-3\lambda^2)[\lambda(\lambda+1)(\lambda+3)x+2(\lambda+1)y-\lambda^3]$$
$$+2(\lambda-2)x+2(\lambda-4)y-2\lambda^3+8\lambda=0,$$

se cere: 1°. Să se determine asimptotele D_1, D_2, D_3, ale cubicei (Γ). 2°. Să se verifice că punctele în care cele trei asimptote taie cubica sunt pe o aceiaşi dreaptă D. 3°. Să se determine şi să se construiască înfăşurătoarele dreptelor D_1, D_2, D_3, şi D, când λ variază. 4°. Să se determine valorile reale ale lui λ pentru care cubica (Γ) trece prin origină şi să se construiască în aceste cazuri.

MIRCEA V. SOARE

6552. Să se studieze familia de cuadrice dată, față de un sistem de axe tripluortogonale, prin ecuația

$$(u-12a^4+1)x^2+(u-12a^4-4a^2)y^2+(u+4a^2+1)z^2$$
$$-4a^2(3a^2+1)xy-2(18a^4+10a^2+1)xz-12a^2(3a^2+1)yz$$
$$+2a^2x+2(3a^2+1)y-2(4a^2+1)z=0,$$

unde a este un număr întreg, iar u un parametru variabil.

Să se scrie ecuația acestor cuadrice când suprafața este raportată la cele trei direcții principale ale sale.

O. N. ȚINO.

6553. Fie N punctul în care raza vectoare OM taie a doua oară cercul osculator într'un punct M al unei curbe plane (Γ).

Se cere să se determine curbele (Γ) pentru care $\overline{ON} = K\overline{OM}$, ($k$ constant).

Să se studieze cazurile de integrabilitate a problemei, după valorile lui k.

EUGEN N. WEGENER.

6554. Se dă câmpul vectorial definit de vectorul $\bar{u}$ (X,Y,Z), unde

$$X=f(x,y,z) \quad , \quad Y=\varphi(x)\psi'(y) \quad , \quad Z=\varphi(x)\psi'(z).$$

Să se determine funcțiile f, φ, ψ, astfel încât câmpul să fie *laplacian* adică, să aibă rotația și divergența nule în același timp, funcția f devenind constantă odată cu φ; ψ' este derivata funcției ψ.

M. GHERMĂNESCU.

6555. Fie a și b două puncte situate la distanță finită în planul variabilei complexe z astfel ca b să nu fie situat pe segmentul $(-a, +a)$. Să se calculeze integrala

$$I=\int_{-a}^{+a}\frac{dz}{(z-b)^n\sqrt{a^2-z^2}}$$

dealungul segmentului $(-a, +a)$, n fiind un număr întreg nenegativ.

B. M. BARBĂLAT.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii :

Constantinescu R. M. (6045); *Deleanu I. Aristide* (6042, 195, 222, 33, 96, 378); *Deutsch G. Emeric* (6282, 349, 464, 503, 4, 5); *Diaconu C. C.* (P); *Enescu G. G.* (6111, 230, 436); *Hangan M. Th.* (6294, 386, 422, 4, 503); *Moraru T. Dinu* (6445, A, P); *Păunescu Şt. Gh.* (6354); *Petcu A. V.* (6097, 111); *Rosman Hugo* (6342, N, P); *Soare V. M.* (6407, 20, 99, 503, 22, 35, 6, A, P); *Teleman A. Kostake* (6396, 417, 24, 6, 38, 41, 71, 6, 83, 5, 511, 3, 5, 30, 2, 5, 6, P); *Teleman A. Silviu* (6391, 6, 433, 41, 63, 82, 3, 5, 93, 505, 13, 6, 31, 2, 5, 6); *Teodorescu P. P.* (5006, 64, 205, 6, 844, 960, 6426, 36, 79, 514, 7, 20, 2, 6, 35, 6, A, N, P); *Topa N.* (6433); *Vargă I. A.* (3412); *Visarion A. Viorel* (4075, 84, 5002, 30, 258, 6378, 501, 2); *Wegener N. E.* (2789, 3180, 4914, 5376, 509, 650, 6466, 524, P).

Orariul Bibliotecilor Gazeta Matematică

Sălile de bibliotecă sunt deschise după următorul orariu în luna Noembrie şi Decembrie.

Localul din Calea Griviţei Nr. 158: In fiecare zi de lucru dela 8 la 12 şi Miercurea dela 16 la 20.

Casa „I. Ionescu" din Str. Răsuri Nr. 25: Luni şi Vineri dela 8 la 10, Marţi şi Miercuri dela 16 la 20.

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ"

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 200 lei volumul pentru volumele I—XXV; 400 pentru volumele XXVI—L; 800 lei pentru volumele LI—LIII şi eventual numere izolate cu preţul de 20 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ"

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.270

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* Lei 230

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII" al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele şi ori-ce sume se pot trimite la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 13.677.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIV

NUMĂRUL 4. — DECEMBRIE 1948

SUMARUL

1. Asupra unor cuartice remarcabile. . . *Şerban Gheorghiu.*
2. Clasa identităţilor Euler-Ioachimescu . *M. Adam.*
3. Raport pentru acordarea premiului de „Istoria Matematicei" pe 1948 *G. G. Constantinescu*, *V. Marian*
4. Concursul „Gazetei Matematice" din 1949.
5. Note matematice: 10—11.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Probleme rezolvate: 2462, 4634, 5117, 6296,
10. Probleme propuse: 6556—6570.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALA
1948

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie, compusă în prezent din d-nii: **G. G. Constantinescu,** Doctor în Matematici; **C. C. Teodorescu,** Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **General Gr. Zapan,** (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 20 Decembrie ora 17^{30}: Adunarea materiei pentru Nr. 5 şi fixarea programului pentru concursul *Gazetei Matematice* din 1949.

Luni 10 Ianuarie 1949 ora 17^{30}: Facerea copertei Nr. 5.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1948 sunt indicate în tabla de materii a volumului LIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **65**11, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 70.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cursul mediu şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 50

— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGHELESCU „ 150

— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»* . . . . . „ 500

ASUPRA UNOR CUARTICE REMARCABILE

In cele ce urmează îmi propun a indica mai multe observaţiuni relative la cuarticele ce formează obiectul problemei 5993 [1]. Unele din aceste observaţiuni mi-au fost comunicate, într'o convorbire de d-l Prof. D. BARBILIAN.

Problema 5993 revine la a găsi locul geometric al punctelor de unde se pot duce unei hipocicloide cu trei puncte de înapoiere, două tangente făcând un unghiu dat, V. Pentru a rezolva această problemă utilizez coordonatele isotrope.

Se ştie că hipocicloida cu trei puncte de înapoiere este o curbă de ordinul al patrulea şi de clasa a treia bitangentă dreptei dela infinit în punctele ciclice.

Ecuaţiunea

$$(D) \qquad ux + vy = 1$$

reprezentând în coordonate isotrope, o dreaptă arbitrară, pentru ca această dreaptă să fie tangentă unei hipocicloide (Σ) cu trei puncte de înapoiere este necesar şi suficient să avem [2]:

$$(\Sigma) \qquad uv + \varphi_3(u, v) = 0$$

$\varphi_3(u, v)$ fiind un polinom omogen şi de gradul al treilea în u şi v sau:

$$\varphi_3(u, v) = a_0 v^3 + a_1 v^2 u + a_2 v u^2 + a_3 u^3.$$

Dreapta considerată fiind reală avem evident $v = \bar{u}$ unde am însemnat ca deobiceiu cu $\bar{z}$ cantitatea imaginar conjugată lui z. Deasemeni, polinomul $\varphi_3(u, v)$ fiind real avem:

$$a_2 = \bar{a}_1 \quad \text{şi} \quad a_3 = \bar{a}_0.$$

Fie t coeficientul unghiular, în coordonate isotrope, al dreptei considerate, sau $u = -vt$. Inlocuind pe u, prin această valoare în ecuaţiunea dreptei şi a hipocicloidei (Σ) şi eliminând apoi pe v, între cele două relaţiuni astfel obţinute, rezultă:

$$xt^2 - yt + \varphi_3(-t, 1) = 0.$$

---

1) A se vedea soluţia publicată la pag. 46, Vol. LII, *Gazeta Matematică.*

2) Această ecuaţiune exprimă proprietăţile ce definesc hipocicloida şi se găseşte explicitată în articolul *« Asupra hipocicloidei cu trei puncte de înapoiere ». Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, pag. 598.

Inlocuind în această ecuațiune pe x și y respectiv prin $x - a_1$ și $y - a_2$ ceea ce revine la o schimbare a originei axelor de coordonate, obținem:

$$-a_3 t^3 + xt^2 - yt + a_0 = 0. \qquad (1)$$

Ecuațiunea (1) admite ca rădăcini coeficienții unghiulari ai tangentelor duse din punctul $M(x, y)$ la hipocicloida (Σ), axele de coordonate fiind cele noui.

Pentru ca două din tangentele duse din M la (Σ) să facă unghiul V este necesar și suficient ca ecuațiunea (1) să admită rădăcinile t și λt, unde $\lambda = e^{2iV}$. Cu alte cuvinte, ecuațiunea (1) și ecuațiunea:

$$-a_3 \lambda^3 t^3 + \lambda^2 xt^2 - \lambda yt + a_0 = 0 \qquad (2)$$

admit o rădăcină comună. Rezolvând, în raport cu x și y sistemul format de ecuațiunile (1) și (2) rezultă

$$x = \frac{a_3 \lambda (\lambda + 1) t^3 + a_0}{\lambda t^2} \quad \text{și} \quad y = \frac{a_3 \lambda^2 t^3 + a_0 (\lambda + 1)}{\lambda t}. \qquad (3)$$

Obținem astfel, ecuațiunile parametrice ale locului geometric căutat.

Curba (Γ) definită de ecuațiunile (3) este o cuartică. Pentru a arăta aceasta, înlocuim în ecuațiunea unei drepte arbitrare

$$ax + by + c = 0,$$

pe x și y prin valorile date de (3). Se obține în general o ecuațiune de gradul al patrulea, ceea ce dovedește că (Γ) este o cuartică. In particular, pentru $a = b = 0$ ecuațiunea în chestiune se reduce la $c\lambda t^2 = 0$. Această ecuațiune admite o rădăcină dublă egală cu ∞ și o altă rădăcină dublă egală cu zero. (Γ) este deci bitangentă dreptei dela infinit în punctele ciclice.

Pentru $V = \frac{\pi}{2}$, avem $\lambda = -1$, dar ecuațiunile (3) devin:

$$x = -\frac{a_0}{t^2}, \quad y = -a_3 t^2. \qquad (4)$$

Aceste ecuațiuni reprezintă un cerc cu centrul în origine și de rază $\sqrt{|a_0 a_3|} = |a_0| = |a_3|$. Regăsim astfel rezultatul bine cunoscut, că ortoptica unei hipocicloide cu trei puncte de înapoiere este un cerc. Acest cerc este cercul lui EULER, comun tuturor triunghiurilor pentru care tangentele lui (Σ) sunt drepte SIMSON.

Originea sistemului nostru de coordonate coincide cu centrul acestui cerc.

Insfârşit pentru $V = 0$ sau $\lambda = 1$ ecuaţiunile (3) devin

$$x = \frac{2a_3 t^3 + a_0}{t^2} \quad \text{şi} \quad y = \frac{a_3 t^3 + 2a_0}{t}$$

şi reprezintă hipocicloida (Σ).

Să determinăm acum, coeficientul unghiular m, al tangentei în punctul M la curba (Γ). Se obţine:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{[2a_3\lambda^2 t^3 - a_0(\lambda+1)]\,t}{a_3\lambda(\lambda+1)\,t^3 - 2a_0} \tag{5}$$

Tangentele, care fac unghiul V, *duse din* M *hipocicloidei* (Σ) *sunt conjugate armonic, în raport cu tangenta în* M *la* (Γ) *şi cu cea de a treia tangentă dusă din acelaşi punct lui* (Σ).

Intr'adevăr, ecuaţiunea (1) admiţând rădăcinile t şi λt cea de a treia rădăcină este $\frac{a_0}{a_3\lambda t^2}$. Propoziţiunea enunţată rezultă, imediat observând că avem

$$\frac{t-m}{\lambda t - m} + \frac{t - \frac{a_0}{a_3\lambda t^2}}{\lambda t - \frac{a_0}{a_3\lambda t^2}} = 0.$$

Această propoziţiune pune în evidenţă anumite proprietăţi remarcabile ale cuarticei (Γ).

Astfel, punctele duble ale cuarticei (Γ) sunt punctele de unde cea de a treia tangentă dusă la hipocicloida (Σ), face cu una din celelalte două tangente acelaşi unghiu V. Parametrul t corespunzător unui punct dublu verifică deci, una sau cealaltă din ecuaţiunile:

$$t_1 = \lambda\frac{a_0}{a_3\lambda t_1^2} \quad \text{sau} \quad \lambda^2 t_2 = \frac{a_0}{a_3\lambda t_2^2} \quad \therefore \quad t_1^3 = \frac{a_0}{a_3} \quad \text{sau} \quad t_2^3 = \frac{a_0}{a_3\lambda^3}.$$

Inlocuind în ecuaţiunile (3) pe t prin aceste valori obţinem:

$$x = a_3\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda}t_1 = a_3(\lambda^2+\lambda+1)\,t_2$$

$$y = a_3\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda}t_1^2 = a_3(\lambda^2+\lambda+1)\,\lambda t_2^2.$$

Cuartica (Γ) admite deci trei puncte duble cum dealminteri era de prevăzut, această cuartică fiind unicursală. Punctele duble se obțin dând lui t_1 succesiv valorile t_1, $t_1 e^{\frac{2i\pi}{3}}$ și $t_1 e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Aceste puncte sunt deci vârfurile unui triunghiu echilateral înscris în cercul:

$$xy = \frac{(\lambda^2+\lambda+1)^2}{\lambda^2} a_0 a_3 = (1+2\cos 2V)^2 a_0 a_3 . \qquad (6)$$

Punctele duble se găsesc deasemeni pe tangentele în punctele de înapoiere ale hipocicloidei (Σ), cum se dovedește imediat, observând că t_1, $t_1 e^{\frac{2\pi i}{3}}$ și $te^{\frac{4\pi i}{3}}$ sunt în același timp coeficienții unghiulari ai dreptelor ce unesc originea cu punctele duble și ai tangentelor hipocicloidei (Σ) duse din centrul cercului ortoptic.

Deasemeni, se arată cu ușurință că tangentele lui (Γ) în fiecare din punctele duble sunt simetrice în raport cu tangentele de înapoiere respective, ale lui (Σ) și fac cu această tangentă unghiul V.

Tangentele de înapoiere ale lui (Σ) coincid dealtminteri cu axele de simetrie ale curbei (Γ), ceea ce se poate arăta în mai multe moduri.

Astfel, se știe că tangentelor unei hipocicloide (Σ) cu trei puncte de înapoiere sunt drepte SIMSON pentru ∞^2 triunghiuri. Printre aceste triunghiuri se găsește un triunghiu (T) echilateral și numai unul. Centrul triunghiului (T) coincide cu centrul cercului ortoptic, iar înălțimile acestui triunghiu echilateral sunt tangentele de înapoiere ale hipocicloidei (Σ). Înălțimile unui triunghiu echilateral fiind axe de simetrie pentru acel triunghiu urmează că atât hipocicloida (Σ), cât și cuarticele (Γ) obținute pentru diferitele valori ale lui V admit înălțimile triunghiului (T) ca axe de simetrie. In plus, prin rotații de 120° și 240° în jurul centrului triunghiului (T) cuarticele (Γ) se suprapun asupra lor înșile.

Pe de altă parte, pentru ca două direcțiuni de coeficienți unghiulari m' și m'' să fie simetrice în raport cu direcțiunea de coeficient unghiular t, este necesar și suficient să avem:

$$m'm'' = t_1^2 .$$

Deasemeni, fiind dat punctul $M(x, y)$, coordonatele simetricului său $M'(x', y')$ în raport cu dreapta:

$$Y = t_1 X$$

sunt: $$x' = \frac{y}{t_1} \quad \text{şi} \quad y' = t_1 x'$$

t_1, fiind coeficientul unghiular al uneia din tangentele de înapoiere ale hipocicloidei (Σ), adică una din rădăcinile ecuaţiunii ce se obţine făcând $x = y = 0$ în (1) sau

$$t_1^3 = \frac{a_0}{a_3},$$

considerăm punctul $M'(x', y')$ pentru care coeficienţii unghiulari ai tangentelor duse lui (Σ) sunt:

$$\frac{t_1^2}{\lambda t}, \quad \frac{t_1^2}{t} \quad \text{şi} \quad \frac{a_0}{a_3} \cdot \frac{\lambda t^2}{t_1^4} = \frac{\lambda t^2}{t_1}.$$

Scriind că ecuaţiunea ce se obţine din (1) înlocuind pe x şi y, respectiv cu x' şi y' admite aceste rădăcini rezultă:

$$x_3' = a_3 \left(\frac{t_1^2}{\lambda t} + \frac{t_1^2}{t} + \frac{\lambda t^2}{t_1} \right) = \frac{a_3 \lambda^2 t^3 + a_0 (1 + \lambda)}{\lambda t_1 t},$$

$$y_3' = a_3 \left[\frac{t_1^4}{\lambda t^2} + \frac{\lambda t^2}{t_1} \left(\frac{t_1^2}{\lambda t} + \frac{t_1^2}{t} \right) \right] = \frac{[a_3 \lambda (1 + \lambda) t^3 + a_0] t_1}{\lambda t^2}.$$

Punctul $M'(x', y')$ este evident pe curba (Γ) şi este simetricul punctului $M(x, y)$ ale cărui coordonate sunt date de egalităţile (3). Acesta demonstrează că (Γ) admite ca axe de simetrie tangentele de înapoiere ale lui (Σ).

In sfârşit, coordonatele punctului $M_1(x_1, y_1)$ obţinut prin rotaţia de unghiul α a punctului $M(x, y)$, în jurul originei sunt:

$$x_1 = x e^{i\alpha} \quad , \quad y_1 = y e^{-i\alpha}$$

θ fiind o rădăcină cubică imaginară a unităţii, înlocuind în egalităţile (3) pe t, prin $t\theta$, obţinem:

$$x_1 = \frac{a_3 \lambda (\lambda + 1) t^3 + a_0}{\lambda t^2 \theta^2} \quad \text{şi} \quad y_1 = \frac{a_3 \lambda^2 t^3 + a_0 (\lambda + 1)}{\lambda t \theta}$$

sau $x_1 = x\theta^2$ şi $y_1 = y\theta^{-1}$. Deci prin o rotaţie de 120^0 sau 240^0 curbele (Γ) se suprapun asupra lor înşile.

Cu aceste observaţiuni curba (Γ) poate fi construită, formând coordonatele reale:

$$X = \frac{x+y}{2} \quad \text{şi} \quad Y = \frac{x-y}{2i}$$

şi apoi procedând ca în soluţiunea publicată, pentru problema 5993 (G. M. LII, pag. 46).

Adaug că, *în punctele lor comune cuarticele* (Σ) *şi* (Γ) *sunt tangente şi că aceste puncte comune se găsesc pe un cerc concentric cu cercul ortoptic al lui* (Σ).

Mai întâi reamintesc că dela început s'a arătat că cele două cuartice (Σ) şi (Γ) trec prin punctele ciclice şi că în aceste puncte au aceeaşi tangentă: dreapta dela infinit.

Punctele comune cuarticelor (Σ) şi (Γ) sunt evident punctele depe (Γ) astfel ca cea de a treia tangentă să coincidă cu una din tangentele ce fac unghiul V. Tangenta la (Γ) fiind conjugată armonic, urmează că se confundă cu această de a treia tangentă. Cuarticele (Σ) şi (Γ) sunt deci tangente în punctele lor comune. Valorile parametrului t, corespunzătoare acestor puncte de contact verifică una sau alta din următoarele două ecuaţiuni:

$$t_1 = \frac{a_0}{a_3 \lambda t_1^2} \quad , \quad \lambda t_2 = \frac{a_0}{a_3 \lambda t_2^2} \quad \therefore \quad t_1^3 = \frac{a_0}{a_3 \lambda} \quad , \quad t_2^3 = \frac{a_0}{a_3 \lambda^2}$$

sau în total şase valori. Inlocuind în (5) pe t prin t_1 şi t_2 se obţine pentru m respectiv valorile t_1 şi λt_2 ceea ce confirmă tangenţa curbelor (Σ) şi (Γ). Pe de altă parte, întroducând aceleaşi valori ale lui t în ecuaţiunile (3) obţinem:

$$xy = \frac{(\lambda+2)(2\lambda+1)}{\lambda} a_0 a_3 = (5 + 4\cos 2V)\, a_0 a_3 .$$

Punctele de contact ale lui (Σ) şi (Γ) se găsesc deci pe acest din urmă cerc.

Ultimele propoziţiuni pot fi obţinute şi pe altă cale. Astfel, în loc de a rezolva ecuaţiunile (1) şi (2) în raport cu x şi y, eliminăm pe t între aceste două ecuaţiuni. Sistemul de ecuaţiuni (1) şi (2) poate fi înlocuit prin:

$$\lambda^2 x t^2 - \lambda(\lambda+1) y t + (\lambda^2 + \lambda + 1) a_0 = 0$$
$$a_3 (\lambda^2 + \lambda + 1) t^2 - (\lambda + 1) x t + y = 0.$$

Rezultatul eliminării lui t, sau ecuaţiunea punctuală a curbei (Γ) este:

$$\left[xy - a_0 a_3\left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 1\right)^2\right]^2 - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2\right)\left[y^2 - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 1\right) a_0 x\right]$$

$$\times \left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 1\right) a_3 y - x^2\right] = 0$$

$$\therefore \quad (\Gamma)\ [xy - a_0 a_3 (1 + 2\cos 2V)^2]^2 -$$

$$4\cos^2 V\,[y^2 - (1 + 2\cos 2V)\, a_3 x]\,[x^2 - (1 + 2\cos 2V)\, a_3 y] = 0.$$

Se citeşte pe această ecuaţiune că (Γ) este o cuartică bitangentă dreptei de la infinit în punctele ciclice.

Pentru $V = \frac{\pi}{2}$ regăsim cercul ortoptic C_e sau:

$$(C_e) \qquad xy - a_0 a_3 = 0,$$

iar pentru $V = 0$, regăsim hipocicloida (Σ) sau

$$(\Sigma)\ (xy - 9a_0 a_3)^2 - 4\,(y^2 - 3a_0 x)\,(x^2 - 3a_3 y) = 0.$$

Parabolele:

$$(P) \qquad y^2 - (1 + 2\cos 2V)\, a_0 x = 0, \text{ şi}$$

$$(Q) \qquad x^2 - (1 + 2\cos 2V)\, a_3 y = 0$$

au în afară de origine încă trei puncte comune: punctele duble ale lui (Γ). Aceasta se arată observând că cercul

$$xy - (1 + 2\cos 2V)^2\, a_0 a_3 = 0$$

ce figurează în ecuaţiunea lui (Γ), identic de alminteri cu cercul definit de (6) — trece prin cele trei puncte comune ale parabolelor (P) şi (Q). Explicitând calculele se regăseşte pentru coordonatele punctelor duble, aceleaşi valori ca mai sus.

Deasemeni, tangenţa cuarticelor (Σ) şi (Γ) se arată, observând că ecuaţia lui (Γ) poate fi scrisă:

$$[(xy - 9a_0 a_3)^2 - 4\,(y^2 - 3a_0 x)\,(x^2 - 3a_3 y)]\cos^2 V$$

$$- 3\,[xy - (1 + 8\cos^2 V)\, a_0 a_3]^2 \sin^2 V = 0.$$

* * *

Voi încheia aceste considerațiuni prin a indica, un alt mod de a genera cuarticele (Γ).

Consider, în acest scop, un triunghiu oarecare $D_1D_2D_3$ și un cerc ω concentric cu cercul său circumscris. Transformata prin inversiune isogonală, în raport cu triunghiul $D_1D_2D_3$ a cercului ω este o curbă, pe care o numesc (Ω).

(Ω) *este o cuartică bitangentă dreptei dela infinit în punctele ciclice.* (Ω) este evident o curbă de ordinul al patrulea fiindcă isogonalele punctelor de intersecție ale acestei curbe cu o dreaptă arbitrară sunt punctele de intersecție ale cercului ω, cu conica, inversa dreptei, sau în total patru puncte de intersecție. Deasemeni, inversiunea isogonală fiind o transformare punctuală, două curbe tangente se transformă în curbe tangente. Insă cercul ω și cercul circumscris fiind concentrice, sunt bitangente în punctele ciclice. (Ω) este deci bitangentă în punctele ciclice transformatei cercului circumscris, deci dreptei dela infinit.

Fie acum d_1' și d_1'', cele două puncte reale sau nu, comune cercului ω și laturei D_2D_3. Prin inversiunea isogonală, tangentele în d_1' și d_1'' ale cercului ω se transformă în două conice circumscrise triunghiului $D_1D_2D_3$, iar tangentele în D_1 ale acestor conice sunt izogonalele în raport cu laturile unghiului $D_2D_1D_3$ ale dreptelor D_1d_1' și D_1d_1''. Cuartica (Ω) trece deci prin D_1 și este tangentă acestor izogonale. Vârful D_1 este prin urmare, un punct dublu pentru cuartica (Ω). Analog, vârfurile D_2 și D_3 sunt deasemeni puncte duble ale cuarticei (Ω) sau:

Cuartica (Ω) *este circumscrisă triunghiului* $D_1D_2D_3$ *și admite aceste vârfuri ca puncte duble.*

Printre cuarticele (Ω), corespunzătoare diferitelor cercului ω, există una, ce merită o atenție specială. Este aceea ce se obține transformând prin inversiunea isogonală cercul de rază nulă confundat cu centrul cercului circumscris triunghiului $D_1D_2D_3$. Acest cerc descompunându-se în două drepte izotrope, inversa sa isogonală se descompune în două conice (P) și (Q) circumscrise triunghiului $D_1D_2D_3$. Conicele (P) și (Q), în chestiune, sunt în același timp hiperbole echilatere și parabole, fiindcă direcțiunile lor asimptotice coincid cu una sau cealaltă din cele două direcțiuni izotrope ale planului, astfel că sunt simultan confundate și

perpendiculare. Conicele (P) şi (Q) trec ambele, prin ortocentrul triunghiului $D_1 D_2 D_3$, iar cuartica (Ω) corespunzătoare se descompune fiindcă admite patru puncte duble: vârfurile şi ortocentrul triunghiului $D_1 D_2 D_3$.

In particular, când triunghiul $D_1D_2D_3$ este triunghiul echilateral ce are ca vârfuri punctele duble ale cuarticei (Ω) conicele (P) şi (Q) sunt chiar conicele ce intervin în ecuaţiunea lui (Ω).

Cuartica (Γ) *este inversa isogonală a cercului* ω_V *ce taie sub unghiul* V *laturile triunghiului* $D_1D_2D_3$ *ce are ca vârfuri punctele sale duble.*

Am arătat mai sus, că cele trei tangente duse lui (Σ) din un punct dublu al lui (Γ), sunt tangenta de înapoiere a lui (Σ) ce trece prin punctul dublu considerat, şi dreptele ce fac, de o parte şi de alta, unghiul V cu această tangentă de înapoiere Iar, tangentele lui (Γ) sunt conjugatele armonice ale acestor din urmă drepte. Astfel, D_1 fiind punctul dublu considerat şi D_1D_1' tangenta de înapoiere corespunzătoare notăm cu $D_1 t_1'$ şi $D_1 t_1''$, cele două drepte-tangente lui (Σ) — ce fac de o parte şi de alta ung. V cu $D_1 D_1'$. Punctele D, t_1' şi t_1'' fiind pe $D_2 D_3$ fie d_1' şi d_1'', conjugatele armonice ale lui $_1'$ şi t_1'' în raport respectiv cu D_1' şi t_1'' de o parte şi D_1' şi t_1' de alta. Cercul ω_V concentric cu triunghiul echilateral $D_1 D_2 D_3$, şi care trece prin punctele d_1' şi d_1'', taie latura $D_2 D_3$ sub unghiul V, fiindcă avem evident:

$$\operatorname{tg} \sphericalangle D_1' D_1 d_1' = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \cdot V \quad \therefore \quad D_1' d_1' = \frac{1}{3} D_1 D_1' \operatorname{tg} \cdot V.$$

Pe de altă parte, O fiind centrul triunghiului $D_1 D_2 D_3$, avem:

$$\operatorname{tg} \sphericalangle D_1' O d_1' = 3 \frac{D_1' d_1'}{D_1 D_1'} = \operatorname{tg} \cdot V$$

ceeace demonstrează propoziţiunea enunţată, cuartica (Γ) fiind definită astfel că este bitangentă dreptei de la infinit în punctele ciclice, sau 4 condiţiuni şi admite trei puncte duble cu tangente date, sau alte $3 \times 5 = 15$ condiţiuni, deci în total 19 condiţiuni.

In particular, *hipocicloida* (Σ) *este transformată isogonală a cercului înscris în triunghiul ce are ca vârfuri punctele sale de înapoiere.* In acest caz particular, unghiul V este nul.

Notă. Revin acum, pentru a da o altă demonstrație propoziţiuni că *tangentele ce fac unghiul* V, *duse din* M *hipocicloidei* (Σ) *sunt conjugate armonic în raport cu tangenta în* M *la* (Γ) *şi cu cea de a treia tangentă a lui* (Σ) *dusă tot din* M.

Consider, pentru un moment, o curbă plană *oarecare* (Σ) şi fie (Γ) locul geometric al punctelor M de unde două din tangentele duse lui (Σ) fac unghiul V, constant. Fie T_1 şi T_2 punctele de contact cu (Σ) ale acestor două tangente. Imaginăm un plan mobil pe planul curbei (Σ) şi astfel ca tangentele MT_1 şi MT_2 să fie invariabil legate de planul mobil. Este bine cunoscut, că în asemenea condiţiuni rezultă că *normalele în* M *la* (Γ) *şi în* T_1 *şi* T_2 *la* (Σ) *sunt trei drepte concurente.* Punctul comun al acestor trei normale este centrul instantaneu de rotaţie, al mişcării.

Aplicăm această propoziţiune generală la cazul particular, când curba (Σ) este o hipocicloidă cu trei puncte de înapoiere.

Reamintesc[1] că tangentele MT_1, MT_2 şi MT_3 duse din punctul M, hipocicloidei (Σ) sunt înălţimile unui triunghiu fundamental, $A_1A_2A_3$. Laturile triunghiului $A_1A_2A_3$ *sunt deasemeni tangente lui* (Σ), *iar segmentele* MT_1, MT_2 şi MT_3, sunt respectiv egale cu înălţimile vârfurilor A_1, A_2 şi A_3. Insemnând cu I punctul comun normalelor în T_1 şi T_2 la (Σ), aplicarea teoremei generale relative la centrul instantaneu de rotaţie, la chestiunea noastră revine la aceea că perpendiculara în M pe MI şi tangenta MT_3 sunt conjugate armonic în raport cu tangentele MT_1 şi MT_2.

Fie pentru aceasta H_1, H_2 şi H_3, picioarele înălţimilor triunghiului $A_1A_2A_3$, iar M ortocentrul. Fie deasemeni, $T \equiv (A_1A_2, H_1H_2)$. Dreptele MT şi MA_3 sunt conjugate armonic în raport cu MA_1 şi MA_2. Dreapta MT coincide cu axul radical al cercurilor MA_1A_2 şi $MH_1A_3H_2$. MT este deci perpendiculară pe mediana A_3A_3' a vârfului A_3 din triunghiul $A_1A_2A_3$. Propoziţiunea noastră revine la aceea că MT coincide cu tangenta în M la (Γ) sau ceeace este acelaşi lucru, că MI este paralelă cu mediana A_3A_3'. Fie H_1^*, simetricul lui H_1 în raport cu A_3. Triunghiurile MT_1T_2 şi $A_3H_1^*H_2$ sunt asemenea şi au laturile perpendiculare. Rezultă că tangenta în A_3 la cercul $A_3H_1^*H_2$ este paralelă cu diametrul MI al cercului MT_1IT_2. Insă tangenta în A_3 la cercul $A_3H_1^*H_2$ este chiar mediana A_3A_3', ceeace demonstrează propoziţiunea noastră.

In legătură cu această propoziţiune se poate demonstra o alta ceva mai generală. Fie pentru aceasta, (Γ) locul geometric al punctelor M astfel ca raportul armonic al tangentei în M la curba (Γ) şi al tangentelor duse din M hipocicloidei (Σ) să fie constant. Se poate demonstra că punctul M variind pe curba (Γ) astfel definită, tangentele duse din M lui (Σ) fac cu o dreaptă fixă, arbitrară unghiuri ce verifică o relaţie lineară cu coeficienţi constanţi.

ŞERBAN GHEORGHIU.

---

1) A se vedea articolul din Vol. XLIX, pag. 602, § 6 şi pag. 599, § 2.

CLASA IDENTITĂȚILOR EULER-IOACHIMESCU

Identitățile EULER-IOACHIMESCU se pot defini prin egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^m}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} = P_{m-n+1}, \quad (1)$$

m fiind întreg pozitiv, $x_1, x_2, \ldots x_n$ sunt cantități oarecare diferite între ele, iar P_k reprezintă suma combinărilor cu repetiție luate câte k a aceloraşi cantități, cu convenția $P_0 = 1$ şi $P_k = 0$ pentru $k<0$ [1].

Se mai obișnuește ca identitățile (1) să fie scrise sub forma

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^m}{\varphi'(x_i)} = P_{m-n+1}, \quad (2)$$

în care $$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \quad (3)$$

Identitățile EULER corespund cazului $m \leqslant n-1$, iar identitățile IOACHIMESCU cazului $m \geqslant n$.

Extinderea identităților EULER la cazul $m \geqslant n$ a fost făcută de A. G. IOACHIMESCU, sub formă de problemă propusă în „*Gazeta matematică*“ [2], ulterior chestiunea fiind reluată [3].

In prezentul articol arătăm că identitățile EULER-IOACHIMESCU sunt intim legate de problema divizibilității polinoamelor, apoi adăugăm la această clasă câteva identități noui.

I. Notând

$$f_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m, \quad (4)$$

şi folosind egalitatea (2), rezultă imediat identitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f_m(x_i)}{\varphi'(x_i)} = A_0 P_{m-n+1} + A_1 P_{m-n} + \ldots + A_{m-n+1}. \quad (5)$$

Relațiunea (5) aplicată la $n+1$ cantități $x, x_1, x_2 \ldots x_n$ se poate scrie

$$\frac{f_m(x)}{\varphi(x)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_m(x_i)}{(x_i-x)\varphi'(x_i)} = A_0 P'_{m-n} + A_1 P'_{m-n-1} + \ldots + A_{m-n}, \quad (6)$$

în care P'_k este suma combinărilor cu repetiție luate câte k a cantităților $x, x_1, x_2, \ldots x_n$.

---

1) TH. ANGHELUȚĂ. *Algebră superioară*. Vol. I 1943 p. 92 probl. 32.

2) G. M. Prob. 562 rezolvată vol. VIII, p. 130.

3) N. ABRAMESCU. G. M., XXVII, p. 55. TH. ANGHELUȚĂ. G. M., XLV, p. 460. N. V. GHIRCOIAȘU. G. M., XLVIII, p. 98. V. ALACI. R. M. T., V p. 51.

Insă din chiar definiţia acestor combinări rezultă

$$P'_k = P_k + x P'_{k-1},$$

care aplicată pentru $k = 0, 1, 2, \ldots k$ ne conduce la relaţia

$$P'_k = x^k + P_1 x^{k-1} + P_2 x^{k-2} + \ldots + P_k. \qquad (7)$$

In egalitatea (6) folosind această relaţie şi ordonând termenii după coeficienţii P_k, obţinem egalitatea

$$\frac{f_m(x)}{\varphi(x)} = F_{m-n}(x) + P_1 F_{m-n-1}(x) + \ldots . \\ \ldots + P_{m-n} F_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_m(x)}{(x - x_i)\varphi'(x_i)}, \qquad (8)$$

în care $F_k(x)$ este polinomul lui LAGUERRE de gradul k obţinut din $f_m(x)$, adică

$$F_k(x) = A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \ldots + A_k.$$

Dacă însă în egalitatea (6) ţinem seama de relaţia (7), însă ordonăm termenii după puterile lui x obţinem egalitatea

$$\frac{f_m(x)}{\varphi(x)} = B_0 x^{m-n} + B_1 x^{m-n-1} + \ldots + B_{m-n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_m(x_i)}{(x - x_i)\varphi'(x_i)} \qquad (9)$$

în care

$$B_k = A_0 P_k + A_1 P_{k-1} + \ldots + A_k P_0$$

Am obţinut astfel, pornind dela identităţile EULER-IOACHIMESCU, relaţiunile (8) şi (9) cari sunt de o deosebită importanţă în teoria divizibilităţii polinoamelor. Aceste relaţiuni sunt cunoscute, dar stabilirea lor s'a făcut pe alte căi [1].

Relaţiunile (8) şi (9) pot fi privite şi ca extinderi ale formulei de interpolare LAGRANGE.

II. Să notăm cu $p_k^{x_i}$ suma combinărilor cantităţilor $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ luate câte k, iar cu p_k aceiaşi sumă relativă la cantităţile $x_1, x_2, \ldots x_n$. Definiţia combinărilor simple ne arată că

$$p_k = p_k^{x_i} + x_i p_{k-1}^{x_i},$$

în care făcând $k = 1, 2, \ldots q$ şi adunând convenabil

$$p_q^{x_i} = p_q - x_i p_{q-1} + x_i^2 p_{q-2} - \ldots + (-1)^q x_i^q.$$

---

1) TR. LALESCU. G. M. XXVII p. 105. TH. ANGHELUŢĂ G. M. XLV p. 507.

Dacă în identitatea (5) luăm

$$f_m(x_i) = x_i^{n+k-1} p_q^{x_i} = x_i^{n+k-1}(p_q - x_i p_{q-1} + \ldots + (-1)^q x_i^q),$$

obținem direct identitățile d-lui N. GHIRCOIAȘU [1]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_q^{x_i} x_i^{n+k-1}}{\varphi'(x_i)} = p_q P_k - p_{q-1} P_{k+1} + \ldots + (-1)^q P_{k+q}. \quad (10)$$

III. Luând pentru $f_m(x)$ valori particulare, egalitatea (5) ne conduce la rezultate însemnate.

Câteva exemple vor fi edificatoare.

1°. Dacă în relația (5) luăm

$$f_m(x) = x^{k-1}\varphi(x) = x^{k-1}[x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n]$$

în care $p_k (k = 1, 2, \ldots n)$ reprezintă funcțiunile simetrice fundamentale ale cantităților $x_k (k = 1, 2, \ldots n)$, rezultă $f_m(x_k) = 0$, deci

$$P_k - p_1 P_{k-1} + p_2 P_{k-2} - \ldots + (-1)^k p_k = 0 \quad (11)$$

relațiune cunoscută [2].

2°. Dacă în relațiunea (5) luăm

$$f(x) = x^k \varphi'(x) = x^k [n x^{n-1} - (n-1) x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} p_{n-1}],$$

și ținem seama de (11), obținem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k = p_1 P_{k-1} - 2p_2 P_{k-2} + 3p_3 P_{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1} k p_k, \quad (12)$$

relațiune care leagă între ele cele trei funcțiuni simetrice p_k, P_k și Σx_i^k.

3°. — Relațiunea (11) se poate pune imediat sub forma de determinant

$$P_k = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & \ldots & p_1 \end{vmatrix},$$

în care dacă notăm

$$q_0 \varphi(x) = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n,$$

putem scrie

$$P_k = \left(\frac{-1}{q_0}\right)^k \begin{vmatrix} q_1 & q_0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_2 & q_1 & q_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_k & q_{k-1} & q_{k-2} & \ldots & q_1 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

1) N. V. GHIRCOIAȘU. G. M., XLVIII, p. 98.

2) TH. ANGHELUȚĂ. *Algebră Superioară*. Vol. I, 1943, p. 95.

Ori dacă ţinem seama de această egalitate şi de expresia găsită mai sus pentru B_k, rezultă

$$B_k = \left(\frac{-1}{q_0}\right)^k \begin{vmatrix} A_0 & q_0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & q_1 & q_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_k & q_k & q_{k-1} & \dots & q_1 \end{vmatrix},$$

şi deci folosind relaţia (9) putem scrie câtul a două polinoame oarecari sub formă de determinant [1].

$$\frac{f_m(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{-1}{q_0}\right)^{m-n} \begin{vmatrix} A_0 & q_0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & q_1 & q_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-n} & q_{m-n} & q_{m-n-1} & \dots & q_0 \\ 0 & x^{m-n} & x^{m-n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_m(x_i)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)},$$

Folosind relaţia (8) şi (13), găsim că egalitatea (14) se mai poate pune şi sub forma următoare

$$\frac{f_m(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{-1}{q_0}\right)^{m-n} \begin{vmatrix} F_0 & q_0 & 0 & \dots & 0 \\ F_1 & q_1 & q_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m-n} & q_{m-n} & q_{m-n-1} & \dots & q_0 \\ 0 & x^{m-n} & x^{m-n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_m(x_i)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)} \quad (14)$$

IV. Pentru complectarea clasei de identităţi EULER-IOACHIMESCU, vom folosi un determinant care extinde determinanţii VANDERMONDE.

Anume ne propunem să calculăm valoarea determinantului

$$D_{m,n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,m+n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,m+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m,m+n} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{m+n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{m+n-1} \end{vmatrix}, \quad (15)$$

în care $a_{i,k}$ ($i = 1, 2, \dots m$ şi $k = 1, 2, \dots m+n$) sunt cantităţi oarecare, iar x_i ($i = 1, 2 \dots n$) sunt cantităţi oarecare diferite între ele.

---

1) TH. ANGHELUŢĂ. G. M., XXVIII, p. 201.

Pentru aceasta vom păstra notaţia de mai sus

$$q_0\varphi(x)=q_0[x^n-p_1x^{n-1}+\ldots+(-1)^np_n]=q_0x^n+q_1x^{n-1}+\ldots+q_n=0,$$

pentru ecuaţia de rădăcini x_i $(i=1, 2, \ldots n)$ şi vom considera determinantul de ordinul $(m+n)$

$$q_n^m=\left|\begin{array}{cccccc}
q_n & q_{n-1} & \ldots & 0 & \ldots 0 & 0 \\
0 & q_n & \ldots & 0 & \ldots 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & q_{n-1} & \ldots q_1 & q_0 \\
0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots 0 & 1
\end{array}\right|\begin{array}{l}\}m\\ \\ \\ \\ \}n\end{array}. \qquad (16)$$

Dacă efectuăm produsul dintre determinanţii (15) şi (16) după regula clasică, avem

$$q_n^m D_{mn}=\left|\begin{array}{cccccc}
A_{11} & \ldots & A_{1m} & \varphi(x_1) & \ldots & \varphi(x_n) \\
A_{21} & \ldots & A_{2m} & x_1\varphi(x_1) & \ldots & x_n\varphi(x_n) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{m1} & \ldots & A_{mm} & x_1^{m-1}\varphi(x_1) & \ldots & x_n^{m-1}\varphi(x_n) \\
a_{1,\,m+1} & \ldots & a_{m,\,m+1} & x_1^m & \ldots & x_n^m \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1,\,m+n} & \ldots & a_{m,\,m+n} & x_1^{m+n-1} & \ldots & x_n^{m+n-1}
\end{array}\right|,$$

şi deoarece $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=\ldots=\varphi(x_n)=0$, acest determinant dezvoltat după primele m linii devine

$$D^{mn}=\frac{(-1)^{mn}}{q_0^m}\left|\begin{array}{cccc}
A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\
A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm}
\end{array}\right|\cdot\left|\begin{array}{cccc}
1 & 1 & \ldots & 1 \\
x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1}
\end{array}\right| \qquad (17)$$

egalitate în care primul determinant este obţinut înmulţind între ele primele m linii din determinanţii (15) şi (16), după regula de înmulţire a determinanţilor, iar cel de al doilea este determinantul VANDERMONDE al cantităţilor x_i $(i=1, 2, \ldots n)$, pe care îl vom nota cu V_n.

Relaţia (17) deci se poate scrie

$$D_{mn} = \frac{(-1)^{nm} V_n}{q_0^m} \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1,\,m+n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2,\,m+n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{m,\,m+n} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} q_n & q_{n-1} \dots 0 \\ 0 & q_n \quad \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \quad \dots q_0 \end{matrix} \right\| \tag{18}$$

cu convenţia

$$\| a_0\, a_1 \dots a_n \| \cdot \| q_n\, q_{n-1} \dots q_0 \| = \sum_{i=0}^{n} a_i\, q_{n-i}.$$

Prima aplicaţie a relaţiei (18) este calcularea valoarei determinanţilor de tipul VANDERMONDE în care lipsesc un număr oarecare de coloane corespunzătoare aceloraşi puteri ale elementelor x_l $(1 = 1, 2, \dots n)$.

Vom nota cu $V_n^{n_1 n_2 \dots n_n}$ un astfel de determinant căruia îi lipsesc coloanele corespunzătoare elementelor

$$x_l^{n_1}, x_i^{n_2}, \dots x_l^{n_k} (i = 1, 2, \dots n),$$

unde am considerat $n_1 < n_2 < \dots < n_k$.

Să luăm cazul $V^{n_1 n_2}$, adică un determinant care se poate pune sub forma următoare:

$$V_n^{n_1 n_2} = \left| \begin{matrix} 0 & 0 \dots 0 & 0 & \dots (-1)^{n_2} & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 \dots (-1)^{n_1} & 0 & \dots 0 & 0 & \dots 0 \\ 1 & x_1 \dots x_1^{n_1} & x_1^{n_1+1} & \dots x_1^{n_2} & x_1^{n_2+1} & \dots x_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n \dots x_n^{n_1} & x_n^{n_1+1} & \dots x_n^{n_2} & x_n^{n_2+1} & \dots x_n^{n+1} \end{matrix} \right|,$$

căruia aplicându-i relaţia (18)

$$V_n^{n_1 n_2} = \frac{(-1)^{2n} V_n}{q_0^2} \left\| \begin{matrix} 0 \dots 0 & 0 \dots (-1)^{n_2} 0 \dots 0 \\ 0 \dots (-1)^{n_1} 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} q_n & q_{n-1} \dots 0 \\ 0 & q_n \quad \dots q_0 \end{matrix} \right\|$$

$$= \frac{(-1)^{2n} V_n}{q_0^2} \left| \begin{matrix} (-1)^{n_2} q_{n-n_2} & (-1)^{n_1} q_{n-n_1} \\ (-1)^{n_2} q_{n-n_2+1} & (-1)^{n_1} q_{n-n_1+1} \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{(1-)^{2n+n_1+n_2+1} V_n}{q_0^2} \left| \begin{matrix} q_{n-n_1} & q_{n-n_2} \\ q_{n-n_1+1} & q_{n-n_2+1} \end{matrix} \right|.$$

Urmând aceiaşi cale găsim că în general

$$V_n^{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{(-1)^{\mu} V_n}{q_0^k} \begin{vmatrix} q_{n-n_1} & q_{n-n_2} & \ldots & q_{n-n_k} \\ q_{n-n_1+1} & q_{n-n_2+1} & \ldots & q_{n-n_k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n-n_1+k-1} & q_{n-n_2+k-1} & \ldots & q_{n-n_k+k-1} \end{vmatrix} \quad (19)$$

în care

$$\mu = kn + n_1 + n_2 + \ldots + n_k + \frac{k(k-1)}{2}$$

iar dacă trecem la funcţiile simetrice fundamentale ale cantităţilor x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, putem scrie

$$V_n^{n_1 n_2 \ldots n_k} = V_n \begin{vmatrix} p_{n-n_1} & p_{n-n_2} & \ldots & p_{n-n_k} \\ p_{n-n_1+1} & p_{n-n_2+1} & \ldots & p_{n-n_k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-n_1+k-1} & p_{n-n_2+k-1} & \ldots & p_{n-n_k+k-1} \end{vmatrix} . \quad (20)$$

In particular ne interesează cazul când lipsesc coloane succesive, corespunzătoare elementelor

$$x_i^j \; (j = n - m, \; n - m + 1, \ldots n - m + k - 1),$$

în care caz egalitatea (20) devine

$$V_n^{(n-m),\ldots(n-m+k-1)} = V_n \begin{vmatrix} p_m & p_{m-1} & \ldots & p_{m-k+1} \\ p_{m+1} & p_m & \ldots & p_{m-k+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m+k-1} & p_{m+k-2} & \ldots & p_m \end{vmatrix} \quad (21)$$

Pentru anumite cazuri această relaţie se poate mult simplifica prin folosirea egalităţii

$$\begin{vmatrix} p_m & p_{m-1} & \ldots & p_{m-k+1} \\ p_{m+1} & p_m & \ldots & p_{m-k+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m+k-1} & p_{m+k-2} & \ldots & p_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} & \ldots & P_{k-m+1} \\ P_{k+1} & P_k & \ldots & P_{k-m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{k+m-1} & P_{k+m-2} & \ldots & P_k \end{vmatrix} \quad (22)$$

care se poate uşor demonstra folosind relaţia (11).

Relaţiile (20), (21) şi (22) generalizează determinanţii cunoscuţi întrebuinţaţi la demonstrarea identităţilor EULER-IOACHIMESCU [1].

1) TH. ANGHELUŢĂ. G. M. XLV. p. 459.

V. Notăm cu Δ determinantul $V_n^{(n-m),\ldots(n-m+k-1)}$ calculat la (21)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-m-1} & x_1^{n-m+k} & \ldots & x_1^{n+k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-m-1} & x_n^{n-m+k} & \ldots & x_n^{n+k-1} \end{vmatrix},$$

pe care îl desvoltăm după primele $(n-m)$ coloane

$$\Delta = \Sigma (-1)^{\mu} D_{1,2,\ldots(n-m)}^{r_1 r_2 \ldots r_{n-m}} \cdot D_{n-m+1,\ldots n}^{s_1 s_2 \ldots s_m}, \qquad (23)$$

unde

$$\mu = r_1 - 1 + r_2 - 2 + \ldots + r_{n-m} - n + m,$$

şi în care am notat cu $D_{1,2,\ldots n-m}^{r_1 r_2 \ldots r_{n-m}}$ determinantul format cu primele $(n-m)$ coloane şi cu liniile de ordinul $r_1 < r_2 < \ldots < r_{n-m}$, iar cu $D_{n-m+1,\ldots n}^{s_1, s_2 \ldots s_m}$ determinantul format cu restul liniilor şi coloanelor $(s_1 < s_2 < \ldots < s_m)$.

Amândoi aceşti determimanţi sunt de tip VANDERMONDE, deci

$$\begin{aligned} D_{1,2,\ldots n-m}^{r_1, r_2, \ldots r_{n-m}} &= \Pi (x_{r_i} - x_{r_j}) \\ D_{n-m+1,\ldots n}^{s_1, s_2, \ldots s_m} &= (x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_m})^{n-m+k} \Pi (x_{s_i} - x_{s_j}) \end{aligned} \qquad (i > j)$$

Pe altă parte dacă în determinantul V_n aducem în primele linii liniile de ordinul $r_1, r_2, \ldots r_{n-m}$

$$(-1)^{\mu} V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_{r_1} & \ldots & x_{r_1}^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{r_{n-m}} & \ldots & x_{r_{n-m}}^{n-1} \\ 1 & x_{s_1} & \ldots & x_{s_1}^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{s_m} & \ldots & x_{s_m}^{n-1} \end{vmatrix} = [\Pi (x_{r_i} - x_{r_j})]\ [\Pi (x_{s_i} - x_{s_j})] \times [\Pi (x_{s_i} - x_{r_j})]$$

în care μ are aceiaşi valoare ca în relaţia (23), relaţie care deci se poate scrie

$$\Delta = v_n \sum \frac{(x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_m})^{n-m+k}}{\prod_{i=1}^{n-m} (x_{s_1} - x_{r_i})(x_{s_2} - x_{r_i}) \ldots (x_{s_m} - x_{r_i})}.$$

Ţinând seama de valoarea lui Δ dată de egalităţile (21) şi (22), obţinem următoarea identitate din clasa EULER-IOACHIMESCU

$$\sum \frac{(x_1\, x_2 \ldots x_m)^{n+k-m}}{\prod_{i=m+1}^{n} (x_1 - x_i)\,(x_2 - x_i) \ldots (x_m - x_i)} =$$

$$\begin{vmatrix} p_m & p_{m-1} & \ldots & p_{m-k+1} \\ p_{m+1} & p_m & \ldots & p_{m-k+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m+k-1} & p_{m+k-2} & \ldots & p_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} & \ldots & P_{k-m+1} \\ P_{k+1} & P_k & \ldots & P_{k-m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{k+m-1} & P_{k+m-2} & \ldots & P_k \end{vmatrix} \quad (24)$$

In cazul particular $m=1$ egalitatea (24) ne conduce la identităţile EULER-IOACHIMESCU, iar în cazul $k = 1$ obţinem identitatea WEBER-PROUHET [1], cunoscută sub forma

$$\sum \frac{(x_1\, x_2 \ldots x_m)^{n-m+1} \prod_{i,j=1}^{m} (x_i - x_j)^2}{\varphi'(x_1)\,\varphi'(x_2) \ldots \varphi'(x_m)} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} p_m\,, \quad (25)$$

şi mai ales în cazurile particulare $m = 2$ şi $n = 3, 4$ [2].

Metoda prin care am ajuns la identitatea (24) ne permite să stabilim şi alte identităţi.

Astfel pornind dela un determinant VANDERMONDE căruia îi lipsesc coloanele corespunzătoare elementelor

$$x_i^{n-m-r} \text{ şi } x_i^j \; (j = n-m+1, \ldots\; n-m+k-1)$$

găsim identitatea

$$\sum \frac{(x_1 x_2 \ldots x_m)^{n-m+k}\, p_r^{12\ldots m}}{\prod_{m+1}^{n} (x_1 - x_i)\,(x_2 - x_i) \ldots (x_m - x_i)} = \begin{vmatrix} p_{m+r} & p_{m-1} & \ldots & p_{m-k+1} \\ p_{m+r+1} & p_m & \ldots & p_{m-k+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m+r+k-1} & p_{m+k-2} & \ldots & p_m \end{vmatrix}, \quad (26)$$

în care $p_r^{1,2,\ldots m}$ este suma combinărilor luate câte r a cantităţilor x_i $(i = m+1, \ldots\; n)$, egalitate care pentru $m = 1$ se reduce

1) B. NIEWENGLOWSKI. *Algèbre* II 1921, p. 567.

2) *Culegere de probleme.* Algebra I 1938, Cap. IV, prob. 39 şi 47.

la identitatea d-lui N. GHIRCOIAȘU, iar în cazul $k = 1$ ne conduce la o identitate de felul celei dela (25).

$$\sum \frac{(x_1\ x_2 \dots x_m)^{n-m+1}\ p_r^{12\dots m}}{\prod_{m+1}^{n} (x_1 - x_i)(x_2 - x_i)\dots(x_m - x_i)} = p_{m+r}. \qquad (27)$$

Tot astfel dacă pornim dela un determinant de tipul VANDERMONDE, căruia îi lipsesc coloanele corespunzătoare elementelor x_i^j $(j = n - m, \dots n - m + k - 2)$ și $x_i^{n-r+k-1}$ $(m > r)$, găsim identitatea

$$\sum \frac{(x_1 x_2 \dots x_m)^{n-m+k-1}\ p_r^{m+1,\ m+2,\dots n}}{\prod_{m+1}^{n} (x_1 - x_i)(x_2 - x_i)\dots(x_m - x_i)} = \begin{vmatrix} p_m & \dots & p_{m-k+2} & p_{r-k+1} \\ p_{m+1} & \dots & p_{m-k+3} & p_{r-k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m+k-1} & \dots & p_{m+1} & p_r \end{vmatrix}$$

în care $p_r^{m+1,\dots n}$ este suma combinărilor simple a cantităților x_i $(i = 1, 2, \dots m)$. In cazul particular $m = 1$, care antrenează și $r = 1$, găsim identitățile EULER-IOACHIMESCU, iar în cazul $k = 1$ găsim o identitate analoagă cu (25) și (27)

$$\sum \frac{(x_1\ x_2 \dots x_m)^{n-m}\ p_r^{m+1,\dots n}}{\prod_{m+1}^{n} (x_1 - x_i)(x_2 - x_i)\dots(x_m - x_i)} = p_r. \qquad (28)$$

VI. Inainte de a termina, vom schița o interesantă aplicație a egalității (18), care ne conduce la generalizarea unor determinanți cunoscuți [1].

Fie determinantul

$$\Delta_{nm} = \begin{vmatrix} F(x_1 y_1) & F(x_2 y_1) & \dots & F(x_n y_1) \\ F(x_1 y_2) & F(x_2 y_2) & \dots & F(x_n y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(x_1 y_n) & F(x_2 y_n) & \dots & F(x_n y_n) \end{vmatrix},$$

în care $F(x\,y) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \dots + A_m y^m$.

Notăm cu

$$\varphi_1(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$
$$\varphi_2(y) = b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n = 0.$$

ecuațiile cari au ca rădăcini respectiv pe x_i și y_i $(i = 1, 2, \dots n)$.

1) N. CIORĂNESCU. G. M. XL, pag. 151 și 156.

Dacă facem produsul determinanţilor de ordinul $(m+1)$

$$D_{m-n+1,\,n} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ A_0 & A_1 y_1 & A_2 y_1^2 & \dots & A_m y_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_0 & A_1 y_n & A_2 y_n^2 & \dots & A_m y_n^m \end{vmatrix},$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^m & x_1^{m-1} & x_1^{m-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^m & x_n^{m-1} & x_n^{m-2} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

şi ţinem seama că $\varphi_1(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$, obţinem

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V_n(x) \cdot D_{m-n+1} = a_0^{m-n+1} \Delta_{nm}$$

care conform egalităţii (18) se poate scrie

$$\Delta_{nm} = \frac{(-1)^{nm+\frac{n(n-1)}{2}} A_0 A_1 \dots A_m V_n(x) V_n(y)}{(a_0 b_0)^{m-n+1}} \begin{Vmatrix} \frac{a_0}{A_0} & \frac{a_1}{A_1} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{a_0}{A_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_n}{A_m} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & b_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 \end{Vmatrix},$$

în care matricele au $(m-n+1)$ linii şi $(m+1)$ coloane, iar cu $V_n(x)$ şi $V_n(y)$ am notat determinanţii VANDERMONDE de ordinul n formaţi respectiv cu x_i şi y_i $(i=1, 2, \dots n)$, cu convenţia

$$\begin{Vmatrix} \frac{a_0}{A_0} & \frac{a_1}{A_1} & \dots & \frac{a_n}{A_n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 \end{Vmatrix} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i\, b_{n-i}}{A_i}.$$

MIRCEA ADAM.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE „ISTORIA MATEMATICII“ PE 1948

Cercetările de istoria matematicii în România încep să se cristalizeze în jurul activității *Grupului român pentru istoria științei*. Semnalăm în București în primul rând cercetările d-lui FL. DEM. BALDOVIN asupra primelor cărți românești de matematici, cercetări care însă n'au fost încă publicate într'o lucrare de sinteză. Se cunoaște activitatea neobosită dela Iași a d-lui DEM. MANGERON, care răspândește note despre trecutul matematicei în general. In Cluj atenția cercetătorilor de istoria matematicii se îndreptează mai ales asupra trecutului matematicei ardelene, cercetări inspirate de d-l V. MARIAN. Intre cercetătorii mai tineri din această direcție, se cuvine să reținem numele d-lui I. V. MĂTIEȘ, profesor la Seminarul Pedagogic Universitar din Cluj. D-sa a cercetat multe biblioteci și arhive, pentru a scoate la iveală amănunte din trecutul învățământului matematic ardelean. (Cursurile dela Blaj, Năsăud, Oradea,...). In *Gazeta Matematică*, LIII a publicat biografia lui PAUL TANCO primul Român, doctor în matematică (la Graz în 1872). Credem că ar fi bine ca activitatea d-lui I. V. MĂTIEȘ să fie răsplătită cu premiul de istoria matematicei pe 1948.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE „ISTORIA MATEMATICII“

G. G. CONSTANTINESCU, V. MARIAN.

Acest raport a fost aprobat de Adunarea generală din 24 August 1948.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1949

In Adunarea generală din 24 August 1948, s'a hotărît să se țină și în anul 1949 tradiționalul concurs al *Gazetei Matematice*.

Concursul va avea loc în vacanța de Paști.

Condițiile de înscriere la concurs și programa analitică a concursului se va anunța în numărul 5 din Ianuarie 1949 al revistei *Gazeta Matematică*.

In principiu înscrierile la concurs se fac după normele publicate la pagina 30 şi 31 din volumul LIII al revistei *Gazeta Matematică*.

Cererile de înscriere la concurs se primesc la sediul societăţii *Gazeta Matematică*, Calea Griviţei 158 Bucureşti, până în ziua de 5 Martie 1949 ora 12.

Numele candidaţiilor admişi la concurs se va publica în numărul de pe Martie 1949 al revistei *Gazeta Matematică*.

***

NOTE MATEMATICE

10. *Generalizarea identităţei lui* LAGRANGE. In *Gazeta Matematică*, Vol. L la pag. 122 d-l Prof. V. VÂLCOVICI şi apoi la pag. 287 d-l N. N. MIHĂILEANU au dat câte o generalizare a identităţei lui LAGRANGE.

Menţionez şi următoarea generalizare:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \sum_{i=1}^{n} b_i y_i - \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)(x_i y_j - x_j y_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)(x_i y_j - x_j y_i).$$

Demonstrarea ei se poate face imediat pornind dela matricele

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ b_1 & b_2 \dots b_n \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \dots x_n \\ y_1 & y_2 \dots y_n \end{Vmatrix}$$

şi aplicându-le teorema lui CAUCHY-BINET.

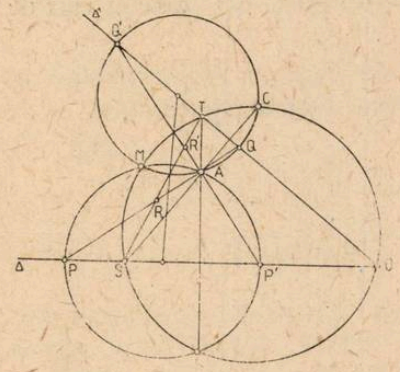
MIRCEA ADAM.

11. *Asupra problemei 5781.* Enunţul problemei 5781, rezolvată în *Gazeta Matematică*, Anul XLIX, pag. 756 este următorul:

O secantă variabilă dusă prin punctul fix A *taie în* P *şi* Q *două drepte fixe* Δ *şi* Δ', *care se întâlnesc în* O. *Dacă* B *şi* C *sunt simetricele lui* A *faţă de* Δ *şi* Δ' *să se afle locul geometric al intersecţiei cercurilor* APB *şi* AQC.

S'a găsit că locul geometric al punctului M de intersecție este cercul BOC.

Păstrând notațiile și notând încă: P' a doua intersecție a cercului APB cu dreapta Δ, Q' a doua intersecție a cercului AQC cu dreapta Δ', S intersecția dreptelor AC și Δ, T intersecția dreptelor AB și Δ', iar R, R' intersecția dreptei ST cu PQ și P'Q'.



Se vede că A este ortocentrul triunghiului OST, înscris în cercul BOC, iar dreptele PQR și P'Q'R' sunt perpendiculare.

Putem enunța așa dar:

Două drepte perpendiculare duse prin ortocentrul unui triunghiu întâlnesc cele trei laturi în perechile de puncte P, P'; Q, Q'; R, R'. Cercurile descrise pe segmentele $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$, $\overline{RR'}$ ca diametre sunt în fascicol de genul al doilea, punctele fundamentale fiind ortocentrul și un punct pe cercul circumscris.

Ținând apoi seama de teorema lui MIQUEL, vedem că prin M mai trec și cercurile TRQ, TR'Q'. SRP, SR'P', OPQ, OP'Q'.

Deci în total 9 cercuri trec prin acest punct.

Mijloacele segmentelor PP', QQ', RR' sunt colineare pe linia centrelor (D) a fascicolului de mai sus — și aceasta este teorema cunoscută a lui DROZ-FARNY.

Dreapta lui DROZ-FARNY (D) este mediatoarea segmentului AM, deci, conform unui rezultat cunoscut din geometria analitică înfășoară o conică cu focarele în ortocentrul triunghiului și centrul cercului circumscris, concentrică așa dar cu cercul lui EULER, și de axă mare egală cu raza cercului circumscris.

Fie N mijlocul lui AM. Prin N trece și dreapta lui SIMSON a punctului M față de triunghiul OST. Aceasta se confundă cu dreapta lui DROZ-FARNY dacă este perpendiculară pe AM.

Așa dar: condiția ca o dreaptă SIMSON să fie și dreaptă DROZ-FARNY este ca să fie perpendiculară pe dreapta ce unește punctul respectiv cu ortocentrul triunghiului. In această ipoteză,

se constată uşor pe o figură, că dreapta lui SIMSON a diametralului trece prin centrul cercului circumscris.

Tot în acest caz dreapta care uneşte ortocentrul cu punctul de pe cercul circumscris având ca dreaptă SIMSON o dreaptă DROZ-FARNY este axa parabolei înscrisă în triunghiu şi având focarul în acest punct; aşa dar este tangentă ipocicloidei cu trei puncte de întoarcere studiată în G. M. Anul XLIX, pag. 82.

P. P. DRĂGHICESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Politehnica din Bucureşti. Facultatea de Construcţii

Examenul de Analiză. Iulie 1948

I. Fiind dată funcţiunea:

$$y = f(x, m, n) = (nx + \sqrt{1 + m^2 x^2})^n$$

în care x este variabila independentă, iar m şi n parametri, se cere:

1. Să se arate că ea verifică o ecuaţie diferenţială liniară de forma:

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0$$

în care A, B şi C sunt polinoame în x.

2. Să se integreze ecuaţia (1) folosind integrala particulară dată.

3. Luând pe t ca nouă variabilă independentă şi efectuând transformarea

$$t = \varphi(t)$$

să se determine toate funcţiunile $\varphi(t)$ astfel ca noua ecuaţie să nu conţină termenul de primul ordin.

4. Să se integreze ecuaţia diferenţială transformată când se ia pentru $\varphi(t)$ cea mai simplă funcţiune, deducându-se apoi integrala generală a ecuaţiei date şi să se compare rezultatul cu cel dela punctul (2).

5. Să se arate că expresiunea:

$$\frac{f(x, m + 2n) + f(x, m - 2n)}{f(x, m, n)}$$

este un polinom în $P(x, m)$.

II. Să se arate că funcţiunea:

$$f(x) = \frac{1}{\cos x \sin x (\cos x + \sin x)}$$

se poate pune sub forma:

$$\frac{A}{\cos x} + \frac{B}{\sin x} + \frac{C}{\cos x + \sin x}$$

şi să se integreze şi să se efectueze integrala nedefinită: $\int f(x)\,dx$.

III. Să se calculeze integrala dublă

$$\iint x^2y^2\sqrt[3]{1-x^3-y^3}\,dx\,.\,dy\,;\quad x\geqslant 0\quad y\geqslant 0\quad \text{şi}\quad x^3+y^3\leqslant 1$$

şi utilizându-se schimbările de variabile

$$x=\rho\cos^{\frac{2}{3}}\theta\quad \text{şi}\quad y=\rho\sin^{\frac{2}{3}}\theta.$$

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Mayo 1948. Ano XXI No. 1 (273). B. I. BAIDAFF: La criba de ERATÓSTENES e la luz del siglo XX. B. I. BAIDAFF: ERATÓSTENES DE CIRENE.

Boletin Matematico. Julio 1948. Ano XXI. No. 2 (274).

Boletin Matemático. Setiembre 1948. Ano XXI. No. 3 (275). B. I. BAIDAFF: Poligonos convexos de numero infinito de lados.

Bulletin de Science et Technique de la Politechnique de Timişoara. Tome 13. Fasc. I. Tipografia Românească. Timişoara. V. ALACI: Une classe de fonctions simplement discontinues. M. GHERMĂNESCU: Solutions mesurables de certaines équations fonctionnelles linéaires à plusieurs variables. E. ARGHIRIADE: La transformation par centres radicaux [1].

Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences. Tome 48 (1—2) 1947. Tipografia „Rotativa", Bucureşti. AL. PANTAZI: Sur les variétés non-holonomes à asymptotiques rectilignes et leur déformation projective. C. DRÂMBA: Sur les singularités de certains systèmes différentiels. O. ONICESCU et G. MIHOC: Chaines de mouvements discontinus et changements d'état. G. VRÂNCEANU: Sur les espaces partiellement projectifs. A. HALANAY: La théorie de GALOIS des extensions séparables infinies et les groupes topologiques. AL. GHIKA: Sur une propriété des espaces de fonctions p-sommables ($p>1$). R. BLUM: Sur la classe des variétée riemanniennes. I. P. ELIANU: Le problème de CAUCHY pour l'équation des ondes itérées. N. TEODORESCU: L'application des ensembles et les conditions de biunivocité ponctuelle.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVIII. Nr. 9. Noembrie 1948. E. VIŞA: Asupra cubicelor circulare şi iperbolice-echilatere unicursale drepte. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXXIV. Nr. 3. Iulie-Septembrie 1948.

J. GONZALES GALÉ. Probabilidades y Diferencias Finitas. Buenos-Aires. Libreria „El Ateneo". 1948.

G. VRÂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle* [2] Vol. I. Bucarest, 1947. Sub imboldul teoriilor fizice moderne, mai ales a teoriei relativităţii generalizate a lui EINSTEIN publicată în anul 1913, Geometria diferenţială

---

1) Publicat şi în *Gazeta Matematică*, Vol. LIV, pag. 31.

2) Această recenzie a fost scrisă şi predată redacţiei numai cu câte-va zile înaintea decesului autorului ei.

n-dimensională a căpătat un avânt puternic, care ne-a dus pe deoparte la o cunoaştere profundă a lumii noastre fizice, iar pe de altă parte ne-a făcut să obţinem, prin generalizări naturale, noi forme spaţiale cari la rândul lor nu au întârziat să-şi demonstreze fecunditatea în domeniul fizicei teoretice; în particular în teoriile unitare ale câmpului gravitaţional şi electromagnetic.

In decurs de mai puţin de 30 ani s'a clădit astfel unul din cele mai măreţe şi pasionante edificii ale matematicilor moderne, care astăzi pare a fi terminat în linii mari. D-l Prof. VRÂNCEANU a ales deci momentul potrivit pentru a se adresa publicului cu tratatul său « *Leçons de Géométrie différentielle* ». Din această lucrare concepută în 2 volume, primul volum a ieşit de sub tipar acum câteva luni. El reprezintă o introducere amănunţită în domeniul Geometriei diferenţiale *n*-dimensionale, în care autorul sintetizează diferitele metode de expunere şi cercetare care s'au încetăţenit în această disciplină: Calculul diferenţial absolut a lui RICCI şi LEVI-CIVITA desvoltat de VEBLEN, SCHOUTEN, WEYL etc. Calculul exterior al formelor PFAFF şi metoda reperului mobil a lui CARTAN şi Calculul absolul al congruenţelor desvoltat şi utilizat de autor în cercetările sale. Din acest punct de vedere cartea d-lui Prof. VRÂNCEANU ocupă un loc unic în literatura matematică.

Volumul I este împărţit în 6 capitole:

In primul capitol intitulat: « *Congruenţe şi forme ale lui* PFAFF » autorul introduce în primul rând noţiunea de vector şi tensor (covariant şi contravariant) într'o varietate *n*-dimensională X_n şi defineşte operaţiile algebrice cu aceste mărimi. O particularitate a acestui capitol este evidenţierea dela început a legăturii naturale ce există între un câmp de vectori contravarianţi şi o congruenţă în spaţiul X_n dat fiind poziţia centrală ce o ocupă sistemele de congruenţe în această carte. In a doua parte a acestui capitol se tratează formele lui PFAFF, sisteme de congruenţe şi sisteme de *n* congruenţe independente în spaţiul X_n faţă de care se definesc componentele vectorilor şi tensorilor. In legătură cu legile de transformare a tensorilor faţă de transformările de congruenţe numite de autor « *Calculul diferenţal absolut al congruenţelor* », se remarcă dualitatea ce există între acest calcul şi calculul diferenţial absolut clasic (de coordonate). Insfârşit autorul introduce, în legătură cu aceleaşi transformări de congruenţe, consideraţii de ordin grupal, isbutind astfel să obţină o legătură naturală cu teoria grupurilor lui LIE, neglijată în general în tratatele moderne de Geometrie diferenţială *n*-dimensională. Ajungem astfel la capitolul II dedicat teoriei grupurilor în care se tratează pe rând: 1. Grupul continuu cu un parametru 2. Grupuri continui cu mai mulţi parametri 3. Ecuaţiile diferenţiale şi proprietăţile constantelor de structură ale unui grup şi însfârşit noţiunile de transitivitate şi primitivitate.

Capitolul III se ocupă cu invarianţi şi problema echivalenţei. Sunt tratate pe rând: Problemele de echivalenţă în raport cu grupul general al transformărilor de congruenţe şi subgrupurile acestui grup precum şi invarianţii unei ecuaţii diferenţiale de primul şi al doilea ordin. In legătură cu acest capitol trebue relevat *contribuţia personală* a autorului la problemele tratate şi în special metoda determinării invarianţilor grupurilor ce păstrează două sau mai multe sisteme de congruenţe complimentare.

Capitolul IV. Spațiile cu conexiune afină. După introducerea coeficienților de conexiune se deduce legea de transformare a acestor coeficienți față de o transformare de variabile și se definesc coordonate cartesiene și coordonate normale (ale lui VEBLEN) față de un punct. Se introduc apoi derivarea covariantă și noțiunea importantă a paralelismului și se deduc formulele paralelismului pentru vectori covarianți și contravarianți. Se stabilește legătura între acești coeficienți de conexiune și coeficienții de conexiune față de un sistem de congruențe și se dau formulele analoage față de un astfel de sistem.

Paragraful următor tratează despre curbe într'un spațiu cu conexiune afină. Se definesc curbele autoparalele ale spațiului și transformările proective (care lasă neschimbate aceste curbe) și coordonate carteziene și normale de-a-lungul unei curbe. In această legătură trebue relevată *diferența în enunțul teoremei lui* FERMI dat de LEVI-CIVITA (pentru spațiile riemanniene) și EISENHART pe de o parte și de autor pe de altă parte. Se introduce tensorul de torsiune și tensorul de curbură și se determină relațiile între acești 2 tensori. După determinarea identităților lui BIANCHI și VEBLEN (despre care se arată că sunt o consecință a celor ale lui BIANCHI) autorul introduce *tensorul simetric de curbură* cu ajutorul căruia multe din formule și identități se prezintă mai omogene și mai simple. Se consideră apoi curbura asociată unui vector, tensorul de curbură contractat (al lui RICCI), problema echivalenței a două spații cu conexiune afină și ecuațiile de structură.

Capitolul V. Spații Riemanniene. Cu ajutorul unei forme patratice diferențiale invariante sunt definite noțiunile metrice de unghiu și distanță, precum și o conexiune afină (ai cărei coeficienți sunt simboalele lui CHRISTOFFEL de a doua speță) care la rândul ei determină paralelismul lui LEVI-CIVITA într'un astfel de spațiu. Sunt tratate apoi pe rând geodezicele spațiului și curbura sa. In legătură cu toate aceste probleme trebue remarcat că pentru prima dată se consideră într'un manual de Geometrie diferențială spații riemanniene singulare (adică cu metrică degenerată) spații a căror natură a fost cercetată și clarificată în bună parte de geometrii români.

Paragraful următor se ocupă cu spații riemanniene cufundate într'un spațiu euclidean. Cu ajutorul unei formele date de autor se deduc ecuațiile lui GAUSS, CODAZZI și RICCI-KÜHNE. Sunt tratate apoi: Invarianții unui subspațiu într'un spațiu euclidean, formule fundamentale ale lui BOMPIANI, formulele lui FRENET și în fine paralelismul lui MYLLER.

Capitolul se termină cu un paragraf despre ecuațiile cu variații a curbelor autoparalele.

Ultimul capitol se ocupă cu spațiile cu conexiune proiectivă. După definiția lor cu ajutorul unui sistem de coeficienți de conexiune (proiectivă) se dă legea de transformare a acestor coeficienți, se introduc coordonate carteziene față de un punct și sisteme de congruențe într'un astfel de spațiu. Se definesc vectorii și tensorii proiectivi și se asociază unui spațiu cu conexiune proiectivă un spațiu cu conexiune afină. Insfârșit autorul introduce tensorul de curbură proiectivă a lui WEYL și definește derivarea tensorială într'un astfel de spațiu.

Această expunere succintă, ne arată totuşi cât de bogată în idei şi cât de cuprinzătoare este cartea d-lui Prof. G. VRÂNCEANU. Ea va contribui desigur la menţinerea şi ridicarea prestigiului matematicei româneşti, adăogându-se la alte cărţi de ansamblu publicate de matematicienii români cum sunt: *Théorie projective des réseaux* de G. ŢIŢEICA (1923) sau *Principes topologiques de la théorie des fonctions* de S. STOILOV (1937).

ALEXANDRU PANTAZI.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 350 (G. M., Vol. LIV, p. 82). Se cere semnificaţia iniţialelor F. I. C. ca autor al unor tratate de matematici.

Ca şi în cazul cererei 312 [1]) pentru semnificaţia iniţialelor F. G. M. şi F. J., m'am adresat d-lui V. THÉBAULT, vechiu prieten şi mare entuziast al *Gazetei Matematice*, care a dat următoarele lămuriri interesante.

Iniţialele F. I. C. corespund la FRÈRE IRLIDE CASENEUVE, care în calitatea de *Superior General* a semnat tratatele editate în timpul cât îndeplinea această demnitate în congregaţie. După cum am arătat şi în răspunsul dat cererei 312 [1]), iniţialele care încep cu F. (Frère) de pe cărţile editate de unele congregaţii, servesc a arăta cărţile editate în timpul cât respectivul *frate* era *Superior General*, fără ca el să fi fost neapărat autorul acelor cărţi.

Mulţumesc şi pe această cale d-lui V. THÉBAULT, care urmăreşte cu mult interes *Gazeta Matematică* şi care se oferă să comunice ori ce interesează pe cititorii *Gazetei Matematice* în legătură cu mişcarea matematică în Franţa.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2462. *Să se găsească un număr de două cifre* A, *aşa încât un număr oarecare* N, *să fie divizibil cu* A, *numai când numărul format de ultimele sale două cifre adunat cu de trei ori suma celorlalte cifre ale sale, e divizibil cu* A. *Generalizare.*

G. ŢIŢEICA.

Să enunţăm problema generalizată:

„In sistemul de numeraţie cu baza B, *să se găsească un număr de* p *cifre* A, *aşa încât un număr* oarecare N, *să fie divizibil cu* A, numai *când numărul format de ultimele sale* p *cifre adunat cu de* k *ori suma celorlalte cifre ale sale, e divizibil cu* A".

1) A se vedea *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, p. 172.

Fie $N = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \ldots + a_1 B + a_0$, unde $a_i < B$ sunt cifre *oarecare* ale sistemului de numeraţie cu baza B.

Problema ne spune că congruenţele

$$N \equiv 0 \pmod{A} \qquad (1)$$

$$k(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_p) + a_{p-1} B^{p-1} + \ldots + a_0 \equiv 0 \pmod{A}$$

trebue să fie echivalente. Din (1) deducem prin scădere:

$$a_n (B^n - k) + a_{n-1} (B^{n-1} - k) + \ldots + a_p (B^p - k) \equiv 0 \pmod{A}. \quad (2)$$

Cum această congruenţă trebue să fie adevărată oricare ar fi a_i, deducem că (2) este echivalentă cu sistemul

$$B^n \equiv k\ ,\ B^{n-1} \equiv k, \ldots B^{p+1} \equiv k\ ,\ B^p \equiv k \pmod{A}. \quad (3)$$

Din ultimele două congruenţe deducem $B^p (B-1) \equiv 0 \pmod{A}$.

Din această congruenţă deducem $B^{p+r+1} \equiv B^{p+r} \pmod{A}$ şi deci $B^{p+r} \equiv B^p \pmod{A}$. Prin urmare sistemul (3) este echivalent cu sistemul

$$B^p (B - 1) \equiv 0\ ;\ B^p \equiv k \pmod{A}. \quad (4)$$

Acest sistem constitue deci condiţia necesară şi suficientă pentru ca congruenţele (1) să fie echivalente, sau, ceea ce este tot una, ca sistemul (3) să fie verificat.

Sistemul (4) impune anumite condiţii structurii numerelor A şi k. Vom căuta care anume numere pot satisface sistemul (4).

Din prima congruenţă a sistemului (4) deducem că orice divizor al lui A divide ori pe B^p, ori pe $B - 1$, şi cum aceste numere sunt prime între ele, deducem

$$B^p = m\alpha\ ;\ B - 1 = n\beta\ ;\ A = \alpha\beta. \quad (5)$$

Inlocuind în a doua congruenţă (4) obţinem

$$m\alpha \equiv k\ ;\ (n\beta + 1)^p \equiv k \pmod{\alpha\beta} \quad (6)$$

De aci deducem

$$k = k_1 \alpha = k_2 \beta + 1 \quad (7)$$

ecuaţie în numere întregi k_1, k_2, care admite întotdeauna soluţii deoarece α şi β sunt primi între ei.

Prin urmare, dacă α este un divizor al lui B^p, şi β, al lui $B - 1$, astfel ca $B^p > A = \alpha\beta \geqslant B^{p-1}$, iar k este dat de ecuaţia (7) regula de divizibilitate formulată prin enunţul generalizat al problemei 2462 este adevărată.

Cum valorile lui k nu pot fi oarecari, ci satisfac condiției (7) problema nu va avea întotdeauna soluții.

Cazuri particulare. 1°. $k = 3$, $p = 2$. Din (7) deducem $3 = k_1\alpha = k_2\beta + 1$, deci $\beta = 2$, sau $B = 1$ și $\alpha = 3$ sau $\alpha = 1$. Vom elimina dela început $\alpha = 1$, căci $A = \beta$ n'ar mai avea două cifre ($p = 2$), deoarece β este un divizor al lui $B - 1$.

Rămâne alternativele

$$k = 3k_1 = 2k_2 + 1 \quad ; \quad k = 3k_1 = k_2 + 1. \tag{8}$$

In prima ipoteză $B^2 = \mathcal{M}3$, $B - 1 = \mathcal{M}2$, $B^2 > 6 \geqslant B$ de unde $B = 3$ și $A = (6)_{10} = (20)_3$, unde indicii arată baza de numerație în care este scris numărul.

Obținem regula de divizibilitate prin $(20)_3$:

Un număr în baza 3 este divizibil prin $(20)_3$ atunci când numărul format de ultimele sale două cifre adunat cu de 3 ori suma celorlalte cifre ale sale este divizibil cu $(20)_3$, adică $N = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \ldots + a_1 3 + a_0$ *este divizibil cu $(20)_3 = 6$ când*

$$3(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2) + 3a_1 + a_0 = \mathcal{M}6.$$

Această regulă se descompune în alte două reguli mai simple:

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 = \mathcal{M}2.$$

Cealaltă alternativă (8), ne conduce la $B^2 = \mathcal{M}3$, $A = 3$, $B^2 > 3 \geqslant B$, care ne dă $B = 3$. Se obține regula de divizibilitate în sistemul cu baza 3 pentru $3 = (10)_3$. Se vede că acestă regulă se reduce, ca mai sus, la $a_0 = 0$.

2°. $B = 10$, $p = 2$. B^2 are divizorii 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, iar $B - 1$, 1, 3, 9. Cum A trebue să fie de două cifre, vom avea $A = 10$, 20, 25, 50, 12, 15, 30, 60, 75, 18, 36, 45, 90. Valorile lui k vor fi determinate de ecuația (7). De pildă, pentru $A = 36$, $\alpha = 4$, $\beta = 9$, deci $k = 36s + 28$. Luând cea mai mică valoare a lui k, obținem regula de divizibilitate prin 36:

$$N \equiv 28(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2) + 10a_1 + a_0 \qquad (\text{mod. } 36).$$

Pentru ca N să se dividă cu 36, regula de mai sus se descompune în $10a_1 + a_0 = \mathcal{M}4$ și $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = \mathcal{M}9$.

Notă. 1°. **Regula de divizibilitate formulată de generalizarea problemei 2462 se va descompune întotdeauna în alte două reguli mai simple. Cum α și β sunt primi între ei, numărul N va fi divizibil cu $A = \alpha\beta$, numai dacă este**

divizibil separat prin α şi β. Cum $B^p = m\alpha$, să notăm cu r cea mai mică putere pentru care $B^r = M\alpha$. Numărul N va fi divizibil cu α, numai dacă numărul format de ultimele sale r cifre va fi divizibil cu α. Cum $B \equiv 1 \pmod{\beta}$ numărul N va fi divizibil cu β când suma cifrelor sale va fi divizibilă cu β.

2°. Dintre corespondenţii anunţaţi pe copertă numai d-l I. B. FLORESCU a arătat că $A = (20)_3$, $B = 3$ este o soluţie a problemei 2462; d-l P. P. DRĂGHICESCU (student) s'a limitat la cazul $B = 10$ şi a găsit pe o cale puţin riguroasă $A = 12, 24, 48$. Nici un corespondent n'a dat soluţia cazului general.

PROBLEMA 4634. *Să se arate că dacă:*

$$b^2 - 4ac = 0$$

există identitatea

$$4(2b - a - 4c)(2b - c - 4a) = (5b - 4a - 4c)^2.$$

Să se interpreteze rezultatul

AL. A. ROŞU.

Considerăm diferenţa

$$D = 4(2b - a - 4c)(2b - c - 4a) - (5b - 4a - 4c)^2$$

care după efectuarea calculelor devine

$$D = 9(b^2 - 4ac)$$

care, din cauza primei condiţii din enunţ, este identic nulă.

Examinând forma diferenţei D, se vede că nu este de cât realizantul uneia din ecuaţiile

$$(2b - a - 4c)x^2 + (5b - 4a - 4c)x + (2b - c - 4a) = 0 \quad (1)$$

$$(2b - c - 4a)x^2 + (5b - 4a - 4c)x + (2b - a - 4c) = 0 \quad (2)$$

Prima condiţie din enunţ exprimă că una din ecuaţiile

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{sau} \quad cx^2 + bx + a = 0$$

are rădăcină dublă. Identitatea a doua din enunţ arată că şi ecuaţiile (1) şi (2) au rădăcinile duble. Aceasta este interpretarea cerută.

Au dat această soluţie: FL. J. ABELES, M. F. AMĂRĂŞTEANU, CLEMENT V. ANICULAESI, R. APOSTOL, LIVIUS M. BIVOLARU, V. BOGZA, G. BOGZA, GR. BOGDAN, VIRGIL N. BUCUR, M. CHIRIŢĂ, P. P. COJOCARU, G. G. CONSTANTINESCU, AUREL I. CORNĂŢEANU, LONGIN-ROMULUS N. ANDRONESCU, C. COTESCU, I. COTIGHER, CĂLIN I. C. DIMITRIU, G. DIMITRIU, P. DOBRESCU. I. D. ENACHE, I. GR. ENĂCHESCU, P. FIRU, VICTOR L. FLORESCU, I. N. GLIGOR, E. ST. IACOB, FR. IGNAŢIU, H. L. IOACHIM, IULIAN G. IONESCU, AL. C. JIPA, P. T. MAMUT. E. MARCOVICI, GR. MARTEŞ, D. MAVRODIN, I. A. MERBL,

N. I. MILU, EM. S. MODÂLCĂ, ŞT. M. MOISOVICI, MIRCEA GH. NICULESCU, V. A. PĂDURET, C. PANTELIMON, MIRCEA D. PETCULESCU, ACHILE PETRESCU, VINTILĂ GH. PETRESCU, MIRCEA D. POPA, AL. POPESCU-ZORICA, GAVRIL I. POPOVICIU, N. I. PUNGĂ, AL. I. ROHR, MARCEL M. ROŞCULEŢ, M. P. STĂNCULEANU, VIRGIL STĂNCULESCU, N. D. ŞTEFĂNESCU, ŞT. C. TILICĂ, DORIN N. THEODORESCU, SANDU R. TURCU, N. GH. VARTIC, ALEXANDRA AL. VASILESCU, MIRCEA AL. VASILESCU-STABU, G. G. VRÂNCEANU, E. WEGENER, D. I. CRĂCEA, VIRGIL G. CONSTANTINESCU şi VAL. AL. PETCU.

Dacă se impune ecuaţiei

$$(a+\lambda)x^2+(b+\lambda)x+(c+\lambda)=0$$

condiţia de a avea rădăcinile duble, se găseşte (3)

$$\lambda=\frac{2}{3}(b-2a-2c) \tag{4}$$

şi atunci (3) devine tocmai ecuaţia (1) din soluţia precedentă. Deci interpretarea ce se cere se poate exprima şi astfel: *Dacă o ecuaţie de gradul al doilea are rădăcini duble, atunci şi ecuaţia, obţinută prin dilatarea coeficienţilor cu aceeaşi cantitate* (4), *are rădăcini duble.*

A. A. R.

PROBLEMA 5117. *Un motor cu explozie este dezaxat (adică dreapta descrisă de piciorul bielei, nu trece prin centrul O al cercului manivelei. Distanţa de la O la dreapta de mai sus ne numeşte dezaxaj). Să se afle dezaxajul acestui motor dezaxat, când cursa pistonului c = 100, 8425 cm, lungimea bielei b=200 cm şi lungimea manivelei r = 50 cm.*

ING. OCTAV ORĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: EMIL MODÂLCĂ, C. D. EFTIMIE şi VIRGIL G. CONSTANTINESCU.

Insemnăm cu P_i punctul mort interior şi cu P_e, punctul mort exterior; deci $P_i P_e = c$.

Dacă motorul nu era dezaxat dreapta $P_i P_e$ trecea prin centrul O al cercului manivelei, ceeace nu are loc în cazul considerat.

Din O ducem o perpendiculară pe direcţiunea $P_i P_e$, pe care o taie în punctul O'.

Dezaxajul motorului este: $OO' = \alpha = \varepsilon r$.

Este evident că:

$$c=\overline{P_iP_e}=\overline{O'P_i}-\overline{O'P_e}\quad;\quad \overline{O'P_i}=\sqrt{\overline{OP_i}^2-\overline{OO'}^2};$$

$$\overline{O'P_e}=\sqrt{\overline{OP_e}^2-\overline{OO'}^2}.$$

Insă: $\overline{OO'} = d$; $\overline{OP_i} = b + r$; $\overline{OP_e} = b - r$.

Deci: $c = \sqrt{(b+r)^2 - {}^2d} - \sqrt{(b-r)^2 - d^2}$; dacă $\frac{r}{b} = e$

avem $$c = r\left(\sqrt{\left(\frac{1}{e}+1\right)^2 - \varepsilon^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{e}-1\right)^2 - \varepsilon^2}\right)$$

In cazul problemei:

$$r = 50 \text{ cm} \quad \text{şi} \quad e = \frac{r}{b} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}.$$

Deci $100,\ 8425 = 50\ (\sqrt{25 - \varepsilon^2} - \sqrt{9 - \varepsilon^2})$.

Rezolvând această ecuaţie se găseşte:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{4} \quad \text{sau} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare dezaxajul este: $d = \varepsilon r = \frac{1}{2}.\ 50 = 25$ *cm.* In unele tratate de motoare cu explozie, se desvoltă în serie expresia lui c, adică:

$$c = 2r + r\left[\frac{\varepsilon^2}{\frac{1}{e^2} - 1} + \frac{\varepsilon^4\left(\frac{6}{e^2} + 2\right)}{\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)^3} + \dots\right]$$

din care se constată că în cazul motorului dezaxat cursa pistonului este mai mare, decât la motorul simetric.

Limitându-ne la primii doi termeni ai desvoltării, se găseşte de asemenea că $\varepsilon^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore \quad \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Scopul dezaxării este dublu:

1°. Se reduce presiunea laterală a pistonului faţă de peretele cilindrului şi deci se micşorează uzura.

2°. Din aceeaşi cauză se reduce şi pierderea de putere, prin micşorarea frecării.

Detalii se pot găsi în tratatele de specialitate.

O. Or.

PROBLEMA 6296. *Să se arate, fără ajutorul derivatelor, că funcțiunile*

$$y = (m^2 + n^2)\sin x + 2mn\cos x$$

$$z = 2mn\sin x + (m^2 - n^2)\cos x$$

au același maxim

R. M. CONSTANTINESCU.

Soluția I-a dată de d-l CEZAR N. I. BOERESCU.

Notăm

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \frac{n}{m} \quad \therefore \quad \cos u = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \quad \text{și} \quad \sin u = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

Inlocuind în funcțiunile din enunț, avem

$$y = (m^2 + n^2)(\cos u \sin x + \sin u \cos x) = (m^2 + n^2)\sin(x + u)$$

$$z = (m^2 + n^2)(\sin u \sin x + \cos u \cos x) = (m^2 + n^2)\cos(x - u).$$

Ori, maximul unei funcțiuni $t = \sin\varphi$ sau $t = \cos\varphi$ este 1; iar atunci când $\sin(x + u) = 1$ avem $y = m^2 + n^2$; și când $\cos(x - u) = 1$ avem $z = m^2 + n^2$.

In consecință y și z ating valoarea maximă atunci când sunt egale cu $m^2 + n^2$, adică au același maxim.

De remarcat că y și z nu ating maximul pentru aceeași valoare a lui x, ci pentru valori ale lui x complimentare.

Domnul PETRU A. CERNESCU a dat o soluție analoagă notând $m = k\cos a$, $n = k\sin a$ și deci $m^2 + n^2 = k^2$.

Soluția II-a dată de d-nii STELIAN C. PANTAZOPOL, P. P. TEODORESCU, MIHAIL C. ATHANASIU, RADU CURSARU, GEORGE ENESCU, VALERIU A. PETCU, DAN E. VASILIU.

Considerăm, în general, funcțiunea

$$y = a\sin x + b\cos x.$$

Notând $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, avem $y = \frac{a}{\cos\varphi}(\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x)$

sau

$$y = \frac{a}{\cos\varphi}\sin(x + \varphi).$$

Funcțiunea este *maximă*, când $\sin(x+y)=1$,

adică $$x+\varphi=\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad x=\frac{\pi}{2}-\varphi.$$

sau $$\operatorname{tg} x=\operatorname{cotg}.\varphi=\frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad \sin x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \cos x=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

iar valoarea maximă este

$$y_{max}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Făcând înlocuirile respective din enunț

$$a=m^2-n^2 \quad , \quad b=2mn \quad \text{și} \quad a=2mn \quad , \quad b=m^2-n^2,$$

se obține maximul comun

$$\sqrt{(m^2-n^2)^2+4m^2n^2}=m^2+n^2.$$

Au rezolvat problema pe aceeași cale, considerând funcțiunile cu coeficienții din enunț, d-nii MIHAIL LEON, V. I. ȘANDRU, A. I. VARGĂ, GH. GH. VRÂNCEANU, LONGIN ANDRONESCU, VIRGIL CONSTANTINESCU și B I. CRĂCEA.

Soluția III-a dată de d-nii FELIX L. POPESCU, V. GH. DIACONU, C. CORDUNEANU, MIHAIL AL. LEON, M. G. IOSIFESCU, P. D. COLUMBEANU, ARISTIDE I. DELEANU.

In funcțiunea generală $y=a\sin x+b\cos x$, înlocuind

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}.\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad , \quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

avem ecuația în $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$y\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$$

sau $$(b+y)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+(y-b)=0.$$

Pentru ca rădăcinile să fie reale avem

$$a^2-(y+b)(y-b)\geqslant 0 \quad \text{sau} \quad a^2+b^2-y^2\geqslant 0,$$

iar la limită $y^2=a^2+b^2$ sau $y=\pm\sqrt{a^2+b^2}$

$$\therefore \quad y_{max}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Făcând înlocuirile, ca la soluţia a II-a, se ajunge la valoarea maximă m^2+n^2.

Valorile lui x corespunzătoare maximului sunt respectiv pentru prima funcţiune $x_1=2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{m-n}{m+n}$, iar pentru a doua funcţiune $x_2=2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{n}{m}$.

Notă. Alte soluţii foarte bune au mai dat d-nii ST. C. PANTAZOPOL, I. A. BARBU, N. AL. BUCUR, I. M. PUŢUREANU, M. C. ATHANASIU, M. V. SOARE, PAUL CONSTANTINESCU, I. T. MUNTEANU, E. A. DODU, I. I. NOVAC, P. N. CIUCESCU şi V. A. VISARION.

D-l AL. GH. MORAITE a exprimat o formă de generalizare, înlocuind pe m şi n cu m^p şi n^p, şi a citat că în *„Eléments de Trigonométrie* par F. J. pag. 110" se arată că maximul funcţiunei $y=a\sin x+b\cos x$ este expresia $\sqrt{a^2+b^2}$.

D-nii DAN E. VASILIU, M. V. I. DASCĂLESCU şi ALEX. GH. DĂNESCU (dela Liceul Mihei Viteazul, Bucureşti) s'au folosit de identitatea lui LAGRANGE $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)=(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2$ înlocuind pe α cu a, pe β cu b şi pe α' cu $\sin x$, iar pe β' cu $\cos x$, ajungând astfel la $y^2=(a^2+b^2)-(a\cos x-b\sin x)$. De unde se deduce maximul lui y egal cu $\sqrt{a^2+b^2}$, iar $\operatorname{tg} x=\dfrac{a}{b}$.

GENERAL GH. I. LITEANU.

PROBLEME PROPUSE

6556. Fie M şi D comultiplul minim şi codivizorul maxim al numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ şi M_i, D_i comultiplul minim şi codivizorul maxim al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$. Să se arate că

$$\left(\frac{M}{D}\right)^{n-1}\leqq\frac{M_1M_2\ldots M_n}{D_1D_2\ldots D_n}\leqq\left(\frac{M}{D}\right)^{n}.$$

I. B. FLORESCU.

6557. Să se calculeze cu câte zerori se termină produsul $n!$

Aplicație. Să se arate că produsul 123456789!, se termină cu 30864192 zerori.

GENERAL GR. ZAPAN.

6558. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC; α, mijlocul lui B'C'; α', proiecția lui A pe B'C'. Să se arate că $A\alpha$ trece prin mijlocul lui $A'\alpha'$.

N. N. MIHĂILEANU.

6559. Se construesc două cercuri (O) și (I) ortogonale, de raze R și r; apoi diametrul CD al cercului (O) perpendicular pe dreapta centrelor OI. Segmentele de dreaptă IC și ID taie cercul (I) respectiv în E și F. Pe segmentul IC se ia segmentul $\overline{IM} = \overline{CE}$, iar prin punctul M se duce în unghiul ICO o *antiparalelă* MG la OE. Să se arate că: *a)* Dreapta GF este tangentă cercului (I); *b)* Dacă cercurile (O) și (I) sunt egale, coarda EF este egală cu latura exagonului regulat circumscris cercului (I).

O. N. ȚINO.

6560. Fie F punctul lui FEUERBACH al unuia din triunghiurile ABC înscrise în cercul O și circumscrise sau exînscrise unui cerc I. Perpendicularele din F pe laturile triunghiului ABC întâlnesc a doua oară cercul celor 9 puncte al acestui triunghiu în A', B', C'. Să se demonstreze că dacă A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB atunci dreptele A_1A', B_1B', C_1C' sunt paralele între ele și paralele cu OI.

G-L GH. BUICLIU.

6561. Prin vârfurile A și C ale patrulaterului inscriptibil ABCD se duc paralelele AE, AF, CE, CF la laturile neadiacente. Fie G (AE, BC), H (AB, CE), I (AD, CF), J (AF, CD). Să se arate că:

1°. Patrulaterele BHEG, DIFJ sunt inscriptibile, egale și au diagonalele paralele.

2°. BD și EF sunt paralele.

3°. Punctele A, C și centrele O, O' ale cercurilor ABC și AEF sunt vârfurile unui romb.

CEZAR N. BOERESCU.

6562. Să se construiască un triunghiu dreptunghic cunoscându-i ipotenuza şi unul din punctele lui FEUERBACH.

V. THÉBAULT.

6563. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$y^3 + y^2z + yz^2 + z^3 = 272,$$
$$z^3 + z^2x + zx^2 + x^3 = 41,$$
$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = -25.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6564. Să se arate că ecuaţiile:

$$a\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-a^2} = b, \quad b\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-b^2} = a,$$

admit rădăcina comună $x = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$. Discuţie.

C. IONESCU-ŢIU.

6565. Expresia

$$\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}}$$

se poate pune sub forma $\alpha + \beta\sqrt{2}$, α şi β fiind numere raţionale. Să se găsească α şi β.

GH. GALBURĂ.

6566. Să se arate că seria

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^{[\log n]} \cdot z^n}{n},$$

unde $[\log n]$ e cel mai mare întreg din $\log n$,

1) e divergentă pentru $z = 1$;
2) e convergentă pentru $z = -1$;
3) e convergentă pentru $z \neq 1$ şi $|z| = 1$ (pe cercul de c);
4) e uniform convergentă pentru $|z| \leqq 1$.

N. GAIU.

6567. Fiind dată o conică (C), să se determine locul punctelor M astfel încât să existe cercuri de centru M, care tăind conica (C) în patru puncte, trei din ele să formeze un triunghiu echilateral.

MIRCEA D. POPA.

6568. Se consideră un punct F pe cercul (O) şi un diametru (D) al său.

1°. Să se găsească locul centrelor conicelor (Γ) având un focar în F şi ca directoare dreapta (D).

2°. Dacă (H) este hiperbola echilateră a fascicolului (Γ), se cere ecuaţia înfăşurătoarei curbei (H) când F descrie cercul (O).

3°. Presupunând că diametrul (D) variază, să se găsească locul punctelor de contact ale hiperbolelor echilatere (H) cu tangentele paralele cu o direcţie dată.

EUGEN WEGENER.

6569. Dintr'un punct M aşezat în planul unei elipse, se duc tangentele MT', MT" la curbă, T' şi T" fiind punctele de tangenţă. Se notează prin M_1, M_1' punctele în care cercul MT'T" taie a doua oară dreptele MF, MF', F şi F' fiind focarele elipsei.

1°. Să se arate că dreapta M_1M_1' trece prin centrul elipsei.

2°. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca cercul MT'T" să treacă prin centrul elipsei, este ca punctul M să se afle pe una din diagonalele dreptunghiului construit pe axele curbei.

3°. Să se deducă următoarea proprietate:

Dintr'un punct P aşezat pe una din diagonalele dreptunghiului construit pe axele unei elipse se duc tangentele Pt', Pt'' la elipsă; normalele în punctele t', t'' se taie în punctul p. Să se arate că unghiul POp este drept (O fiind centrul elipsei).

Să se demonstreze şi direct această proprietate; să se deducă locul geometric al punctului p, când P descrie diagonala considerată.

CEZAR COŞNIŢĂ.

6570. Să se determine funcţiile f, φ, ψ astfel încât câmpul definit de vectorul $\bar{u}$, de componente

$$X = f(x)\,[\varphi(y) + \psi(z)] \quad , \quad Y = f(y)\,[\varphi(z) + \psi(x)],$$

$$Z = f(z)\,[\varphi(x) + \psi(y)],$$

să fie *solenoidal* (să aibă divergenţa nulă).

M. GHERMĂNESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii :

Deleanu I. Aristide (6174, 354, 441); *Deutsch G. Emeric* (6173, 259, 65, 354, 402, 20, 6, 41, 85, 502, 35); *Diaconu C. Constantin* (P); *Enescu G. George* (6097, 526); *Marinescu E. Emil* (A, E, P); *Moraite Gh. Al.* (6499, 503, 32); *Păunescu Şt. Gh.* (6173); *Petcu A. Valeriu* (3239, 5843, 6483, 5); *Popa D. Mircea* (3424, 736, 5093, 284, 564, 746, 79, 901, 6033, 239, 518, 9, 50, N, E, P); *Pisancu N. I.* (6424, E); *Soare V. Mircea* (N, P); *Stănescu D. Cristea* (6416, P); *Teleman A. Kostake* (6412, 22, 45, P); *Teodorescu P. P.* (5960, 6353, 478, 97, 507, 39, 50, 646, P); *Vasiliu E. Dan* (6532, 5); *Visarion A. Viorel* (4435, 78, 6036, 105, 286, 354, 4, 451, 503, 16, 30, 2, 5, 65).

Orariul Bibliotecilor Gazeta Matematică

Sălile de bibliotecă sunt deschise după următorul orariu:

Local din Calea Griviţei Nr. 158: In fiecare zi de lucru dela 8 la 12 şi Miercurea dela 16 la 20.

Casa „I. Ionescu" din Str. Răsuri Nr. 25: Luni şi Vineri dela 8 la 10, Marţi şi Miercuri dela 16 la 20.

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate, cu preţul de 200 lei volumul pentru volumele I—XXV; 400 pentru volumele XXVI—L; 800 lei pentru volumele LI—LIII şi eventual numere izolate cu preţul de 20 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.270

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* Lei 230

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele şi ori-ce sume se pot trimite la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 13.737.

N 3299

Biblioteca ASTRA SIBIU

22

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIV

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1949

SUMARUL

1. † Profesorul Alexandru Pantazi . . . . *Al. V. Nicolescu.*
2. Asupra unor teoreme a lui Darboux . . *C. Coşniţă.*
3. Asupra unor condiţii necesare transformării în sateliţi ai pământului a corpurilor lansate de pe pământ . . . . . *C. Iacob.*
4. Concursul „Gazetei Matematice" din 1949 — *G-l Gh. Buiclu, V. Claudian, G. D. Simionescu.*
5. Note matematice: 12—15.
6. Chestiuni de exemen.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3551, 5430, 5681, 6282, 6357, 6358.
11. Exerciţii: 3—6.
12. Probleme propuse: 6571—6585.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1949

83509

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie, compusă în prezent din d-nii: **G. G. Constantinescu**, Doctor în Matematici; **C. C. Teodorescu**, Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **General Gr. Zapan**, (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 24 Ianuarie ora 17^{30}: Adunarea materiei pentru Nr. 6.

Luni 7 Februarie ora 17^{30}: Facerea copertei pentru Nr. 6.

Luni 14 Februarie ora 17: Prima adunare generală.

Luni 21 Februarie ora 17: Continuarea primei adunări generale şi adunarea materiei pentru Nr. 7.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1948 sunt indicate în tabla de materii a volumului LIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **65**11, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cursul mediu şi studenţilor. Abonaţii din provincie trebue să trimită anticipat 10 lei pentru expediţie.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică.*

— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU.

— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»*

60. 1111 2014

† PROFESORUL ALEXANDRU PANTAZI

Din şirul celor aleşi, din şirul geometrilor români care au îmbogăţit prin activitatea lor patrimoniul ştiinţei matematice, s'a desprins încă unul. Profesorul ALEXANDRU PANTAZI a luat — pe neaşteptate — drumul veşniciei.

Moare în plină ascensiune, — în vârstă de 52 ani, — în urma unei grave infecţii a cordului, în dimineaţa zilei de 4 Noembrie 1948, cu toate sforţările făcute pentru a-l salva.

Născut la Piatra-Neamţ, la 21 August 1896 — fiu de învăţător — urmează exemplul muncii şi devoţiunii părintelui său: premiant I-iu în tot timpul cursurilor secundare, îşi ia licenţa în matematici în anul 1920, cu menţiunea „*F. Bine*". Imprejurări aspre, prilejuite de războiul din 1916—1918, la care ia parte ca sub-locotenent, întârzie plecarea lui la Paris; acolo, după ce îşi trece din nou certificatul de licenţă în matematici şi fizică, sub imboldul cursurilor de geometrie proiectivă ale renumitului profesor E. CARTAN, îşi desăvârşeşte pregătirea, trecându-şi cu succes la Sorbona, teza de doctorat.

Lucrarea sa „*Sur l'applicabilité projective des hypersurfaces devoloppables*" prezentată ca teză, este o continuare şi interesantă generalizare a unor rezultate semnalate de profesorul său E. CARTAN, pentru spaţiile obişnuite. Cu spiritul său analitic adânceşte aci studiul aplicabilităţii proiective, îmbogăţindu-l cu proprietăţi noui şi interesante.

De altfel predilecţia lui, pentru studiul geometriei proiective, se evidenţiază complet în cele 40 de lucrări, publicate în diferite reviste de specialitate române şi străine, unele din ele inspirate de lucrările savantului sovietic FINIKOFF.

Tot la Paris urmează cursurile Institutului de Actuariat, luându-şi diploma de actuar-expert, fapt care îi va da posibilitatea

83509

să desfăşure o activitate şi pe acest teren, fiind unul dintre întemeietorii „Şcoalei de Statistică şi Actuariat", şi apoi multă vreme Inspector Actuar în Ministerul Industriei şi Comerţului. Reîntors în ţară ocupă postul de asistent pe lângă catedra de Geometrie Analitică a regretatului GH. ŢIŢEICA, al cărui distins elev fusese; iar în anul 1937 este numit — prin concurs — profesor de Geometrie Descriptivă şi Proiectivă la Şcoala Politehnică din Bucureşti, unde a funcţionat până la stingerea lui din viaţă.

Profesorul ALEX. PANTAZI şi-a consacrat toată activitatea sa matematicii şi profesoratului.

A fost unul din cei mai activi corespondenţi şi colaboratori ai *Gazetei Matematice*, neîntrecut ca număr de probleme rezolvate până acum câţiva ani, premiant I-iu al concursurilor şi un veritabil „elev" al ei.

In 1929 a fost ales membru al revistei, fiind de atunci continuu prezent în redacţia şi în comisiile ei de concurs.

A fost membru al Soc. Rom. de Ştiinţe, secretar şi redactor al *„Buletinului"* ei.

Distincţia lui sufletească se îmbina armonios cu o remarcabilă bunătate; era un atent şi bun coleg, un apropiat sfătuitor al studenţilor.

Profesorul ALEX. PANTAZI a fost totodată şi un îndrumător pentru cei ce voiau să-i „fure" meşteşugul. Le-a pus la îndemână metode simple de cercetare, publicând în acest scop, şi o foarte apreciată monografie în colecţia fostei Academiei Române; i-a încălzit sufleteşte şi, a pus mâna chiar pe daltă, acolo, unde marmura preţioasei geometrii oferea subtile cizelări.

Gazeta Matematică se înclină pios în faţa rămăşiţelor pământeşti ale fostului ei corespondent, colaborator, membru şi examinator, păstrând o vie amintire operei şi geometrului, care şi-a dedicat întreaga lui activitate tinerii ştiinţe româneşti.

ALEXANDRU V. NICOLESCU.

ASUPRA UNOR TEOREME A LUI DARBOUX[1]

1. In „*Nouvelles Annales de Mathématiques*", sub Nr. 1035, DARBOUX a propus următoarea problemă:

Il y a la même relation entre les tangentes menées d'un point de l'ellipsoide à trois sphères doublement tangentes à l'ellipsoide, qu'entre les distances d'un point variable dans un plan à trois points de ce plan.

O soluție a acestei importante teoreme a fost dată de d-l R. BOUVAIST (N. A. 1918, p. 359).

Voi da, în cele ce urmează, o altă soluție, împreună cu câteva observații: deși asemănătoare, în unele părți, cu soluția d-lui R. BOUVAIST, am păstrat totuși unitatea soluției pentrucă n'am cunoscut soluția d-sale decât în ultimul moment.

Să considerăm elipsoidul:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

și punctul $P(x, y, z)$ variabil pe această suprafață. Se știe că sferele bitangente la un elipsoid se împart în trei serii, fiecare serie corespunzând unui plan de simetrie al suprafeței. Ecuația generală a acestor sfere se găsește prin metoda clasică, anume se scrie că fascicolul liniar de cuadrice:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-k[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2]=0$$

se reduce la două plane. Se determină astfel k, α, β, γ. De exemplu, sferele bitangente, având centrele lor în planul xoy, au următoarea ecuație generală:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2+c^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2-c^2}+\frac{\beta^2}{b^2-c^2}-1\right)=0.$$

---

1) **Comunicare făcută la Societatea Română de Matematici, la 23 Mai 1948.**

Puterea X a punctului P, în raport cu această sferă va avea ca expresie:

$$X = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 + c^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2-c^2} + \frac{\beta^2}{b^2-c^2} - 1\right)$$

$$= (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{c^2y^2}{b^2} + \frac{c^2\alpha^2}{a^2-c^2} + \frac{c^2\beta^2}{b^2-c^2},$$

$$\therefore\quad X = \left(x\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a} - \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2-c^2}}\right)^2 + \left(y\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b} - \frac{b\beta}{\sqrt{b^2-c^2}}\right)^2.$$

Deci dacă se consideră două alte sfere bitangente, cari corespund valorilor (α_1, β_1), (α_2, β_2) ale parametrilor α, β, atunci puterile Y, Z ale punctului P în raport cu aceste noui sfere vor avea niște expresii care se duc din expresia lui X, înlocuind pe α, β prin α_1, β_1 și α_2, β_2 respectiv.

Se vede astfel că $\sqrt{X}$, $\sqrt{Y}$, $\sqrt{Z}$ sunt egale cu distanțele punctului variabil P′ al planului *xoy*, ale cărui coordonate sunt:

$$x\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\quad,\quad y\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b}$$

la punctele fixe, ale aceluiași plan, având drept coordonate respectiv:

$$\left(\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2-c^2}}, \frac{b\beta}{\sqrt{b^2-c^2}}\right);\ \left(\frac{a\alpha_1}{\sqrt{a^2-c^2}}, \frac{b\beta_1}{\sqrt{b^2-c^2}}\right);\ \left(\frac{a\alpha_2}{\sqrt{a^2-c^2}}, \frac{b\beta_2}{\sqrt{b^2-c^2}}\right).$$

Prin urmare, între X, Y, Z și laturile triunghiului fix există relația bine cunoscută:

$$a^2(a'^2-b'^2)(a'^2-c'^2) + b^2(b'^2-c'^2)(b'^2-a'^2) +$$
$$c^2(c'^2-a'^2)(c'^2-b'^2) + a^2a'^2(a^2-b^2-c^2) + b^2b'^2(b^2-c^2-a^2)$$
$$+ c^2c'^2(c^2-a^2-b^2) + a^2b^2c^2 = 0$$

unde am notat cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului fix, iar prin a', b', c' rădăcinile patrate din X, Y, Z.

2. Teorema rămâne valabilă pentru iperboloizi; vom dovedi că ea rămâne valabilă și pentru paraboloizi. Să considerăm paraboloidul:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0.$$

In acest caz avem numai două serii de sfere bitangente, care corespund celor două plane de simetrie ale suprafeței.

Ecuaţia generală a sferelor bitangente care au centrele în planul *xoy*, de exemplu, este următoarea:

$$x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-p\left(\frac{\beta^2}{p-q}+2\gamma-p\right)=0.$$

Insemnând ca şi în cazul elipsoidului prin X, Y, Z puterile unui punct P (x, y, z) al parabolidului, în raport cu trei sfere bitangente, avem:

$$X=x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-p\left(\frac{\beta^2}{p-q}+2\gamma-p\right)$$

$$=\left(y\sqrt{\frac{q-p}{q}}-\beta\sqrt{\frac{q}{q-p}}\right)^2+(z-\gamma+p)^2,$$

şi alte două relaţii care se deduc din aceasta prin înlocuirea câtimilor β, γ prin β_1, γ_1 şi β_2, γ_2 respectiv. Aceste relaţii demonstrează teorema.

Se vede la fel că teorema este valabilă şi pentru conuri şi cilindri, deci ea este valabilă pentru toate cuadricele.

In cazul când cele trei sfere dublu tangente au razele nule, atunci $\sqrt{X}$, $\sqrt{Y}$, $\sqrt{Z}$ devin distanţele unui punct variabil al elipsoidului la trei focare aşezate pe aceeaşi focală a elipsoidului, deci teorema lui DARBOUX se va enunţa astfel:

Intre distanţele unui punct variabil al unei cuadrice, la trei focare fixe aşezate pe aceeaşi focală a cuadricei, există aceeaşi relaţie ca şi între distanţele unui punct variabil al unui plan la trei puncte fixe ale aceluiaşi plan.

Teorema lui DARBOUX se poate deasemenea enunţa şi pentru conice astfel:

Intre tangentele duse dintr'un punct variabil al unei conice la două cercuri bitangente fixe ale conicei, există aceeaşi relaţie ca şi între distanţele unui punct variabil al unei drepte, la două puncte fixe ale dreptei adică suma sau diferenţa acelor tangente este constantă.

De exemplu, pentru elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

un cerc bitangent, cu centrul pe *ox*, va avea ca ecuaţie:

$$a^2(x^2+y^2)-2\alpha c^2x+\alpha^2c^2-a^2b^2=0,$$

iar puterea X a punctului (x, y) al elipsei, în raport cu acest cerc este:

$$X = \frac{c^2}{a^2}(x - \alpha)^2.$$

Puterea Y a aceluiaşi punct, faţă de un alt cerc bitangent, care corespunde valorii α_1 a lui α va fi:

$$Y = \frac{c^2}{a^2}(x - \alpha_1)^2.$$

Intre X, Y avem deci relaţia:

$$\sqrt{X} \pm \sqrt{Y} = \frac{c^2}{a^2}(\alpha - \alpha_1) = \text{constantă}.$$

In particular, dacă cele două cercuri au razele nule, centrele lor sunt focare ale elipsei şi avem definiţia obişnuită a conicelor.

Reciproca teoremei lui DARBOUX este în deosebi remarcabilă şi poate fi enunţată astfel:

Locul punctului P, *în spaţiul* S_3, *astfel ca rădăcinile patrate ale puterilor sale în raport cu trei sfere fixe să fie legate prin aceeaşi relaţie ca şi distanţele unui punct variabil dintr'un plan la trei puncte fixe ale planului, este o cuadrică dublă tangentă fiecăreia din sferele date.*

Pentru demonstraţie, se vor înlocui în relaţia citată mai sus, a'^2, b'^2, c'^2 prin S_1, S_2, S_3 unde $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ sunt ecuaţiile normale ale celer trei sfere fixe.

Avem astfel ecuaţia locului geometric sub forma următoare:

$$a^2(S_1 - S_2)(S_1 - S_3) + b^2(S_2 - S_1)(S_2 - S_3) + c^2(S_3 - S_1)(S_3 - S_2)$$
$$+ a^2 S_1(a^2 - b^2 - c^2) + b^2 S_2(b^2 - a^2 - c^2)$$
$$+ c^2 S_3(c^2 - a^2 - b^2) + a^2b^2c^2 = 0.$$

ecuaţie care reprezintă o cuadrică. Dacă tăiem această cuadrică prin sfera $S_1 = 0$, avem această suprafaţă ajutătoare:

$$a^2 S_2 S_3 + b^2 S_2(S_2 - S_3) + c^2 S_3(S_3 - S_2) + b^2 S_2(b^2 - c^2 - a^2)$$
$$+ c^2 S_3(c^2 - a^2 - b^2) + a^2b^2c^2 = 0,$$

care, în aparență, este o ciclidă de ordinul 4; în realitate, ea se descompune — după cum se vede printr'un calcul simplu — în două sfere. Deci, sfera $S_1 = 0$, tăind cuadrica loc geometric după două curbe plane (cercuri), este bitangentă acesteia.

Când sferele fixe se reduc la centrele lor, avem:

Locul unui punct P, *din spațiul* S_3, *astfel ca distanțele sale la trei puncte fixe să fie legate prin aceeași relație ca și distanțele unui punct variabil dintr'un plan, la trei puncte fixe ale planului, este o cuadrică având cele trei puncte ca focare.*

Pentru geometria plană, avem deasemenea teorema:

Locul punctului dintr'un plan, astfel ca suma sau diferența rădăcinilor patrate ale puterilor sale în raport cu două cercuri date să fie constantă, este o conică bitangentă cercurilor date.

Dacă cercurile se reduc la centrele lor, avem definiția clasică a conicelor.

Observare. Teorema lui DARBOUX poate fi extinsă la spațiile euclidiene cu un număr oarecare n de dimensiuni, în felul următor:

Locul unui punct P, *din spațiul* S_n, *astfel ca rădăcinile patrate ale puterilor sale, în raport cu* n *ipersfere date, să fie legate prin aceeași relație ca și distanțele unui punct variabil dintr'un spațiu euclidian* S_{n-1}, *la* n *puncte fixe ale acestui spațiu, este o ipercuadrică.*

Pentru demonstrație, se va considera relația:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & (12)^2 & \dots & (1, n+1)^2 \\ 1 & (21)^2 & 0 & \dots & (2, n+2)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (n+1, 1)^2 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

care leagă distanțele mutuale dintre $n+1$ puncte ale spațiului S_{n-1}, și se vor înlocui aici expresiile:

$$(n+1, 1)^2 \ , \ (n+1, 2)^2, \dots (n+1, n)^2,$$

prin S_1, S_2, S_3, $\dots S_n$, unde $S_1 = 0$, $S_2 = 0, \dots S_n = 0$ sunt ecuațiile normale ale celor n ipersfere date.

CEZAR COȘNIȚĂ.

ASUPRA UNOR CONDIȚII NECESARE TRANSFORMĂRII IN SATELIȚI AI PĂMÂNTULUI A CORPURILOR LANSATE DE PE PĂMÂNT

1. Problema transformării în sateliți permanenți ai pământului a unor corpuri lansate de pe suprafața lui a făcut obiectul unor cercetări recente. Vom semnala aici notele d-lor E. ESCLANGON[1], J. CHAZY[2] și C. POPOVICI[3]. După cum rezultă din cercetările d-lui E. ESCLANGON, acest lucru n'ar fi posibil decât dacă mobilul ar avea mijloace de propulsiune proprii, pentru o parte din parcursul său, în așa fel ca el să depășească zona atmosferei sensibile, sau s'ar mai putea realiza cu ajutorul unui proiectil-canon, care odată ieșit din zona atmosferei sensibile, ar lansa un proiectil secundar, animat de o viteză suficient de mare și având o direcție verificând anumite condiții. Ne propunem în cele ce urmează, să completăm rezultatele d-lui ESCLANGON, dându-le și o interpretare geometrică simplă.

2. Fie P un punct material de masă m, atras de pământ după legea Newtoniană. El este lansat dela înălțimea h de deasupra solului cu o viteză $\vec{v_0}$ care face unghiul α $(0 < \alpha < 2\pi)$ cu raza vectoare inițială $\vec{OP_0}$, O fiind centrul pământului. Vom presupune pământul perfect sferic, de rază R. Să cercetăm cum trebue să fie condițiile inițiale pentru ca mobilul să cadă pe pământ sau să nu mai cadă. In acest din urmă caz, el se poate îndepărta la infinit (traiectorie parabolică sau hiperbolică) sau să rămână satelit permanent al pământului (traiectorie eliptică ce nu intersectează pământul). Vom face abstracție de atmosfera înconjurătoare a pământului.

Pentru deplina înțelegere a expunerii vom reaminti câteva rezultate clasice. Forța de atracție este de mărime $fm\,Mr^{-2}$, unde $r = OP$, f fiind constanta atracției newtoniene iar M masa pămân-

1) E. ESCLANGON, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, t. 225, 1947, p. 161 și p. 513.

2) J. CHAZY, ibid. p. 469.

3) C. POPOVICI, ibid. t. 227, 1948 p. 330.

tului. Să punem $OP_0 = r_0 = R + h$. Traiectoria este plană; în planul traiectoriei legea ariilor ne dă

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C = r_0 v_0 \sin \alpha \qquad (1)$$

unde θ este unghiul polar $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP})$ iar C constanta ariilor. Din formula lui BINET se deduce ecuația diferențială a traiectoriei. Integrând și ținând seamă de condițiile inițiale $r = r_0, \frac{dr}{d\theta} = \frac{r_0}{\operatorname{tg} \alpha}$ pentru $\theta = 0$, se obține ecuația traiectoriei în coordonate polare sub forma

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{fM}{C^2}\right) \cos \theta - \frac{1}{r_0 \operatorname{tg} \alpha} \sin \theta + \frac{fM}{c^2}. \qquad (2)$$

Vom pune

$$\frac{1}{r_0} - \frac{fM}{C^2} = \lambda \cos \psi \quad , \quad -\frac{1}{r_0 \operatorname{tg} \alpha} = \lambda \sin \psi. \qquad (3)$$

Ecuațiile (3) determină pe $\lambda > 0$ și pe ψ; avem un singur unghiu ψ socotit între 0 și 2π. Valoarea lui λ este dată de

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{fM}{C^2}\right)^2 + \frac{1}{r_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \qquad (4)$$

Ecuația traectoriei primește astfel forma

$$\frac{1}{r} = \lambda \cos (\theta - \psi) + \frac{fM}{C^2} = \frac{1 + e \cos (\theta - \psi)}{p} \qquad (2')$$

identificându-se cu aceea a conicelor de focar O și axă focală (orientată pozitiv dela O spre directoarea sa) făcând unghiul ψ cu $\overrightarrow{OP_0}$; $p > 0$ este parametrul conicei iar $e\ (0 \leqslant e)$ excentricitatea ei. Din (2') se obține

$$p = \frac{C^2}{fM} \quad , \quad e = p\lambda = \sqrt{1 + \frac{C^2}{f^2 M^2}\left(v_0^2 - \frac{2fM}{r_0}\right)}, \qquad (5)$$

ținându-se seamă și de (4). Avem astfel exprimate elementele conicei în funcție de datele inițiale și se vede că ea este elipsă $(0 \leqslant e < 1)$, parabolă $(e = 1)$ sau hiperbolă $(e > 1)$ după cum v_0^2 este mai mic, egal sau mai mare ca $2fM\, r_0^{-1}$.

3. *Condiția ca traiectoria să intersecteze pământul.* Punctele de intersecție ale traiectoriei cu pământul se obțin făcând $r = R$ în ecuația (2'), de unde

$$\cos(\theta - \psi) = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{R} - 1\right). \tag{6}$$

Pentru ca θ să fie real trebue să avem

$$-e \leqslant \frac{p}{R} - 1 \leqslant e. \tag{7}$$

Inegalitățile găsite se interpretează ușor. Dacă $0 < e < 1$ (traiectoria eliptică), prima exprimă că apogeul este mai mare sau egal cu R și este deci întotdeauna verificată căci $r_0 \geqslant R$; a doua exprimă că perigeul trebue să fie mai mic sau egal cu R. In cazul hiperbolei și al parabolei, apogeul este infinit; de altfel se vede imediat că prima condiție este satisfăcută căci $e \geqslant 1$. Deci, în orice caz, singura condiție de intersecție este

$$\frac{p}{R} - 1 \leqslant e \tag{8}$$

egalitatea fiind realizată pentru traiectoriile tangente pământului.

Dacă $\frac{p}{R} - 1 \leqslant 0$, adică, în virtutea lui (5), $r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha \leqslant fMR$, condiția (8) este realizată. Dacă $\frac{p}{R} - 1 > 0$, ținând seamă de expresiile (5) și ridicând la pătrat ambii termeni ai inegalității (8), se deduce inegalitatea echivalentă

$$v_0^2\left(\frac{r_0^2 \sin^2\alpha}{R^2} - 1\right) \leqslant 2fM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{9}$$

Se poate arăta că în fiecare din aceste două cazuri, inegalitatea (9) este realizată.

Să punem $X = v_0 \cos\alpha$, $Y = v_0 \sin\alpha$ și să considerăm în planul OXY punctul de coordonate (X, Y). Condiția $r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha \leqslant fMR$ revine la a impune punctului (X, Y) să fie în interiorul bandei

$$-\frac{\sqrt{fMR}}{r_0} \leqslant Y \leqslant \frac{\sqrt{fMR}}{r_0}. \tag{10}$$

Dacă acest punct este în exteriorul bandei el trebue însă să fie astfel încât

$$\frac{r_0^2}{R^2} Y^2 - (X^2 + Y^2) \leqslant 2fM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{9'}$$

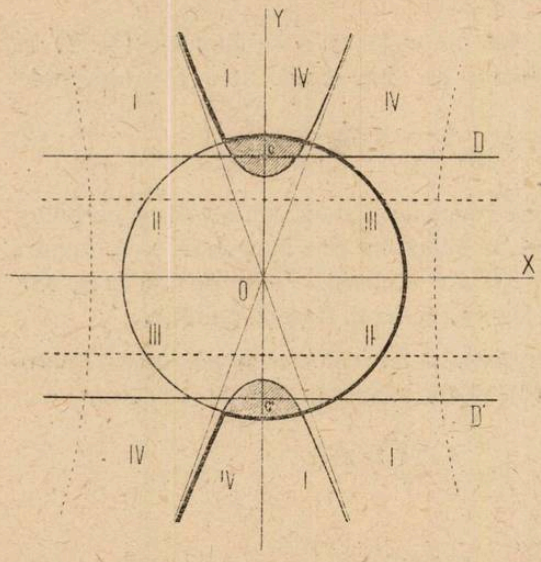
Ecuaţia

$$\frac{r_0^2}{R^2} Y^2 - (X^2 + Y^2) = 2fM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right) \qquad (11)$$

reprezintă o hiperbolă având ca axă transversă pe OY. Semi-axele ei sunt

$$\sqrt{\frac{2fMR}{r_0(r_0+R)}} \quad \text{şi} \quad \sqrt{\frac{2fM(r_0-R)}{Rr_0}}.$$

Ramurile hiperbolei sunt exterioare bandei (10). Punctele pentru care (9') are loc se află în regiunea limitată de ramurile hiperbolei (11) şi care conţine origina axelor în interior; banda (10) se află în interiorul acestei regiuni, deci (9) sau (9') reprezintă singura condiţie de intersecţie.



Condiţia (9) este întotdeauna satisfăcută dacă $r_0^2 \sin^2\alpha - R^2 < 0$, adică dacă

$$\operatorname{tg}^2\alpha < \frac{R^2}{r_0^2 - R^2}.$$

Ori, fie α_0 unghiul primei asimptote a hiperbolei (11) cu (OX). Condiţia precedentă revine la $\operatorname{tg}^2\alpha < \operatorname{tg}^2\alpha_0$, deci la situarea punctului (X,Y) în unghiul asimptotelor care nu conţine ramurile curbei; atunci traectoria intersectează pământul oricare ar fi viteza iniţială. Să mai observăm aici că dacă din punctul P_0 se duc, în planul traectoriei, tangentele la cercul cu centrul în O şi de rază R, se obţin dreptele făcând unghiul α_0 cu $\overrightarrow{OP_0}$.

4. Dacă $e > 1$, traectoria mobilului este o ramură de hiperbolă. In acest caz, dacă în ecuaţia (2') facem pe $\theta - \psi$ să varieze dela O la 2π se obţine pentru valorile pozitive ale lui r ramura efectiv descrisă de punctul mobil, iar pentru valorile negative ramura a doua. Din punct de vedere teoretic este interesant de

văzut în ce caz această a doua ramură intersectează pământul. Făcând în (2') $r = -R$ se obține valoarea corespunzătoare a lui θ care este reală dacă

$$\frac{p}{R} + 1 \leqslant e, \tag{12}$$

ceeace exprimă că distanța dela vârful al doilea al hiperbolei la focarul O este mai mică decât R. Condiția (12) se mai scrie

$$v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2 \sin^2\alpha}{R^2}\right) \geqslant 2fM\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0}\right). \tag{12'}$$

Procedând ca mai sus, se vede că dacă punctul (X, Y) se găsește în regiunile limitate de cele două arce ale hiperbolei

$$X^2 + Y^2 - \frac{r_0^2}{R^2} Y^2 = 2fM\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0}\right) \tag{13}$$

care au în interior focarele respective, atunci traiectoria hiperbolică a mobilului este astfel încât pământul este intersectat și de ramura a doua a ei. Hiperbola (13) are aceleași asimptote ca (11), OX fiind axa transversă. In figură, ea este trasată punctat.

5. *Condiția ca traiectoria să nu intersecteze pământul.* Pentru ca θ, scos din ecuația (6) să fie imaginar, trebue să avem

$$\left(\frac{p}{R} - 1\right)^2 > e^2$$

sau

$$v_0^2\left(\frac{r_0^2 \sin^2\alpha}{R^2} - 1\right) > 2fM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{14}$$

Deci, punctul (X, Y) se va găsi în regiunile limitate de ramurile hiperbolei (11) conținând focarele ei. Se vede că în mod necesar $r_0^2 \sin^2\alpha > R^2$ dar această condiție nu este suficientă, vitesa trebuind să depășească anumite limite. Vitesa minimă de lansare este

$$v_0 = \sqrt{\frac{2fMR}{r_0\,(R + r_0)}};$$

ea corespunde lui $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sau $\frac{3\pi}{2}$, traiectoria fiind tangentă pământului.

6. *Separarea cazurilor de elipsă, parabolă sau hiperbolă.* Traiectoria este elipsă, hiperbolă sau parabolă după cum punctul (X, Y) este interior, exterior sau situat pe cercul

$$X^2 + Y^2 = \frac{2fM}{r_0}. \tag{15}$$

Acest cerc taie hiperbola (11) în patru puncte reale. *Pentru a avea un satelit permanent al pământului, deci o traiectorie eliptică care să nu-l intersecteze, va trebui ca* (X, Y) *să fie situat în regiunile haşurate, limitate la arcele de cerc şi hiperbolă.* Avem astfel o interpretare simplă a condiţiilor indicate de d-l. E. ESCLANGON.

Este evident că cercul (15) nu poate tăia în puncte reale hiperbola (13).

7. *Poziţia axei focale.* Această axă, dirijată pozitiv spre directoarea focarului O, este definită de unghiul ψ pe care-l face cu $\overrightarrow{OP_0}$. Relaţiile (3) ne definesc un singur unghiu ψ $(0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi)$.

a) Dacă $\operatorname{tg}\alpha > 0$, avem

$$\pi < \psi < \frac{3\pi}{2} \quad \text{dacă} \quad Y^2 < \frac{fM}{r_0}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \psi < 2\pi \quad \text{dacă} \quad Y^2 > \frac{fM}{r_0}.$$

b) Dacă $\operatorname{tg}\alpha < 0$, avem

$$\frac{\pi}{2} < \psi < \pi \quad \text{dacă} \quad Y^2 < \frac{fM}{r_0}$$

$$0 < \psi < \frac{\pi}{2} \quad \text{dacă} \quad Y^2 > \frac{fM}{r_0}.$$

Banda

$$-\sqrt{\frac{fM}{r_0}} < Y < \sqrt{\frac{fM}{r_0}} \tag{16}$$

conţine în interiorul ei pe cea intervenită în discuţie anterior (10). In particular, pentru $Y = 0$ avem $\psi = \pi$. Pe axa OY avem $\psi = 0$ sau $\psi = 2\pi$ în afară de banda (16), $\psi = \pi$ pentru porţiunea cuprinsă în interiorul ei. Punctele $C\left(O, \sqrt{\frac{fM}{r_0}}\right)$, $C'\left(O, -\sqrt{\frac{fM}{r_0}}\right)$ sunt în

interiorul regiunilor corespunzătoare sateliților permanenți. Ele dau loc la condițiile inițiale pentru care traiectoriile sunt *circulare* $\left(\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ sau } \alpha = \frac{3\pi}{2}, v_0 = \sqrt{\frac{fM}{r_0}}\right)$. Pentru punctele axei OY cuprinse între C și C', focarul al doilea al elipsei traiectorii este cuprins între O și P_0. Dacă

$$\sqrt{\frac{fM}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2fM}{r_0}}, \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ sau } \frac{3\pi}{2}\right)$$

focarul al doilea este exterior segmentului OP_0.

Vom mai remarca aici că focarele hiperbolei (11) sunt exterioare segmentului CC'. Odată valorile lui ψ precizate în tot planul (X, Y), se va deduce cu ușurință poziția directoarei focarului O. Pe figură, cifrele romane indică cadranul în care este situat unghiul ψ; D și D' reprezintă dreptele care limitează banda (16).

8. *Discuția soluțiilor ecuației* (6). Până în prezent ne-am ocupat numai de faptul dacă traiectoria mobilului intersectează pământul. Dacă traiectoria este eliptică, este evident că mobilul va cădea în acest caz pe pământ. Pentru traiectoriile parabolice sau hiperbolice care intersectează pământul, aceasta însă nu înseamnă că întotdeauna mobilul va cădea pe pământ căci se poate ca el să descrie o porțiune din ramura de curbă care tinde spre infinit, intersecțiile având loc doar pentru prelungirea acestei ramuri.

Dacă punctul (X, Y) se găsește în regiunea pentru care inegalitatea (9') este satisfăcută, ecuația (6) admite soluțiile

$$\theta = \psi \pm x_0 + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

unde

$$x_0 = \text{Arc cos} \frac{1}{e}\left(\frac{p}{R} - 1\right). \tag{17}$$

I. Să presupunem $C > 0$ (adică $Y > 0$). Atunci (1) ne arată că θ crește cu timpul și singura soluție acceptabilă este prima valoare pozitivă a lui θ pe care o întâlnim printre cele de mai sus.

a) În jumătatea superioară a bandei (10), x_0 este în cadranul al doilea iar ψ în cadranul al doilea sau al treilea. Dacă $0 < X$,

ψ este în cadranul al treilea. Valorile $\psi + x_0$, $\psi - x_0$ sunt ambele pozitive. Avem evident $0 < \psi - x_0 < \pi$ şi $\frac{3\pi}{2} < \psi + x_0$. Să arătăm că $\psi + x_0 < 2\pi$. Conform lui (3) şi (17) avem

$$\cos x_0 - \cos\psi = 2 \sin\frac{\psi - x_0}{2} \sin\frac{\psi + x_0}{2} = \frac{p}{e}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right) > 0 \quad (18)$$

de unde rezultă proprietatea indicată. Deci, printre valorile $\psi + x_0 - 2\pi$, $\psi - x_0$, $\psi + x_0$, prima pozitivă este $\psi - x_0$. Dacă $X < 0$, ψ şi x_0 sunt ambele în cadranul al doilea. Avem evident $\pi < \psi + x_0 < 2\pi$ iar din (18) rezultă că $\psi - x_0 > 0$. Prima determinaţie pozitivă pentru θ este deci tot $\psi - x_0$.

b) Dacă $y > \frac{\sqrt{fMR}}{r_0}$, x_0 se găseşte în cadranul întâiu. Prin urmare $\psi - x_0 > 0$ pentru porţiunile în care ψ se găseşte în cadranele doi, trei şi patru şi la fel pentru porţiunea în care ψ se găseşte în cadranul întâiu, din cauza lui (18). Dacă ψ se găseşte în cadranele I, II, III avem $\psi + x_0 < 2\pi$. Dacă ψ se află în cadranul IV, avem $0 < \psi - x_0 < 2\pi$, $\frac{3\pi}{2} < \psi + x_0$, deci (18) ne arată că $\psi + x_0 < 2\pi$.

Avem deci în ambele cazuri

$$\theta = \psi - x_0 \quad (19)$$

pentru prima intersecţie a traiectoriei cu pământul.

II. Dacă $C < 0$ (adică $y < 0$), θ descreşte cu timpul. Avem la fel x_0 în cadranul al doilea pentru jumătatea inferioară a bandei (10) şi x_0 în cadrul întâiu dedesuptul ei. Trebuind să alegem pentru θ cea mai mare valoare negativă, vom lua

$$\theta = \psi + x_0 - 2\pi. \quad (20)$$

Dacă traiectoria este o elipsă, (19) *sau* (20) *ne determină efectiv punctul de cădere pe sol.* Dar dacă traiectoria este hiperbolă sau parabolă o discuţie suplimentară se impune.

Direcţiile asimptotice ale conicei (2′) sunt definite de

$$\cos(\theta^* - \psi) = -\frac{1}{e} \qquad (e \geqslant 1)$$

de unde

$$\theta^* = \psi \pm \varphi_0 + 2k\pi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

punând

$$\varphi_0 = \text{Arc cos}\left(-\frac{1}{e}\right) \tag{21}$$

Avem $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 \leqslant \pi$ şi $x_0 < \varphi_0$; în plus

$$\cos\psi - \cos\varphi_0 = \frac{p}{r_0 e} > 0. \tag{22}$$

Să presupunem iarăşi $C > 0$ $(y > 0)$.

a) Dacă $X > 0$, avem $\psi - \varphi_0 > 0, \psi$ fiind în cadranul doi sau trei. Cum $\psi - \varphi_0 < 2\pi - \varphi_0$, din (22) rezultă $\psi + \varphi_0 > 2\pi$. Avem $0 < \psi + \varphi_0 - 2\pi < \psi - \varphi_0$, deci cea mai mică valoare pozitivă pentru θ^* va fi

$$\theta^* = \psi + \varphi_0 - 2\pi. \tag{23}$$

b) Dacă $X < 0$, ψ este în cadranul I sau II; din (22) se vede că $\psi < \varphi_0$. Avem
$\psi + \varphi_0 - 2\pi < 0$, $\psi - \varphi_0 < 0$, $\psi + \varphi_0 > 0$, $\psi - \varphi_0 + 2\pi > 0$, ultima valoare fiind cea mai mare. Valoarea care va conveni pentru θ^* pe ramura de curbă descrisă de mobil este deci

$$\theta^* = \psi + \varphi_0. \tag{24}$$

Prin urmare, dacă (X, Y) se găseşte în regiunea definită de (9'), pentru care $Y > 0$ şi dacă $X > 0$ din (19) şi (23) se deduce $\theta - \theta^* = 2\pi - \varphi_0 - x_0 > 0$, deci *mobilul se va îndepărta la infinit.* Dacă $X < 0$, din (19) şi (24) rezultă $\theta - \theta^* = -x_0 - \varphi_0 < 0$, deci *mobilul va cădea efectiv pe pământ.*

Să presupunem acum $C < 0$. Va trebui atunci să alegem pentru θ^* cea mai mare valoare negativă. O discuţie analoagă ne arată că $\theta^* = \psi - \varphi_0$ dacă $X > 0$ şi $\theta^* = \psi - \varphi_0 - 2\pi$ dacă $X < 0$. Ţinând seamă de (20) se vede atunci că $\theta - \theta^* = x_0 + \varphi_0 - 2\pi < 0$ dacă $X > 0$, deci *mobilul se îndepărtează la infinit*; din contră, dacă $X < 0$, $\theta - \theta^* = x_0 + \varphi_0 > 0$ deci *mobilul va cădea pe pământ.*

9. In cele ce preced am făcut abstracţie de atmosfera pământului. Dacă am vrea să ţinem seamă de această atmosferă va trebui ca în formule să înlocuim, conform rezultatelor d-lui E. ESCLANGON, pe R prin ρ, raza sferei care limitează zona

atmosferei sensibile. Diferența $\rho - R$ este de ordinul a câteva sute de kilometri. Cercul (15) rămâne neschimbat dar hiperbola (11) va fi înlocuită prin alta, ale cărei ramuri sunt în interiorul regiunilor limitate de ramura lui (11). Ținând seamă de acțiunea deviatoare a atmosferei, rezultă că zona situată în interiorul cercului (15) și care este limitată de arcele celor două hiperbole va corespunde unor condiții inițiale care nu pot da loc la sateliți ai pământului, mobilul sfârșind prin a cădea pe pământ. Pentru zona dintre cele două hiperbole, exterioară cercului și pentru care $X < 0$, avem îndoială, mobilul putând să cadă pe pământ sau să evadeze.

Pentru restul planului concluziile dela Nr. 8 rămân variabile.

CAIUS IACOB.

CONCURSUL GAZETEI MATEMATICE DIN 1949

I. **Condițiuni generale.** Inscrierea la concurs se va face *numai* prin cerere *individuală*, scrisă *personal* de candidat.

In cerere candidatul va arăta următoarele:

a) Numele de familie, inițiala numelui părintelui și numele de botez. De exemplu: ALEXANDRESCU V. NICOLAE.

b) Școala și clasa în care urmează.

c) Adresa personală: în timpul școalei și în timpul vacanței de Paște.

d) Dacă dispune sau nu de mijloace de a veni la București și dacă are unde fi găzduit și întreținut în timpul concursului.

Cei care au nevoie de bani pentru transport vor indica gara de plecare spre București și de înapoiere dela București.

e) Activitatea la *Gazeta Matematică* și la *Suplimentul Gazetei Matematice* indicând numele de ordine ale problemelor și exercițiilor rezolvate sau menționate.

Data și locul ținerei concursului se vor anunța în numărul 7 din Martie 1949.

II. **Problele de examen.** Candidații la concurs vor da câte o probă scrisă și câte o probă orală la *două* din materiile prevăzute în următoarea programă analitică.

III. **Programa analitică** a materiei pentru concurs.

Clasa a VIII-a. Algebra. 1. *Numere relative.* Operaţiuni cu numere relative: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere.

2. *Expresii algebrice.* Valoarea numerică a unei expresii algebrice. Monoame şi polinoame. Termeni asemenea. Reducerea termenilor asemenea. Sisteme de numeraţie. Operaţiuni cu monoamele şi polinoamele: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea. Împărţirea cu $x \pm a$.

3. *Factor comun. Descompunerea în factori. Identităţi.*

4. *Fracţii algebrice.* Operaţiuni cu fracţiile algebrice: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea.

Formele $\frac{0}{a}$, $\frac{a}{0}$ şi $\frac{0}{0}$. Proporţii.

5. *Ecuaţii de gradul I.* Ecuaţii cu o necunoscută. Sisteme de 2 şi 3 ecuaţii cu 2 şi 3 necunoscute. Probleme de gradul I.

6. *Rădăcina patrată a numerelor relative.* Numere imaginare şi numere complexe.

7. *Ecuaţii de gradul II.* Ecuaţii cu coeficienţi numerici şi ecuaţii cu coeficienţi literali. Probleme de gradul II cu o necunoscută

8. *Puteri.* Exponenţi pozitivi. Exponentul zero. Exponenţi negativi.

9. *Radicali.* Exponenţi fracţionari.

10. *Ecuaţii iraţionale.*

11. *Proprietăţile rădăcinilor ecuaţiei de gradul II.* Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, descompunerea trinomului în factori.

12. *Semnul trinomului de gradul II.*

13. *Ecuaţii care se reduc la gradul II;* bipatrate, reciproce de gradul III, IV, V, etc. Transformarea expresiilor de forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

14. *Reprezentări grafice:* funcţia de gradul I (dreapta) şi de gradul II (parabola). Semnul trinomului dedus din reprezentarea grafică.

15. *Sisteme de ecuaţii de gradul II. Probleme de gradul II.*

16. *Neegalităţi de gradul I şi de gradul II.*

Geometria. 1. *Triunghiuri,* triunghiul isoscel.

2. *Perpendiculare şi oblice.*

3. *Drepte paralele.* Paralele tăiate de o secantă. Unghiuri cu laturile paralele. Unghiuri cu laturile perpendiculare. Unghiurile unui poligon convex.

4. *Patrulatere:* paralelogramul, rombul, dreptunghiul, patratul, trapezul.

5. *Drepte concurente în triunghiu:* mediatoare, înălţimi, bisectoare, mediane.

6. *Locuri geometrice.*

7. *Transformarea figurilor:* simetria, translaţia.

8. *Cercul.* intersecţia unui cerc cu o dreaptă, tangenta la cerc; diametre şi coarde; poziţiile relative a două cercuri.

9. *Măsura unghiurilor:* unghiuri înscrise în cerc, unghiuri cu vârful interior sau exterior cercului; arc capabil de un unghiu dat; patrulater inscriptibil. Rotaţia.

10. *Construcţii grafice, construcţii de cercuri, racordarea liniilor.*

11. *Metode în geometrie:* metoda substituţiilor succesive; metoda intersecţiei locurilor geometrice.

Clasa a IX-a. Algebra. 1. *Radicali.* Aducerea la acelaşi indice. Operaţiunile cu radicali: înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere, extragerea rădăcinii.

2. *Progresii* aritmetice şi geometrice. Progresii infinite.

3. *Generalizarea noţiunii de exponent:* exponenţi întregi, exponenţi fracţionari, exponenţi iraţionali.

4. *Funcţia exponenţială.*

5. *Logaritmi.* Proprietăţi generale. Logaritmi zecimali.

6. *Funcţia logaritmică.*

7. *Ecuaţii exponenţiale şi logaritmice.*

8. *Discuţia şi interpretarea* rădăcinilor unei ecuaţii de gradul I, a unui sistem de ecuaţii de gradul I şi a ecuaţiei de gradul II. Discuţia problemelor de gradul I şi II.

9. *Numere imaginare şi complexe.* Condiţia ca un număr complex să fie nul. Condiţia ca două numere complexe să fie egale. Cantităţi complexe conjugate. Operaţiunile algebrice aplicate cantităţilor complexe: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere, extragerea rădăcinii patrate. Rădăcinile imaginare a unei ecuaţii bipatrate.

10. *Ecuaţii binoame şi trinoame.*

Geometria. 1. *Segmente proporţionale.*

2. *Asemănarea triunghiurilor; asemănarea poligoanelor.*

3. *Relaţii metrice:* relaţiile între elementele unui triunghiu dreptunghic; relaţiile între elementele unui triunghiu oarecare (teorema lui PITAGORA, generalizată); Relaţia lui STEWART; Segmentele proporţionale în cerc.

4. *Construcţii grafice asupra segmentelor proporţionale.*

5. *Poligoane regulate,* înscrierea lor în cerc.

6. *Lungimea cercului;* teoreme pregătitoare. Calculul lui π.

7. *Arii plane:* paralelogramul, rombul, dreptunghiul, patratul, triunghiul, trapezul, patrulaterul oarecare; aria unui poligon regulat; aria cercului, sectorului circular şi a segmentului de cerc.

8. *Compararea ariilor,* figuri echivalente; construcţia lor.

9. *Aplicaţii ale algebrei la geometrie.*

10. *Construcţii de expresii algebrice.*

11. *Puterea punctului faţă de un cerc;* axa radicală a două cercuri; centrul radical a trei cercuri; construcţia axei radicale.

12. *Transformarea figurilor:* prin asemănare; prin inversiune.

Clasa a X-a. Algebra. 1. Proprietăţile polinoamelor ordonate; polinom identic nul; polinoame identice.

2. Diviziunea polinoamelor întregi în x. Metoda coeficienţilor nedeterminaţi; metode directe.

3. Diviziunea polinoamelor de mai multe litere.

4. Diviziunea unui polinom în x prin $x - a$ sau $x + a$; câtul diviziunii.

5. Diviziunea unui polinom în x prin $ax \pm b$.

6. *Aplicații.* Descompunerea în factori a binoamelor de forma $x^m \pm a^m$, când $m = 2k$ sau $m = 2k + 1$.

Descompunerea unui polinom întreg în x în factori de gradul I.

7. Diviziunea unui polinom întreg în x prin binoame de forma $x^m \pm a$. Aplicație la diviziunea unui polinom P (x) prin $x^2 + 1$.

8. Simetrie și omogenitate la polinoame. Aplicațiuni la identități algebrice și la calculul expresiilor $(a + b + c)^2$, $(a + b + c)^3$, $(a + b + c)^4$, $(a + b)^m$, $(a + b + c + d)^2$, etc.

9. Cel mai mare comun divizor a două polinoame. Aplicații.

10. Numere complexe. Operații cu ele. Interpretarea geometrică. Forma trigonometrică a numerelor complexe. Formula lui MOIVRE. Aplicațiile formulei lui MOIVRE în trigonometrie.

11. Ecuație algebrică; rădăcini reale și complexe. Relațiile între coeficienți și rădăcini; aplicațiuni.

12. Proprietăți generale ale ecuațiilor cu coeficienți reali.

13. Căutarea rădăcinilor întregi și fracționare ale ecuațiilor algebrice.

14. Analiza combinatoare: aranjări, permutări, combinări simple sau cu repetiție.

15. Binomul lui NEWTON; triunghiul aritmetic al lui PASCAL. Aplicații și calcule de sume de puteri asemenea.

16. Puterea unui polinom; aplicații.

17. Teoria determinanților; definiții și proprietăți generale. Despre minori. Legea de formare a unui determinant.

18. Calculul valorii unui determinant. Diverse aplicațiuni la calculul determinanților. Determinant VANDERMONDE; calculul său.

19. Înmulțirea determinanților; regula CAUCHY-BINET. Aplicații.

20. *Noțiuni* asupra regulii lui LAPLACE: desvoltarea unui determinant după minorii de ordinul p.

21. Rezolvarea sistemelor de gradul I cu ajutorul determinanților: regula lui CRAMER.

22. Discuția sistemelor de gradul I: teorema lui ROUCHÉ.

23. Ecuații lineare și omogene.

24. Fracții continui. Legea de formare a reduselor. Proprietățile reduselor. Fracții continue periodice.

25. Transformarea rădăcinilor unei ecuații de gradul II în fracție continuă.

26. Analiză nedeterminată *(diofantică)* de gradul I; utilizarea fracțiilor continui.

27. Rezolvarea sistemului nedeterminat

$$ax + by + cz = d \quad ; \quad a'x + b'y + c'z = d'.$$

28. Rezolvarea ecuației diofantice

$$ax + by + cz = d.$$

29. Cazuri simple de analiză nedeterminată de gradul II.

Trigonometrie. 1. Obiectul trigonometriei. Scurt istoric.

2. Despre unghiuri şi arce.

3. Variaţia funcţiilor trigonometrice (0°—90°).

4. Relaţiile între funcţiile trigonometrice ale aceluiaşi unghiu.

5. Relaţiile între funcţiile trigonometrice ale unghiurilor complementare.

6. Legătura între laturile şi unghiurile unui triunghiu dreptunghic.

7. Funcţiile trigonometrice ale unghiurilor dela 90° la 360°.

8. Definiţia liniilor trigonometrice pe cercul întreg; semnul funcţiilor trigonometrice; construcţia unghiului când cunoaştem valoarea funcţiei trigonometrice.

9. Variaţia funcţiilor trigonometrice

10. Reducerea la primul cadran.

11. Unghiuri negative şi mai mari ca 360°; reducerea la cel mai mic argument pozitiv.

12. Diagrameie funcţiilor trigonometrice.

13. Funcţii trigonometrice inverse; diagramele lor.

14. Funcţiile trigonometrice ale sumei şi diferenţei a două unghiuri.

15. Funcţiile trigonometrice ale arcelor multiple.

16. Problema diviziunii unghiurilor.

17. Expresii calculabile prin logaritmi.

18. Table de logaritmi ale funcţiilor trigonometrice. Table de linii trigonometrice naturale.

19. Ecuaţii trigonometrice; discuţia lor.

20. Sisteme de ecuaţii trigonometrice.

21. Inegalităţi trigonometrice.

22. Rezolvarea triunghiului dreptunghiu.

23. Formule între elementele unui triunghiu oarecare.

24. Rezolvarea triunghiurilor oarecare; utilizarea tablelor.

25. Operaţiuni pe teren: elemente.

Geometria în spaţiu. 1. Dreapta şi planul.

2. Perpendiculara şi oblicele pe plan.

3. Unghiul dreptei cu planul.

4. Drepte şi plane paralele.

5. Unghiuri diedre şi plane perpendiculare.

6. Despre proiecţiuni; noţiuni sumare de geometrie descriptivă.

7. Triedre; proprietăţi.

8. Paralelipipede şi prisme; arii şi volume.

9. Piramida; arie şi volum.

10. Trunchiul de piramidă; secţiuni, arie, volum.

11. Cilindrul; arie şi volum.

12. Conul circular drept; desfăşurare, arie şi volum.

13. Trunchiul de con.

14. Prismatoid şi triunghiu de prismă; volume. Formula NEWTON-SIMPSON.

15. Sfera şi proprietăţile ei.

16. Volumul sferei şi părţilor ei.

17. Aria sferei şi părţilor ei.

18. Sfera înscrisă şi circumscrisă.

19. Corpuri de rotaţie.

20. Figuri inverse în spaţiu.

21. Elemente din geometria tetradrului; tetraedre ortologice.

22. Elemente de geometrie neeuclidiană.

Clasa a XI-a. Algebra. *(Elemente de calcul diferenţial şi integral).* **Calcul diferenţial.** 1. Chestiuni pregătitoare (conform manualului).

2. Despre funcţii în general; clasificarea funcţiilor. Funcţii inverse. Funcţii continue şi discontinue.

3. Teoria numerelor iraţionale.

4. Limite; axioma CANTOR-DEDEKIND. Teorema asupra limitelor. Un şir care are o limită finită este mărginit inferior şi superior.

5. Teorema BOLZANO-WEIERSTRASS; un şir crescător sau descrescător, dar limitat, are o limită.

6. Infiniţi mici; parte principală. Ordinul infinitesimal a lunui infinit mic.

7. Ordin de infinitudine pentru un infinit mare.

8. Teoreme asupra infiniţilor mici şi mari. Aplicaţii.

9. Teorema lui CESÀRO: cazuri particulare şi aplicaţii.

10. Teoria seriilor; teoreme generale. Seria armonică.

11. Teorema de comparaţie cu un termen şi cu doi termeni la serii cu termeni pozitivi. Seria armonică generalizată.

12. Serii cu termeni pozitivi şi serii absolut convergente.

13. *Criterii de convergenţă.*

A) Criteriul lui D'ALEMBERT.

B) Criteriul lui CAUCHY. Echivalenţa criteriilor dela A) şi B).

C) Criterii logaritmice.

D) Criteriul RAABE-DUHAMEL şi următoarele.

E) Criteriul condensator al lui CAUCHY.

F) Criteriul lui JAMET.

14. Serii alternate.

15. Operaţii asupra seriilor. Sumarea seriilor; diverse procedee practice. Înmulţirea seriilor: teorema lui MERTENS.

16. Numărul *e*. Seria e^x. Funcţia exponenţială.

17. Logaritmi naturali; trecerea dela un sistem de logaritmi la altul. Funcţia logaritmică.

18. Teoria continuităţii funcţiilor de o variabilă şi de mai multe variabile

19. Despre derivată; interpretare geometrică.

20. Calculul derivatelor diferitelor categorii de funcţii: algebrice, transcendente, inverse, funcţie de funcţie, funcţie compusă.

21. Teorema lui LEIBNIZ asupra derivatei de ordinul n a produsului uv; generalizare pentru produsul $u_1u_2u_3 \ldots u_p$. Alte procedee pentru găsit derivate succesive.

22. Funcţii de mai multe variabile: derivate parţiale. Funcţie compusă.

23. Derivatele funcţiilor implicite.

24. Funcţii omogene; relaţia lui EULER şi generalizarea ei.

25. Aplicaţii ale derivatelor în geometrie şi la cinematică.

26. Teorema lui ROLLE.

27. Formula creşterilor finite. Interpretări geometrice.

28. Noţiuni asupra seriei TAYLOR şi MACLAURIN. Serii întregi. Derivarea lor.

29. Câteva desvoltări în serie a câtorva funcţii elementare. Desvoltări limitate; aplicaţiuni.

30. Forme nedeterminate. Regula lui L'HOSPITAL; interpretare geometrică.

31. Studiul variaţiei funcţiilor şi reprezentarea lor grafică. Concavitatea unei curbe. Asimptote oblice.

32. Probleme de maximă şi minimă; de geometrie, fizică, mecanică, etc.

33. Separarea rădăcinilor unei ecuaţii:

A) Cu ajutorul teoremei lui ROLLE.

B) Pe cale grafică.

34. Calculul rădăcinilor iraţionale ale ecuaţiilor algebrice, prin:

A) Metoda părţilor proporţionale.

B) Metoda lui NEWTON.

35. Rezolvarea ecuaţiilor transcendente.

36. *Diferenţiala* unei funcţii: interpretare geometrică. Diferenţialele funcţiilor cunoscute, algebrice şi transcendente.

Calcul integral. 1. Descompunerea fracţiilor raţionale în elemente integral simple. Aplicaţii.

2. Funcţii primitive; integrale nedefinite. Interpretare geometrică.

3. Integrale imediate. Integralele funcţiilor raţionale. Schimbare de variabilă.

4. Integrale care se reduc la integrale de funcţii raţionale:

A) Funcţii algebrice.

B) Funcţii transcendente.

5. Utilizarea imaginarelor.

6. Integrarea prin părţi.

7. Aplicaţii la serii întregi; integrarea serilor întregi.

8. Integrale definite.

9. Calculul ariilor plane.

10. Calcularea volumelor de rotaţie.

11. Centrele de greutate: linii, arii plane, volume de rotaţie.

12. Teoremele lui GULDIN; aria şi volumul torului.

13. *Aplicaţii în fizică:* A) Energia la întinderea unui resort. B) Travaliul efectuat de o maşină termică. C) Potenţialul unei sarcini electrice, etc.

14. Noţiuni asupra determinanţilor funcţionali.

15. Noţiuni asupra ecuaţiilor diferenţiale:

a) Variabile separate.

b) Ecuaţie lineară de ord. I.

c) Ecuaţia omogenă.

d) Ecuaţie de ordinul II cu coeficienţi constanţi şi fără membrul II.

Mecanica. 1. Elemente din teoria vectorilor. Operaţii geometrice. Derivata geometrică. Proiecţiile vectorilor. Expresii analitice ale operaţiilor geometrice. Aplicaţii.

2. Momentele vectorilor în raport cu un punct şi în raport cu o axă. Expresii analitice.

3. Sisteme de vectori.

4. Despre cuplu de vectori.

Cinematica 5. Preliminarii; punct material şi corp solid; mişcări şi studiul lor.

6. Cinematica punctului; mişcări rectilinii şi curbilinii. Mişcarea circulară. Mişcarea oscilatorie simplă pe o dreaptă.

7. Schimbarea sistemului de comparaţie.

8. Cinematica corpului solid: translaţie şi rotaţie.

9. Roţi dinţate şi angrenaje; cureaua de transmisie. Mişcarea pistonului maşinilor cu vapori şi explozie: bielă şi manivelă.

Statica 10. Principiile mecanicei clasice.

11, Unităţile principale în mecanică.

12. Statica punctului; formulele lui STĒVIN.

13. Statica punctului cu legături; echilibru. Stabilitatea echilibrului.

14. Noţiuni asupra frecărilor.

15. Statica corpului solid: forţe concurente şi paralele. Cuple de forţe.

16. Centre de greutate; determinarea lor analitică. Centre de greutate ale liniilor, ariilor plane, ale volumelor. Utilizarea calculului integral.

17. Echilibrul corpului solid liber şi cu legături.

18. Echilibrul unui sistem de solide.

19. Metode practice pentru soluţionarea problemelor de echilibru la corpul solid.

Dinamica 20. Dinamica punctului; mişcarea punctului material liber; mişcarea parabolică.

21. Mişcarea punctului material cu legături (fără frecare).

22. Lucrul forţelor; calculul său:

a) Prin calcul integral.

b) Pe cale grafică. Unităţi de lucru mecanic.

23. Forţa vie:

a) Forma diferenţială.

b) Forma integrală. Aplicaţiuni la mişcarea unui punct material.

Aplicaţii: maşini. 24. Troliu.

25. Cric.

26. Scripeţi ficşi şi mobili; mufle şi palanuri.

27. Pârghii.

28. Planul înclinat.

29. Randamentul unei maşini.

30 Aparate pentru regularea mişcărilor la maşini: A) Volant. B) Regulator de forţă centrifugă (WATT). C) Frână.

31. Lucrul maşinilor termice: principiile lui MAYER şi CARNOT.

32. Motorul DIESEL.

33. Noţiuni asupra motoarelor hidraulice şi electrice.

G-L GH. BUICLIU, VIRGIL CLAUDIAN
şi G. D. SIMIONESCU.

NOTE MATEMATICE

12. *Descompunerea numerelor raționale în factori primi.* Dăm două teoreme asupra acestei chestiuni.

Teorema I. *Orice număr rațional, ireductibil sau nu, se poate descompune în factori primi.*

In adevăr dacă N este un număr rațional iar p și q sunt 2 numere naturale, adică întregi și pozitive, atunci se pot avea în totdeauna, fără a fi nevoe de vre-o demonstrație

$$N = \frac{p}{q} = \frac{p_1 p_2 \dots p_m}{q_1 q_2 \dots q_n}$$

unde p_i și q_i sunt factori primi.

Teorema II. *Orice putere de exponent rațional, ireductibil sau nu, se poate descompune în factori primi.*

In adevăr dacă

$$p = p_1 p_2 \dots p_m \quad \text{atunci} \quad p^{\frac{a}{b}} = p_1^{\frac{a}{b}} p_2^{\frac{a}{b}} \dots p_m^{\frac{a}{b}}$$

unde p și p_i au însemnările dela teorema I.

Mai mult de cât atât, avem

$$P = \frac{\Pi p^a}{\Pi q^b}$$

unde p, a, q, b sunt numere raționale iar p_i, q_i, a_i, b_i numere prime sau nu dar raționale.

Exemplu. $$M = \frac{375}{484} = \frac{3 . 5^3}{2^2 . 11^2} = 2^{-2} . 3 . 5^{-3} . 11^{-2}.$$

Teorema III. *Cel mai mare comun divizor și cel mai mic multiplu comun a două numere raționale sau irațională se obține aplicând regulile comune numerelor întregi.*

Fie numerele

$$M_1 = \frac{2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{3}{2}} . 7^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{3}{5}} . 11^{\frac{5}{3}}} \quad \text{și} \quad M_2 = \frac{2 . 3^3 . 11^4 . 13^{\frac{3}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} . 17^{\frac{7}{8}}}$$

care se pot scrie

$$M_1 = 2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{3}{2}} . 5^{-\frac{3}{5}} . 7^{\frac{2}{3}} . 11^{-\frac{5}{3}} \text{ şi } M_2 = 2 . 3^3 . 7^{-\frac{2}{3}} . 11^4 . 13^{\frac{3}{2}} . 17^{-\frac{7}{8}}$$

$$\therefore \quad D\,(M_1\, M)_2 = 2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{3}{2}} . 7^{-\frac{2}{3}} . 11^{-\frac{5}{3}}$$

şi

$$M\,(M_1\, M_2) = 2 . 3^3 . 5^{-\frac{3}{5}} . 7^{\frac{2}{3}} . 11^4 . 13^{\frac{3}{2}} . 17^{-\frac{7}{8}}$$

$$\therefore \quad \frac{M_1}{D} = 7^{\frac{4}{3}} \quad , \quad \frac{M_2}{D} = 2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{3}{2}} . 11^{\frac{17}{3}} . 13^{\frac{3}{2}} . 17^{-\frac{7}{8}} .$$

Câturile acestora sunt prime între ele. Avem apoi

$$\frac{M}{M_1} = 2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{3}{2}} . 11^{\frac{17}{3}} . 13^{\frac{3}{8}} . 17^{-\frac{7}{8}} \text{ şi } \frac{M}{M_2} = 5^{-\frac{3}{5}} . 7^{\frac{4}{3}}$$

de asemeni prime între ele.

Observaţiune. Consideraţiile precedente înlătură restricţia *a* şi *b* prime între ele, în cazul rezolvărei în numere întregi a ecuaţiei.

$$ax + by = c.$$

BERNARDO I. BAIDAFF, (Buenos Aires).

13. *Asupra perpendicularei dusă în spaţiu, dintr'un punct exterior, pe o dreaptă.* In *Revista Matematică din Timişoara,* în Nr. 7 din 15 Septembrie 1921, am publicat un articol asupra aceleiaşi chestiuni, cu ajutorul ortocentrului unui triunghiu convenabil ales.

Deasemenea, în Nr. 2 din Octombrie 1928 al *Gazetei Matematice,* Vol. XXXIV, pag. 44, am publicat un alt articol tot asupra aceleiaşi chestiuni, cu ajutorul a două perechi de puncte în involuţie, special alese pe dreapta dată.

Ca şi atunci, scopul articolului de faţă este că, fără a se apela la cunoştinţele epurii planului şi intersecţiei a două plane sau a intersecţiei unei drepte cu un plan, — să tratăm problema pe o nouă cale numai cu ajutorul cunoştinţelor asupra proiecţiunilor unei drepte şi planelor ei proiectate, precum şi cu ajutorul cunoştinţelor asupra proiecţiunilor unui unghiu drept pe un plan paralel cu una din laturi şi a teoremei celor 3 perpendiculare.

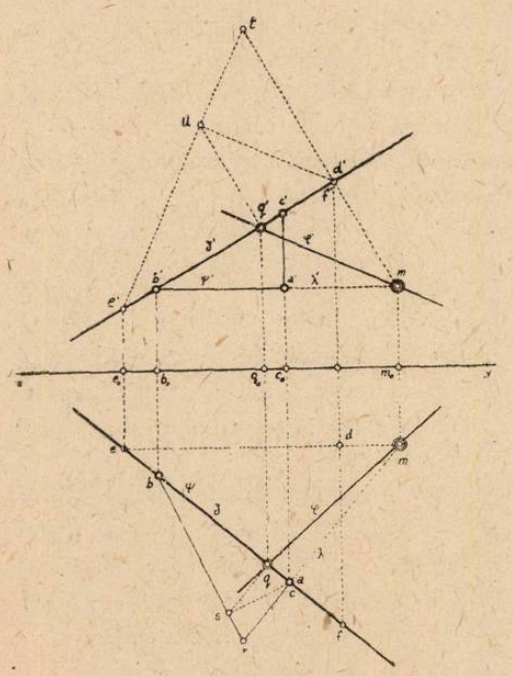
Metoda pe care o vom aplica este următoarea:

Să formăm în spaţiu un triunghiu dreptunghic convenabil ales, în care A este unghiul drept şi să găsim piciorul Q pe ipotenusa BC a înălţimii AQ, pe baza proprietăţii că punctul Q împarte ipotenusa într'un raport egal cu raportul patratelor catetelor adiacente:

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{AC^2}}{\overline{AB^2}} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Să procedăm în epură:

Fie în spaţiu o dreaptă Δ ale cărei proiecţiuni sunt $(\delta\delta')$ şi un punct M ale cărei proiecţiuni sunt (m, m'). Voim ca din punctul (m, m') să ducem perpendiculara $(\varphi\varphi')$ pe dreapta $(\delta\delta')$, piciorul ei fiind (q, q').



Să formăm acum triunghiul special ABC despre care am făcut menţiune mai sus.

Pentru aceasta, ducem mai întâi o orizontală $(\lambda\lambda')$ perpendiculară pe $(\delta\delta')$ fără a o intersecta. In acest scop, este suficient ca în epură să avem λ perpendiculară pe δ, iar λ' paralelă cu linia de pământ xy.

Pe această orizontală, vom lua punctul (a, a') care se află în planul proiectant vertical al dreptei date. Pentru acest lucru este suficient ca proiecţiunea orizontală a să fie tocmai la întretăierea proiecţiunilor orizontale δ şi λ, iar proiecţiunea verticală a' să fie pe λ'. Punctul (a, a') astfel determinat, de fapt, nu este de cât piciorul perpendicularei dusă din (m, m') pe planul vertical proiectant al dreptei Δ.

Deci, potrivit teoremei celor 3 perpendiculare, piciorul (q, q') al perpendicularei dusă din (m, m') pe $(\delta\delta')$ va fi şi cel al perpendicularei dusă din (a, a') pe $(\delta\delta')$.

Să considerăm acum orizontala $(\psi\psi')$ din planul proiectant vertical al dreptei $(\delta\delta')$, orizontală care trece prin punctul (a, a') şi se sprijlnă pe $(\delta\delta')$ în (b, b').

In fine, să considerăm pe dreapta $(\delta\delta')$ şi punctul (c, c') care are proiecţiunea orizontală c confundată cu a.

Se vede uşor că dreapta $(ac, a'c')$ este o verticală.

Am format astfel, în spaţiu un triunghiu special ABC, iar în epură cu proiecţiunile $(abc, a'b'c')$, triunghiu care are latura $(ab, a'b')$ o orizontală, latura $(ac, a'c')$ o verticală şi latura $(bc, b'c')$ suprapusă peste dreapta $(\delta\delta')$.

Este de remarcat că, în epură, triunghiul $(abc, a'b'c')$ are laturile $ab = AB$ şi $a'c' = AC$ în adevărata mărime.

Totul se reduce acum la a găsi piciorul perpendicularei dusă din (aa') pe $bc, b'c')$, adică punctul (q, q').

Pentru aceasta, construesc un triunghiu abr, dreptunghic în a, în care $ab = AB$ şi $ar = AC = a'c'$. Ducând din a perpendiculara as pe br şi din s perpendiculara în q pe ba avem:

$$\frac{qa}{qb} = \frac{sr}{sb} = \frac{\overline{ar}^2}{\overline{ab}^2} = \frac{\overline{a'c'}^2}{\overline{ab}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{AB^2} = \frac{QA}{QB}. \qquad (1)$$

Relaţiile (1) ne arată că Q este piciorul perpendicularei dusă din A pe BC şi deci în epură (q, q') este piciorul acelei perpendiculare. Potrivit celor spuse mai sus punctul (q, q') este şi piciorul perpendicularei dusă din (m, m') pe $(\delta\delta')$.

Observare. Intreg procedeul precedent se poate folosi întrebuinţând planul proiectant de capăt al dreptei date $(\delta\delta')$ şi luând în loc de orizontale, drepte frontale. Construcţia este arătată în epură, pentru găsirea proiecţiunii verticale q' a punctului (q, q').

M. NICOLAU.

14. *Asupra unei probleme din „Culegerea de Trigonometrie", partea I.* Problemei 19, Cap. XV, în care se cere să se rezolve sistemul:

$$\operatorname{tg}(y+z) = \alpha \operatorname{tg} x \quad , \quad \operatorname{tg}(z+x) = \beta \operatorname{tg} y \quad , \quad \operatorname{tg}(x+y) = \gamma \operatorname{tg} z,$$

i se poate da o soluţie diferită, mai directă decât cea indicată.

Desvoltând, sistemul se mai scrie:

$$\begin{aligned} \alpha\,\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y - \mathrm{tg}z &= \alpha\,\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y\,\mathrm{tg}z \\ -\mathrm{tg}x + \beta\,\mathrm{tg}y - \mathrm{tg}z &= \beta\,\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y\,\mathrm{tg}z \\ -\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y + \gamma\,\mathrm{tg}z &= \gamma\,\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y\,\mathrm{tg}z. \end{aligned} \qquad (1)$$

Eliminând pe $\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y\,\mathrm{tg}z$ între primele două ecuații (1), găsim ecuația:

$$\alpha(\beta+1)\,\mathrm{tg}x - \beta(\alpha+1)\,\mathrm{tg}y + (\alpha-\beta)\,\mathrm{tg}z = 0,$$

care se mai scrie:

$$\alpha(\beta+1)\,\mathrm{tg}x - \beta(\alpha+1)\,\mathrm{tg}y + [\alpha(\beta+1) - \beta(\alpha+1)]\,\mathrm{tg}z = 0,$$

sau încă, dacă împărțim cu $(\alpha+1)(\beta+1)$:

$$\frac{\alpha}{\alpha+1}\,\mathrm{tg}x - \frac{\beta}{\beta+1}\,\mathrm{tg}y + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{\beta}{\beta+1}\right)\mathrm{tg}z = 0.$$

Urmează că, dacă notăm pentru prescurtare:

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} = \mathrm{A}, \quad \frac{\beta}{\beta+1} = \mathrm{B}, \quad \frac{\gamma}{\gamma+1} = \mathrm{C},$$

sistemul (1) ne conduce la sistemul:

$$\mathrm{A}\,\mathrm{tg}x - \mathrm{B}\,\mathrm{tg}y + (\mathrm{A}-\mathrm{B})\,\mathrm{tg}z = 0$$

$$(\mathrm{B}-\mathrm{C})\,\mathrm{tg}x + \mathrm{B}\,\mathrm{tg}y - \mathrm{C}\,\mathrm{tg}z = 0$$

$$-\mathrm{A}\,\mathrm{tg}x + (\mathrm{C}-\mathrm{A})\,\mathrm{tg}y + \mathrm{C}\,\mathrm{tg}z = 0,$$

a cărui soluție se găsește ușor că este:

$$\frac{\mathrm{tg}x}{-\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{tg}y}{\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{tg}z}{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}} = k.$$

Scriind că valorile obținute pentru $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{tg}y$, $\mathrm{tg}z$ (în funcție de parametrul k) verifică una din ecuațiile (1), de ex. pe prima, găsim ecuația:

$$(-\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})(\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C})(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C})\,.\,k^3 - (\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}-2)\,.\,k = 0.$$

Rădăcinilor acesteia:

$$k = 0 \quad \text{şi} \quad k = \pm \sqrt{\frac{A+B+C-2}{(-A+B+C)(A-B+C)(A+B-C)}},$$

le corespund — pentru sistemul dat — soluţiile:

$x = n_1\pi$, $y = n_2\pi$, $z = n_3\pi$, (n_1, n_2, n_3 întregi oarecare), şi:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{-A+B+C} = \frac{\operatorname{tg} y}{A-B+C} = \frac{\operatorname{tg} z}{A+B-C} = \pm \sqrt{\frac{A+B+C-2}{(-A+B+C)(A-B+C)(A+B-C)}}.$$

A. DOBRESCU.

15. *Generalizarea exerciţiului VIII. 963. S. E. G. M.*[1]. Fie t o tangentă la o conică C, d o dreaptă fixă, A un punct fix, iar M un punct mobil, amândouă situate pe conică. Tangenta în M taie pe t în P, iar AM taie pe d în N. Se observă că N şi P descriu diviziuni omografice pe d şi t deci dreapta NP înfăşoară o conică, cu direcţiile asimptotice t şi d.

Conica înfăşurată se reduce la un punct când intersecţia Z a dreptelor t şi d este un punct autoomolog al omografiei. Acesta se întâmplă când d trece prin punctul de contact al tangentei t cu conica C sau când tangenta în A trece prin Z.

Dacă luăm pentru C o parabolă, A punctul ei dela infinit, t tangenta în vârf şi d o perpendiculară fixă pe axă regăsim enunţul exerciţiul menţionat.

PETRE P. TEODORESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Universitatea din Bucureşti. Facultatea de Ştiinţe. Secţia Matematici

Anul I. Examene de fine de an. Sesiunea Iunie 1948

Algebra. 1. Să se rezolve ecuaţia

$$7x + 1 = 0.$$

2. Să se scrie rădăcinile primitive pentru fiecare din ecuaţiile

$$x^m - 1 = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, 22).$$

1) Materialul din această notă a fost extras din observaţiile cu care autorul a însoţit soluţia acestui exerciţiu.

3. Să se rezolve ecuaţia $AX = B$, unde

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{Vmatrix}, \quad B = \| p, q, r \|.$$

4. x_1, x_2, x_3, x_4 fiind rădăcinile ecuaţiei

$$x^4 - ix + 1 = 0,$$

să se calculeze $\sum x_1^3 x_2$.

Calcul diferenţial şi integral. 1. Proprietăţile funcţiunilor continui într'un interval închis.

2. Formula lui GREEN. Ca aplicaţie să se calculeze integrala curbilinie

$$\int y^3\,dx + x^3 dy,$$

dealungul elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

în sensul direct.

3. Se consideră curba

$$x = 6t + 6t^2 + 2t^3 \quad , \quad y = 2 + 2kt + 2t^3 \quad , \quad z = 3 - 6t.$$

Să se determine parametrul k, astfel încât diferenţiala arcului să se exprime raţional în funcţie de t. Numărul k fiind astfel determinat se înseamnă respectiv cu A, B, C punctele în care curba taie respectiv planele yOz, zOx şi xOy. Să se arate că arcele BC şi CA sunt egale.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Julio 1948. Ano XXI. No. 2 (274).

Buletinul Şedinţelor Societăţei Române de Ştiinţe. Secţia Matematică. Anul II. Nr. 1—2.

Coloquium Mathematicum. I_3. Wroclaw. Pologne. 1948.

Intermédiaire des Recherches Mathématiques. Tome 4. Fascicule 14; N-os 1097—1171. Avril 1948 et Tome 4. Fascicule 15 N-os 1172—1242. juillet 1948.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVIII. Nr. 10. Decembrie 1948. E. VIŞA: Asupra cubicelor circulare şi iperbolice-echilatere unicursale drepte. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

L. DE BROGLIE. Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs. Gauthier-Villars. Paris 1949.

A. GLODEN. Table de factorisation des nombres $N^3 + 1$ pour $N \leqslant 500$.

PAUL LEVY. Processus stochastiques et mouvement Brownien. Gauthier-Villars. Paris 1948.

J. MAURIN. *Géométrie descriptive à quatre dimensions.* Premier Livre: Figures du prémier degré. Chap. I, II, III. Définitions, positions, intersections. Paris Gauthier-Villars Imprimeur-Editeur 55 Quai des Grands-Augustins. Broşură în 8. (28×23 cm) de 73 pagini, 34 figuri. *200 franci.*

Lucrarea este o « *încercare de a găsi posibilitatea reducerii problemelor « de mecanică la simple probleme de hypergeometrie şi de a permite rezol- « varea grafică a acestor probleme, direct, dotând Geometria Descriptivă « cu dimensiunile suplimentare*, **care îi lipseau până acum** », după cum declară autorul în introducere că « *i s'a părut interesant* » să facă acest lucru.

Chiar dela început, pare curios cum un fost elev al Şcolii Politehnice, nu a înţeles Geometria Descriptivă clasică a lui MONGE care nu poate suferi de lipsurile pe care domnia sa i le atribuie, pentru simplul motiv că MONGE a creiat noua ştiinţă a Geometriei Descriptive pentru ingineri în general şi pentru constructori în particular şi nu pentru matematicieni!

De altfel însăşi preocuparea care « *i s'a părut interesantă* » autorului tinde tot către aplicaţiile inginereşti de îndată ce vrea să « *reducă problemele de mecanică la simple probleme de hypergeometrie* ».

In adevăr, d-l MAURIN afirmă în introducere că « Geometriei Descriptive *îi lipseau până acum anumite dimensiuni suplimentare şi că ea suferă de două lipsuri care îi strâng domeniul* », arătând că cele două lipsuri constau din faptul: întâi, că *Geometria Descriptivă este euclidiană şi deci nu permite reprezentarea spaţiilor curbilinii şi al* doilea că ea *nu comportă decât trei dimensiuni şi ca atare ea nu poate reprezenta « decât fiinţe geometrice* ».

Totuşi calitatea lucrării d-lui MAURIN este aceia că d-sa caută să extindă principiile practice ale Geometrie Descriptive, stabilite de MONGE, dotând-o cu noi elemente astfel în cât, spune d-l MAURIN, aceasta va căpăta posibilitatea să rezolve direct pe cale grafică şi problemele de mecanică Acest lucru însă urmează să fie văzut în viitoarele capitole ce vor apare.

De-o cam dată în această « *primă parte* » care a apărut, d-l MAURIN prezintă numai figurile numite de d-sa « *de gradul întâi* ».

Aci este interesantă inovaţia introdusă de d-l MAURIN prin introducerea suprapunerii a trei proiecţiuni ortogonale pe cele trei plane alese de d-sa drept cele caracteristice pe un singur plan al epurii plecând dela faptul că cele trei plane alese trec toate printr'o aceeaşi dreaptă — devenită linia pământului — una din cele patru axe ale aşa numitului de d-sa « *hyper-tetraedrul de referinţă* ».

Observ, în treacăt, că d-l MAURIN, *încearcă*, în plus să lege Geometria Descriptivă şi de Geometria Analitică, dar aceasta are mai puţină importanţă decât faptul de nomenclatură propriu zisă când denumeşte sistemul de referinţă cu numele de hypertetraedru, când de fapt acesta este o figură analoagă unui unghiu solid din spaţiul cu trei dimensiuni, el fiind un unghiu solid alcătuit din patru drepte, fiecare dintre ele fiind în acelaşi timp perpendiculară pe celelalte trei. Dacă în spaţiul cu trei dimensiuni o atare figură se numeşte unghiu triedru, nimic nu îndreptăţeşte ca în hypergeometrie, el să fie numit hypertetraedru ci cel mult *hypertriedru*, dacă s'a întrebuinţat prefiexul hyper, şi în nici un caz acest prefix nu trebuia să fie urmat de cuvântul tetraedru, care este *un cuvânt cu trei dimensiuni*, şi care fiind numele consacrat al corpului solid cu patru feţe, se produce confuzia sigură pentru corpul analog din spaţiul cu patru dimensiuni sau din hypergeometrie.

Ca o ilustrare a acestui fapt, d-l MAURIN numeşte *« hyper-plan »* spaţiul cu trei dimensiuni când acesta intră în compunerea figurilor de hypergeometrie. Aceste denumiri nu mi se par fericite şi cred că d-l MAURIN ar trebui să dea o atenţiune deosebită acestui fapt pentru capitolele ce vor urma, — dacă nu este prea târziu, — spre a înlătura confuzia ce se va produce fără nici o îndoială. De altfel nelogica acestor denumiri pleacă şi dela observaţia elementară că în geometria în spaţiul cu trei dimensiuni, nici dreapta nu este un hyperpunct nici planul nu este o hyperdreaptă. Eu am socotit [1] că punctul, dreapta, planul, spaţiul, spaţiul cu 4 dimensiuni — pe care l'am numit *« Chaosul »* —, etc. sunt elemente ale noţiunii fundamentale a geometriei.

Nu am pretenţia că numirile pe care le-am dat eu sunt cele mai fericite, totuşi scopul esenţial pe care l'am avut în vedere a fost evitarea confuziei care este mai rea decât neştiinţa.

In rest, cartea d-lui MAURIN este o carte bine scrisă, clară, concisă, — poate chiar prea concisă — şi cu figuri destul de clare, unele însă nu suficient de degajate, ca spre exemplu figurile 33 şi 34 din capitolul intersecţiuni. Spun aceasta mai ales în vederea capitolelor ce vor urma şi care cred că vor trebui să fie neapărat degajate spre a câştiga claritatea expunerii.

INGINER I. I. CHIŢULESCU.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 102. (G. M. vol. XXVIII, p. 458). Se întreabă ce se ştie despre studiile matematice ale lui LUDOVIC FILIP DE ORLÉANS, regele Franţei (1830—48).

Iată o informaţie culeasă din *« Nouvelle Histoire Universelle »*. Depuis L'antiquité jusqu'à nos jours, par ALBERT MALET professeur Agrégé d'Histoire avec la collaboration de M. M. MAQUET et GRILLET. Tome III. Libraire Hechette à Paris et à Londres. La pagina 274, găsim:

... *« LOUIS-PHILIPPE était agé de cinquante-sept ans. Il étais le fils de ce duc d'Orléans célèbre pendant la Révolution sous le nom du* PHILIPPE-EGALITÉ *qui,...*

... *Quand* DUMOURIEZ *eut déserté, le duc d'Orleans, tenu pour son complice, dut émigrer pour échapper à l'echafaud. Il se refusa de servir contre la France et reçut quelque temps en Suisse en donnant, sous le nom de* CHABAUD, *au prix de 1.400 francs par an, des leçons de mathématiques au Collége de Reichenau »...*

LT. COL. E. ŞT. IACOB.

1) Vezi introducerea cărţii *« Chaosul »*, spaţiul cu 4 dimensiuni, de Inginer I. I. CHIŢULESCU, Bucureşti 1929, pag. 15, al. 29.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecei „Gazeta Matematică"

The Mathematical Gazette. Vol. XXX. 1946. Nr. 290—292; Vol. XXXI. 1947. Nr. 293—297; Vol. XXXII. 1948. Nr. 298—299.
Donate de d-l E. N. WEGENER.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3551. *Să se construiască un patrulater* ABCD, *cunoscând vârfurile* A *şi* B, *lungimea laturei* CD, *situată pe o dreaptă dată şi ştiind că triunghiul* ABE, E *fiind intersecţia* (AD, BC) *este asemenea cu triunghiul polar reciproc în raport cu un cerc dat. Discuţie.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de d-l MIRCEA D. POPA, (Student la Politehnică, Bucureşti).

Fie M centrul cercului (M) dat. Voiu căuta întâiu locul punctelor E din plan aşa fel ca triunghiul polar al triunghiului ABE, faţă de cercul (M) să fie asemenea cu triunghiul ABE. Fie E un asemenea punct şi A'B'E' triunghiul său polar faţă de cercul (M). Vom avea, conform enunţului,

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle A'E'B'. \qquad (1)$$

Insă A'E' $\perp$ MB, iar E'B' $\perp$ MA, rezultă că, (2), $\sphericalangle$ A'E'B', este egal sau suplimentar unghiului AMB. Din (1) şi (2), rezultă că $\sphericalangle$ AEB, este egal sau suplimentar unghiului AMB.

Rezultă de aici, că două cazuri sunt posibile:

a) E *aparţine cercului* ABM.

b) E *aparţine simetricului cercului* ABM, *faţă de* AB.

Analog, vom avea:

a') B *aparţine cercului* AME.

b') B *aparţine simetricului cercului* AEM *faţă de* AE.

1. In ipoteza (*a*), (*a'*), rezultă că patrulaterul ABME, este inscriptibil.

2. Ipoteza (a), (b') este exclusă căci ar rezulta sau $A \equiv B$, sau $B \equiv E$.

3. Pentru aceleaşi motive, este exclusă ipoteza (b), (a').

4. In ipoteza (b), (b'), deduc:

Cercul AEB, fiind simetricul lui AMB faţă de AB, este un cerc CARNOT al triunghiului AMB, iar cercurile AMB şi AEB, sunt egale.

B, aparţinând cercului simetric lui AEM faţă de AE, rezultă că cercurile AEB şi AEM sunt egale şi deci şi cercul AEM este un cerc CARNOT al triunghiului AMB.

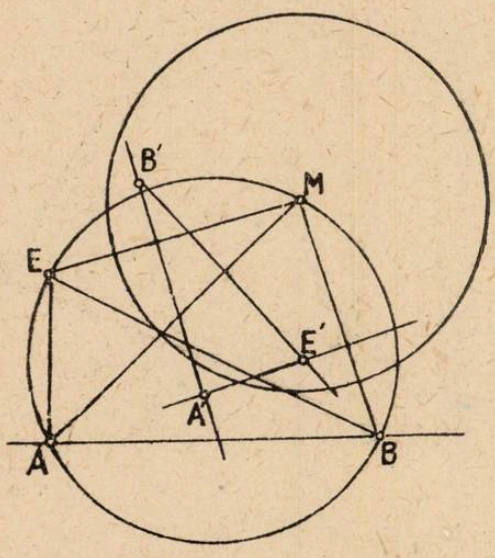


Fig. 1

Cercurile AEB şi AEM, fiind cercuri CARNOT ale triunghiului AMB, E este ortocentrul triunghiului AMB.

In concluzie:

Pentru ca triunghiul polar $A'B'E'$ să fie asemenea cu triunghiul ABE, e necesar ca:

E să fie ortocentrul triunghiului AMB, sau

E să se găsească pe cercul AMB.

Se dovedeşte foarte uşor că aceste condiţii sunt şi suficiente.

Să trecem acum la construcţia patrulaterului ABCD.

Punctele C şi D, se vor găsi pe o dreaptă dată Δ. Pe această dreaptă, dreptele AE şi BE, vor trebui să taie un segment dat $\overline{CD} = l$.

A) E *este ortocentrul triunghiului* AMB. In general nu putem avea soluţii. Totuşi poate exista o singură soluţie dacă AE şi BE taie pe Δ segmentul $\overline{CD} = l$.

B) E *se găseşte pe cercul* AMB. Dreapta Δ taie acest cerc în punctele R şi T. Se vede uşor că dacă E descrie acest cerc

punctele C şi D descriu pe Δ diviziuni omografice de aceiaşi bază. Într'adevăr fiind dat punctul D, dreapta AD determină în mod unic punctul E, iar dreapta BE determină în mod unic punctul C şi reciproc.

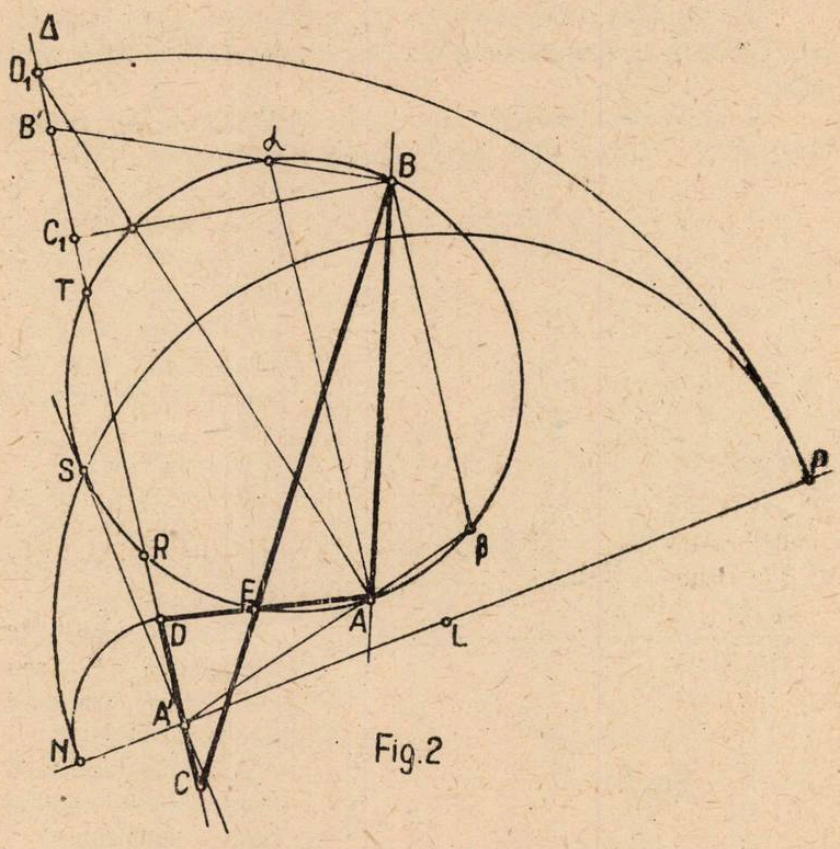


Fig. 2

Punctele duble ale acestei omografii sunt evident R şi T. Să construim punctele limită, sau de fugă, ale omografiei de mai sus. Când E se găseşte pe paralela prin A la Δ, fie α acest punct, $D \equiv \infty$, $C \equiv B' \equiv (B\alpha, \Delta)$. Dacă E se găseşte pe paralela din B la Δ, fie β acest punct, atunci $C \equiv \infty$, $D \equiv A' \equiv (A\alpha, \Delta)$. A' şi B' sunt punctele limită. Luând aceste puncte ca origine se ştie că ecuaţia omografiei se scrie $\overline{A'D} \cdot \overline{B'C} =$ constant şi evident

$$\overline{A'D} \cdot \overline{B'C} = \overline{A'R} \cdot \overline{B'R}.$$

Insă $\overline{B'R} = -\overline{A'T}$, deci

$$\therefore \quad \overline{A'R} \cdot \overline{B'R} = -\overline{A'R} \cdot \overline{A'T} = -P_a^2,$$

unde am notat cu P_a^2 puterea punctului A' faţă de cercul AMB. Notând segmentele orientate

$$\overline{A'D} = x \quad , \quad \overline{B'C} = y \tag{1}$$

ecuaţia omografiei se va scri

$$xy = -P_a^2. \tag{2}$$

Din relaţia generală $\overline{DC} = \overline{DA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'C}$, deduc, ţinând seamă de (1),

$$\overline{DC} = \overline{A'B'} - x + y \quad (3) \qquad \pm l = \overline{A'B'} - x + y. \tag{4}$$

Relaţiile (2) şi (4) determină pe x şi y. Construcţia rădăcinilor se face foarte uşor ţinând seamă că (2) ne dă produsul rădăcinilor iar (4) ne dă diferenţa lor.

Se vede cu uşurinţă că x şi y sunt rădăcini ale unor ecuaţii de gradul II şi deci problema admite un număr maxim de patru soluţii. Construcţia segmentelor x şi y cărora li se cunoaşte produsul şi diferenţa este cunoscută. Problema este însă mai delicată deoarece în cazul nostru segmentele sunt orientate. In general problema se rezolvă astfel:

Ştim că segmentele x, y sunt date de ecuaţiile $(\overline{A'B'} = a)$

$$xy = -P_a^2 \; ; \; y - x = \pm l - a. \tag{5}$$

Facem o transformare

$$x = \pm x_1 \quad ; \quad y = \pm y_1 \tag{6}$$

astfel ca membrul doi al ecuaţiilor (5) să fie pozitiv. Ecuaţiile (5) devin

$$x_1 y_1 = \pm P_a^2 > 0 \quad , \quad \pm x_1 \pm y_1 = |\pm l - a| > 0. \tag{7}$$

(Cazul $-x_1 - y_1 = |\pm l - a|$ fiind exclus).

Construim rădăcinile ecuaţiei (7) care sunt $x_1 > 0$, $y_1 > 0$.

Luăm pe Δ, axa orientată, segmentele $\overline{AD} = x$, $\overline{BC} = y$, unde x şi y sunt date acum de transformarea (6). Patrulaterul ABCD, e astfel construit.

Exemplu I. Să se construiască patrulaterul când Δ taie cercul ABM, dar nu taie segmentul AB. Punctele A'B' sunt exterioare cercului ABM, deci $P_a^2 > 0$.

Fie $\overline{CD} = l < a = \overline{A'B'}$. Ecuațiile (5) sunt (luând semnul — înaintea lui l)

$$xy = -P_a^2 < 0 \quad , \quad y - x = -l - a < 0. \tag{5'}$$

Facem transformarea:

$$x = x_1 \quad , \quad y = -y_1 . \tag{6'}$$

Ecuațiile (5') devin

$$x_1 y_1 = P_a^2 > 0 \quad , \quad x_1 + y_1 = l + a > 0.$$

Ducem tangenta A'S din A' la cercul ABM, $\overline{A'S} = P_a$, cu centrul S descrim un cerc de rază $(l+a)/2$ care taie perpendiculara în A' pe A'S în L. Cercul de centru L și rază $\overline{LS}$ taie aceeași perpendiculară în P și N. Vom avea:

$$\text{I} \begin{cases} x_1 = \overline{A'P} \\ y_1 = \overline{A'N} \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} x_1 = \overline{A'N} \\ y_1 = \overline{A'P} \end{cases}.$$

Luăm acum

$$\text{I} \begin{cases} \overline{A'D} = \overline{A'P} \\ \overline{B'C} = -\overline{A'N} \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} \overline{A'D_1} = \overline{A'N} \\ \overline{B'C_1} = -\overline{A'P} \end{cases}$$

obținem două soluții ale problemei, patrulaterele ABCD și ABC_1D_1.

In exemplul considerat, dacă înaintea lui l în ecuația (5) luăm semnul +, pentru valoarea considerată a lui l, nu obținem soluții căci cercul cu centru S și raza $\frac{a-l}{2}$ nu taie perpendiculara în A' pe AS.

Observăm că dacă Δ nu taie pe AB, vom avea totdeauna $P_a^2 > 0$ și deci sistemul rezolvant (7) va fi de forma

$$x_1 y_1 = m > 0 \quad , \quad x_1 + y_1 = n > 0.$$

Adică, problema se rezolvă construind cantitățile x_1 și y_1 cărora li se cunoaște suma și produsul.

Exemplu II. Δ taie pe AB. Punctele A', B' sunt interioare cercului ABM, deci $P_a^2 < 0$.

Transformarea (6) devine $x = \pm x_1$, $y = \pm y_1$, semnele corespunzându-se.

Sistemul (7) devine $x_1 y_1 = -P_a^2 > 0$, $\pm x_1 \mp y_1 = |\pm l - a|$, semnele corespunzându-se. Problema se rezolvă construind can-

titățile x_1, y_1 cărora li se cunoaște produsul și diferența și se știe că în acest caz problema are totdeauna soluții.

Perpendiculara în A' pe dreapta ce unește pe A' cu centrul cercului ABM taie acest cerc în U. Cercul tangent în U la A'U și având ca diametru $|\pm l - a|$, are ca centru punctul K și este tăiat de A'K în V și W. Vom avea:

$$\text{I}\begin{cases} x_1 = \overline{A'V} \\ y_1 = \overline{A'W} \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} x_1 = -\overline{A'W} \\ y_1 = -\overline{A'V} \end{cases}$$

Discuție: Din cele expuse mai sus se deduce următorul tablou de discuție:

I. Δ *nu taie cercul* ABM: $2P_a > a$

$l > 2P_a + a$	4 soluții distincte	
$l = 2P_a + a$	2 „ „	2 confundate
$a - 2P_a < l < 2P_a + a$	2 „ „	
$l = 2P_a - a$	2 „ confundate	
$l < 2P_a - a$	nici o soluție	

II. Δ *tangentă cercului* ABM: $2P_a = a$

$l > 2a$	4 soluții distincte	
$l = 2a$	2 „ „	2 confundate
$l < 2a$	2 soluții distincte	

III. Δ *taie cercul* ABM *dar nu taie segmentul* AB: $2P_a < a$

$l > a + 2P_a$	4 soluții distincte	
$l = a + 2P_a$	2 „ „	2 confundate
$a - 2P_a < l < a + 2P_a$	2 „ „	
$l = a - 2P_a$	2 „ „	2 confundate
$l < a - 2P_a$	4 „ „	

IV. Δ *taie cercul* ABM *și segmentul* AB.

Avem totdeauna 4 soluții distincte.

Tabloul de mai sus se poate obține prin una din următoarele trei căi:

1. Realizantul ecuației ce rezultă din eliminarea lui x din ecuațiile (2), (4) se scrie

$$R = (a \pm l - 2P_a)(a \pm l + 2P_a).$$

2. Punând condiția ca cercul de centru S și rază $|\pm l - a|/2$ să taie perpendiculara în A' pe AS, $\therefore\ 2P_a < |\pm l - a|$.

3. Studiind variația funcției $z = a + \frac{P_a^2}{y} + y$.

Notă. 1°. Am publicat, *in estenso*, soluția d-lui MIRCEA D. POPA, deși este cam lungă, fiindcă este un model de rezolvare și discuție a unei probleme de *geometrie*. D-sa este, de altfel, singurul, care a trimis o soluție acestei probleme, propusă acum 20 ani.

2°. Determinarea punctului E, după ce s'a arătat că se află pe cercul ABM, se poate face și altfel: căutăm locul punctelor E astfel ca EA, EB să determine pe dreapta dată un segment CD, de lungime dată: intersecțiile acestui loc, care este o conică, cu cercul ABM va da punctele E căutate.

3°. Angajăm pe corespondenții noștri să abordeze problema în acest sens.

4°. Determinarea punctului E se poate face și geometric dar, momentan, nu-mi amintesc soluția ce am imaginat când am propus această problemă.

M. G.

PROBLEMA 5430. *Fie* I, A', B', C' *centrul înscris și punctele de contact cu laturile* BC, CA, AB. *Dreapta* BI *intersectează dreptele* B'A', B'C' *în punctele* B_c, B_a. *Analog se capătă punctele* C_a, C_b; A_b, A_c. *Triunghiul format de intersecțiile dreptelor* $A_b B_a$, $B_c C_b$, $A_c C_a$ *coincide cu triunghiul complementar al lui* ABC.

OCTAVIAN GH. RĂDULESCU.

Soluție dată de d-l PAUL P. DRĂGHICESCU (elev lic. mil. Iași).

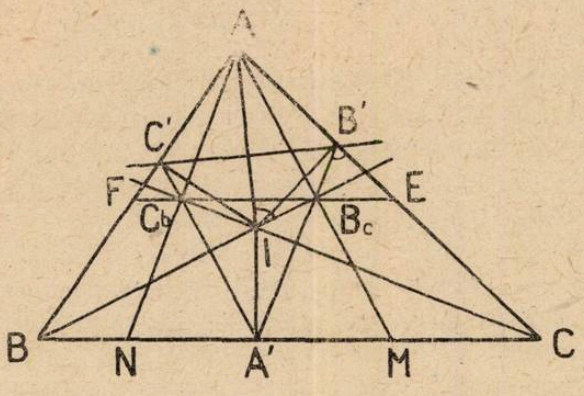
Să demonstrăm că patrulaterul $AIB_c B'$ este inscriptibil. Pentru aceasta observăm că $\sphericalangle AIB_c = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$, ca unghiu exterior triunghiului ABI. Apoi din triunghiul isoscel CA'B' ($\overline{CA'} = \overline{CB'}$ ca tangente duse din C la cercul înscris) rezultă

$$\sphericalangle CB'A' = \frac{180^0 - C}{2} = \frac{A + B}{2} = \sphericalangle AIB_c .$$

Așa dar $\sphericalangle AIB_c + \sphericalangle AB'B_c = 180^0$. Patrulaterul $AIB_c B'$ este inscriptibil. Deducem $\sphericalangle AB_c I = \sphericalangle AB'I = 90^0$, adică $AB_c \perp BI$.

La fel se arată că $AC_b \perp CI$.

Să prelungim pe AB_c și AC_b până întâlnesc latura BC respectiv în M și N. Triunghiul BAM este isoscel de oarece BI este și bisectoare și înălțime; prin urmare BI este și mediană, deci B_c este mijlocul lui AM. La fel se arată că C_b este mijlocul lui AN.



Dreapta $C_b B_c$ unind mijloacele segmentelor AM și AN, este paralelă cu MN (deci cu BC) și trece prin mijloacele laturilor AB, AC. Ea coincide așa dar cu o latură a triunghiului complementar.

In mod analog se demonstrează că $C_a A_c$ și $A_b B_a$ coincid cu celelalte laturi ale triunghiului complementar al lui ABC.

Observațiuni. S'au primit soluții foarte bune dela d-nii: MIRCEA D. POPA (Școala Ofițeri Artilerie) și MARIN GH. POPESCU (clasa a VIII-a liceul Pitești).

Caracterizările din parantezele de după nume corespund situației pe care o aveau rezolvitorii la data trimiterei soluției.

G. D. S.

PROBLEMA 5681. *Dacă* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *reprezintă numerele prime cu* N *și mai mici ca el, atunci, pentru* m *impar, avem:*

$$p_1^m + p_2^m + \ldots + p_n^m = \mathcal{M}N.$$

C-DOR I. LINTEȘ

In *„Teoria Indicatorilor"* de I. LINTEȘ se demonstrează la pag. 72 relațiunea:

$$\sum_1^p p_i^{2m+1} = p_1^{2m+1} + p_2^{2m+1} + \ldots + p_n^{2m+1} = \mathcal{M}N \qquad (1)$$

adică tocmai relațiunea din enunț unde *m* este nepereche.

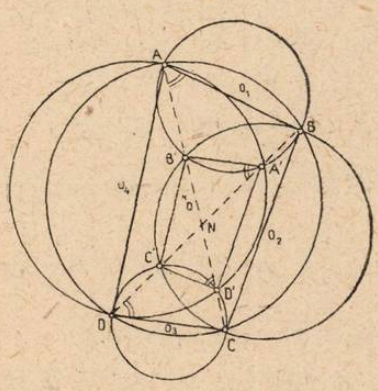
Au rezolvat problema, bazându-se pe relațiunea (1), d-nii: G. G. ENESCU, VAL. A. PETCU și GH. GH. VRÂNCEANU.

PROBLEMA 6282. *Fie pe un cerc patru puncte* A, B, C, D. *Cercurile construite pe* AB, BC, CD, DA *ca diametri se taie, a doua oară, succesiv în* B'C'D'A'.

Să se arate că punctele A', B', C', D' *sunt conciclice.*

CEZAR COȘNIȚĂ.

1. *Soluție* dată de d-nii: VASILE BAGHINA (liceul Armatei, Craiova); ION A. BARBU și CEZAR N. I. BOERESCU (Politehnica București); NICOLAE AL. BUCUR (liceul „T. Maiorescu", București); NICOLAE A. CERNESGU și PETRU A. CERNESCU (liceul Târgoviște); PAUL CONSTANTINESCU (Colegiul militar, Predeal); VALERIU CONSTANTINESCU (liceul Armatei, Craiova); VIRGIL CONSTANTINESCU (liceul Slatina); CONST. CORDUNEANU (Colegiul militar, Predeal); D-TRU I. CRĂCEA și PAUL N. CIUCESCU (liceul Slatina); ALEXANDRU N. DĂNESCU și MIHAI VLAD DĂSCĂLESCU (liceul „Mihai Viteazul", București); VASILE GH. DIACONU (Colegiul militar, Predeal); EUGEN A. DODU (liceul „Mihai Viteazul", București); GEORGE G. ENESCU (București); ȘTEFAN GR. FIRESCU (liceul „Frații Buzești", Craiova); THEODOR I. HANGAN (liceul „Titu Maiorescu", București); CLAUDIU IONESCU-BUJOR (cl. a 3-a, liceul „Mihai Viteazul", București); ION MUNTEANU (Colegiul militar, Predeal); VALERIU PANDELE A. PETCU (liceul „Mihai Viteazul", București); STELIAN PANTAZOPOL (bacalaureat, Galați); MIRCEA D. POPA (Politehnica București); PETRE P. TEODORESCU (liceul „Matei Basarab", București); MIRCEA VOINEA (Craiova).



Punctele A', B', C', D' sunt, evident, proecțiile ortogonale ale punctelor A, B, C, D pe diagonalele BD, AC ale patrulaterului ABCD. In patrulaterele inscriptibile ABB'A', CDD'C', ABCD avem:

$$\sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle BAC,$$

$$\sphericalangle B'D'C' = \sphericalangle BDC,$$

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC,$$

deci

$$\sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle B'D'C',$$

relație care probează că patrulaterul A'B'C'D' este inscriptibil.

2. *Generalizare.* dată de d-nii: ION BARBU, GEORGE ENESCU, MIRCEA D. POPA, PETRE P. TEODORESCU şi EMERIC D. G. DEUTSCH.

Proprietatea din problemă rămâne adevărată, când în locul cercurilor de diametre AB, BC, CD, DA se iau patru cercuri oarecari având aceste laturi drept coarde. In adevăr, în patrulaterele înscrise ABB'A', ADD'A', avem:

$\sphericalangle AA'B' = 180^0 - \sphericalangle ABB'$, $\sphericalangle AA'D' = 180^0 - \sphericalangle ADD'$, deci

$\sphericalangle B'A'D' = 360^0 - (\sphericalangle AA'B' + \sphericalangle AA'D') = \sphericalangle ABB' + \sphericalangle ADD'$.

In acelaşi fel, din patrulaterele inscriptibile BCC'B', CDD'C', avem:

$\sphericalangle CC'B' = 180^0 - \sphericalangle CBB'$, $\sphericalangle CC'D' = 180^0 - \sphericalangle CDD'$, deci

$\sphericalangle B'C'D' = 360^0 - (\sphericalangle CC'B' + \sphericalangle CC'D') = \sphericalangle CBB' + \sphericalangle CDD'$.

Din aceste egalităţi, rezultă:

$$\sphericalangle B'A'D' + \sphericalangle B'C'D' = (\sphericalangle ABB' + \sphericalangle CBB') +$$
$$+ (\sphericalangle ADD' + \sphericalangle CDD') = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^0,$$

ceeace demonstrează teorema.

Notă 1°. D-l MIRCEA D. POPA demonstrează problema generalizată cu ajutorul inversiunii. D-sa ia polul de inversiune în A', şi reduce problema la următoarea:

Se dă un patrulater inscriptibil ABCD. *Două cercuri oarecari, având laturile* BC, CD *drept coarde se taie într'un al 2-lea punct* C.

Fie B', D' *punctele unde primul şi al 2-lea cerc mai taie laturile* AB, CD. *Punctele* B', C', D' *sunt colineare.*

Demonstraţia acestei noui teoreme se face imediat, observând că unghiurile B'C'C, D'C'C sunt suplimentare, fiind egale respectiv cu unghiurile ADC, ABC. Gradul de dificultate al nouei probleme este acelaşi cu al celei date, prezentarea ei în mod independent este însă interesantă prin ea însăşi.

2°. D-l PETRE P. TEODORESCU observă că problema generalizată se poate enunţa şi astfel:

Patru cercuri se taie, două câte două, în punctele A, A'; B, B'; C, C'; D, D'. *Dacă punctele* A, B, C, D *sunt conciclice, atunci şi punctele* A', B', C', D' *sunt conciclice.*

Această teoremă interesantă poate fi socotită ca un caz cu totul particular al unei teoreme mult mai generale de care am stabilit-o cu alt prilej [1]):

Dacă patru din cele opt puncte de intersecţie (la distanţă finită) a două curbe analagmatice de ordinul 4, sunt conciclice, atunci şi celelalte patru sunt conciclice.

---

1). CEZAR COŞNIŢĂ: *Sur les courbes et surfaces anallagmatiques* (Thése).

Fie C_1, C_2, C_3, C_4, patru cercuri aşezate toate în acelaşi plan; notăm cu (A, A'); (B, B'); (C, C'); (D, D'); intersecţiile cercurilor (C_1, C_2); (C_2, C_3); (C_3, C_4); (C_4, C_1).

Analagmaticele singulare (C_1, C_3); C_2, C_4) se taie — la distanţă finită — în cele opt puncte A, A'; B, B'; C, C'; D, D'; deci, potrivit teoremei citate, dacă patru din aceste puncte sunt conciclice, atunci şi celelalte patru sunt conciclice.

Această teoremă se poate extinde şi în spaţiu, astfel:

Se dau patru sfere S_1, S_2, S_3, S_4 *şi fie* C_{12}, C_{23}, C_{34}, C_{41} *cercurile de intersecţie ale sferelor* (S_1, S_2); (S_2, S_3); (S_3, S_4); (S_4, S_1). *Dacă cercurile* C_{12}, C_{34} *sunt aşezate pe o sferă. atunci şi cercurile* C_{23}, C_{41} *sunt aşezate pe o sferă.*

Pentru demonstraţie, voi folosi următoarea teoremă mult mai generală, pe care am dovedit-o în lucrarea citată:

Dacă două ciclice de ordinul 4 se taie după două bicuadratice şi dacă una din ele este sferică, atunci şi a doua este sferică.

In cazul de faţă, ciclidele singulare (S_1, S_3); (S_2, S_4) se intersectează după bicuadraticele singulare formate din câte două din cercurile C_{12}, C_{23}, C_{34}, C_{41}, deci dacă cercurile C_{12}, C_{34} sunt aşezate pe o sferă, şi cercurile C_{23}, C_{41} sunt aşezate pe o sferă.

O soluţie elementară, directă, a acestei teoreme ar fi interesantă.

3°. Configuraţia din problema 6282 se bucură de multe alte proprietăţi frumoase; unul singur dintre corespondenţii cari au rezolvat problema d-l STELIAN PANTAZOPOL, a menţionat una din aceste proprietăţi. D-sa a dovedit că:

Axele radicale ale cercurilor de diametre AB, BC, CD, DA *formează un paralelogram circumscris patrulaterului* A'B'C D', *centrul acestui paralelogram fiind punctul unde axa radicală a primului şi celui de al 3-lea cerc se intersectează cu axa radicală a celui de al 2-lea cu cel de al 4-lea cerc.*

Prima parte a teoremei este evidentă, deoarece AA' şi CC' sunt paralele, tot ca şi BB' şi DD'. Partea 2-a rezultă din faptul că punctul comun dreptelor AA', BB', fiind centrul radical al cercurilor de diametre AB, BC, DA, aparţine axului radical al cercurilor de diametre BC, DA; la fel se arată că punctul comun dreptelor CC', DD' se află pe acelaşi ax radical.

Se mai observă că *vârfurile acestui paralelogram sunt ortocentrele triunghiurilor* IAB, IBC, ICD, IDA; I fiind intersecţia diagonalelor AC, BD.

O altă proprietate, pe care unii corespondenţi au demonstrat-o în vederea rezolvării problemei date este aceea că *laturile patrulaterului* A'B'C'D'. *sunt paralele cu laturile patrulaterului* ABCD, *în ordinea:*

A' B', CD ; B' C', DA ; C' D', AB ; D' A', BC.

Lucrul acesta rezultă imediat din egalităţile de unghiuri arătate la prima soluţie.

Din această constatare, unii corespondenţi au dedus că patrulaterele A'B'C'D', ABCD sunt asemenea, ca având unghiurile egale. Amintim acestor corespondenţi că pentru a dovedi asemănarea a două poligoane (altele decât

triunghiuri) *nu este suficient a dovedi numai egalitatea unghiurilor, ci trebue dovedită şi proporţionalitatea laturilor* (de exemplu, un dreptunghiu şi un patrat nu sunt asemenea, deşi au unghiurile respectiv egale; sau, un romb şi un patrat nu sunt asemenea, deşi au laturile respectiv proporţionale).

Proporţionalitatea laturilor celor două patrulatere A'B'C'D', ABCD este uşor de arătat, urmărind pe o figură diferitele triunghiuri asemenea care se formează.

Iată o altă soluţie, care ne dă şi valoarea raportului de asemănare. In cercul circumscris patrulaterului ABB'A', avem:

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \sin \sphericalangle A'BB' = \overline{AB} \mid \cos \alpha \mid$$

α fiind unghiul format de diagonalele AC, BD. Rezultă deci că patrulaterele A'B'C'D', ABCD sunt asemenea, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\mid \cos\alpha \mid$.

Laturile omoloage ale celor două patrulatere se intersectează în patru puncte coliniare P, Q, R, S.

In adevăr, punctul P unde A'B' taie pe AB este centrul radical al cercurilor următoare: Cercul ABCD, cercul A'B'C'D' şi cercul de diametru AB, deci punctul P aparţine axei radicale a cercurilor ABCD, A'B'C'D'.

Proprietatea rămâne valabilă şi pentru problema generalizată.

Fie P', Q', R', S' proecţiile ortogonale ale punctului I pe laturile AB, BC, CD, DA respectiv.

Punctele P', Q', R', S', *sunt conjugatele armonice ale punctelor* P, Q, R, S, *faţă cu vârfurile respective ale patrulaterului* ABCD.

Patrulaterul P'Q'R'S' *este circumscriptibil unui cerc de centru* I.

Dreptele P'Q'R'S' *se intersectează într'un punct* U *al diagonalei* AC, *iar dreptele* P'S', Q'R' *se intersectează într'un punct* V *al diagonalei* BD.

Punctele U, V *sunt aşezate pe dreapta* PQRS.

Configuraţia se bucură de multe alte proprietăţi frumoase, unele cunoscute, altele noui. Recomandăm corespondenţilor noştri ca să le studieze deaproape.

3°. Problema 6282, ca şi generalizarea ei, sunt cunoscute, după cum au menţionat şi unii dintre rezolvitorii ei. Eu am trimes-o spre publicare — fără a şti că este cunoscută — pe vremea când eram elev de liceu, acum aproape 20 de ani; ea a apărut cu multă întârziere, abia în ultimul timp.

C. C.

PROBLEMA 6357. *Se cere să se găsească*

$$1^0 \quad \lim_{a \to 0} y = \lim_{a \to 0} \frac{f(x+a) \cdot f(x-a) - [f(x)]^2}{f(x+a) + f(x-a) - 2f(x)}$$

ştiind că $f(x)$ *este o funcţie continuă.*

2^0 $\lim y$ *când* a *este constant, iar* $f(x)$ *tinde către o limită finită când* x *tinde către infinit.*

ŞT. S. MIHĂESCU.

1°. Din soluție vor rezulta lipsurile enunțului și posibilitățile de precizare în feluri deosebite. De la început constatăm că nu se poate vorbi de o funcție $f(u)$ dacă nu se precizează din ce categorie de obiecte face parte argumentul u și din ce categorie de obiecte face parte $f(u)$, pentru fiecare u.

In prima parte a problemei este vorba de o funcție reală de o variabilă reală, funcție finită și definită într'un interval (p, q) iar x este un punct inferior intervalului. Deoarece a tinde către 0, ne putem aranja ca punctele $x \pm a$ să fie interioare intervalului inițial.

Presupunem că $f(u)$ este derivabilă până la ordinul 2 inclusiv într'un interval care conține punctul x în interiorul său. In acest caz avem

$$f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x + \theta_1 a) \qquad (1)$$

$$f(x-a) = f(x) - af'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x - \theta_2 a) \qquad (2)$$

unde θ_1 și θ_2 sunt cuprinși între 0 și 1.

După simplificare cu $\frac{1}{2} a^2$, expresiunea y se scrie

$$y = \frac{f(x)[f''(x+\theta_1 a) + f''(x-\theta_2 a)] - 2f'^2(x) + af'(x)[f''(x-\theta_2 a) - f''(x+\theta_1 a)] + a^2 f''(x+\theta_1 a) f''(x-\theta_2 a}{f''(x+\theta_1 a) + f''(x-\theta_2 a)}$$

Dacă $f''(u)$ nu este continuă în punctul x, nu se poate afirma nimic despre $\lim_{\lambda \to 0} f''(x+\lambda)$ și deci nimic despre limita expresiei y. *Prin urmare chiar ipoteza mai largă decât acea din enunț, pe care am făcut-o mai sus, nu asigură existența unei limite pentru expresia dată.*

Dacă presupunem că $f''(u)$ este continuă în punctul x, atunci

$$\lim_{a \to 0} y = \frac{f(x) f''(x) - f'^2(x)}{f''(x)} \qquad (3)$$

în ipoteza că $f''(x) \neq 0$. Dacă $f''(x) = 0$, iar $f'(x) \neq 0$ atunci (y) tinde către $+\infty$.

Dacă presupunem că $a > 0$ tinde către zero și că funcția $f''(u)$, fără să fie neapărat continuă în punctul x, se bucură de proprietatea că $f''(x+0)$ și $f''(x-0)$ există și că suma lor nu este nulă, avem

$$\lim_{a>0 \to 0} y = \frac{f(x)[f''(x+0) + f''(x-0)] - 2f'^2(x)}{f''(x+0) + f''(x-0)}.$$

Pentru cititorii care ar dori să studieze şi alte aspecte ale problemei, menţionăm că numitorul expresiei figurează în definiţia derivatei a doua generalizate a lui RIEMANN şi că se poate găsi o limită chiar când $f''(u)$ nu este continuă pentru $u = x$, dar este diferenţiabilă STOLZ-FRÉCHET de ordinul 2 în acest punct (GEORGES VALIRON, *Théorie des Fonctions*, pag. 81 şi 228).

Lăsând deoparte studiul cazului $f''(x) = f'(x) = 0$, observăm că în ipoteză că $f(u)$ este o funcţie olomorfă de o variabilă complexă u, definită într'un cerc de centru x, oricum ar tinde numărul complex a către 0, expresia y tinde către valoarea din (3), dacă $|f''(x)| \neq 0$.

2°. Pentru a simplifica unele calcule, observăm că identitatea

$$\frac{\beta\gamma - \alpha^2}{\beta + \gamma - 2\alpha} = k + \frac{(\beta - k)(\gamma - k) - (\alpha - k)^2}{(\beta - k) + (\gamma - k) - 2(\alpha - k)} \qquad (4)$$

ne permite să căutăm limita expresiei din membrul al doilea, când $x = \alpha - k$, $\gamma = \beta - k$, $z = \gamma - k$ tind către zero. Vom arăta printr'un exemplu simplu, că ipoteza continuităţii funcţiei $g(x) = f(x) - k$ în domeniul punctului dela infinit — dacă este vorba de o funcţie complexă de o variabilă complexă — sau pentru $x > N$ sau $x < -N$, numărul întreg N fiind arbitrar, combinată cu ipotezele că $g(x) \to 0$ şi cu $g\left(\frac{1}{u}\right) = 0$ pentru $u = 0$, *nu asigură existenţa unei limite pentru* y.

Considerăm funcţia

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

continuă şi nulă la infinit. Dacă x tinde către infinit prin multipli pari de π, este uşor de văzut că $y = \frac{1}{2a} \sin a$ iar dacă x tinde către infinit prin multipli impari de π, avem $y = -\frac{1}{2a} \sin a$.

Vom studia partea 2-a a problemei în ipoteza foarte restrictivă că $g(x)$ este o funcţie olomorfă de variabila complexă x în domeniul punctului de la infinit şi nulă în acest punct.

Făcând transformarea $x = \frac{1}{u}$, avem

$$g(x) = g\left(\frac{1}{u}\right) = F(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots \qquad (5)$$

Presupunem că $|a_1| \neq 0$. Coeficienții a_i se calculează cu ajutorul derivatelor funcției inițiale în punctul dela infinit.

Vom avea

$$g(x+a) = F\left(\frac{u}{1+au}\right) \quad \text{și} \quad g(x-a) = F\left(\frac{u}{1-au}\right). \tag{6}$$

Ținând cont de desvoltările, valabile când $|a|$ este suficient de mic,

$$\frac{u}{1-au} = u\,[1 + au + a^2u^2 + \ldots]$$

$$\left[\frac{u}{1-au}\right]^2 = u^2\,[1 + 2au + 3a^2u^2 + \ldots]$$

$$\left[\frac{u}{1-au}\right]^3 = u^3\,[1 + 3au + 6a^2u^2 + \ldots]$$

și de acele obținute schimbând pe a în $-a$, avem

$$g(x+a) + g(x-a) - 2g(x) = 2a_1a^2u^3 + 6a_2a^2u^4 + \ldots$$

$$g(x+a) \cdot g(x-a) - g^2(x) = a_1a^2u^4 + \ldots$$

Se vede imediat că

$$\lim_{u \to 0} y = 0.$$

Se ajunge la o concluzie similară dacă desvoltarea (5) conține u^k, unde $k > 1$, drept factor.

Este clar că ipoteza olomorfiei funcției $g(x)$ în domeniul punctului de la infinit este prea largă. Dacă luăm $g(x) = e^{-x}$, se vede că pentru $x \to +\infty$, $g(x) \to 0$ și că $y = 0$ în mod constant. Totuși funcția $g(x) = e^{-x}$ nu este regulată în domeniul punctului de la infinit. Un alt exemplu ni-l oferă funcția $g(x) = xe^{-x}$, pentru care $y \to 0$ fără a fi mereu nul.

Rămânând în domeniul real, presupunem că $\lim g(x) = 0$ și că

$$\lim \frac{g(x+a)}{g(x)} = l.$$

Vom avea

$$\lim \frac{g(x-a)}{g(x)} = \frac{1}{l}.$$

Dacă presupunem că l este diferit de zero sau unu, avem

$$\lim y = \lim \frac{\left[\frac{g(x+a)}{g(x)} \cdot \frac{g(x-a)}{g(x)} - 1\right] g(x)}{\frac{g(x+a)}{g(x)} + \frac{g(x-a)}{g(x)} - 2} = 0.$$

Se poate da un exemplu pentru care $l = 0$ şi totuşi $y \to 0$.

Fie $g(x) = e^{-x^2}$, $a > 0$ şi $x \to +\infty$. Avem

$$y = \frac{e^{-x^2}\left[e^{-2a^2} - 1\right]}{e^{-a^2-2ax} + e^{-a^2+2ax} - 2}$$

expresie care tinde către zero.

Au dat soluţii parţiale d-nii: P. P. TEODORESCU, E. A. DODU, (Bucureşti) şi VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Slatina).

B. B.

PROBLEMA 6358. *Să se rezolve triunghiul* ABC, *cunoscând unghiul* A *şi lungimile* BB', CC', *a două drepte care plecând din vârfurile* B *şi* C, *împart laturile opuse în raporturi date. Aplicaţie pentru cazul când* BB' *şi* CC' *sunt mediane.*

I. ŞT. TEODORESCU — Ploeşti.

Soluţie, dată de d-nii A. I. VARGĂ (Politehnica, Bucureşti) şi K. A. TELEMAN.

Din triunghiurile ABB' şi ACC' se scoate

$$\overline{BB'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB'}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AB'}\cos A \qquad (1)$$

$$\overline{CC'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\,\overline{AC}\cdot\overline{AC'}\cos A. \qquad (2)$$

Cunoscând rapoartele în care B' şi C' împart laturile AC şi AB se deduc imediat valorile segmentelor AB' şi AC' sub forma

$$\overline{AB'} = k_1\,\overline{AC} \quad \text{şi} \quad \overline{AC'} = k_2\,\overline{AB}.$$

Se duc aceste valori în (1) şi (2) şi se găseşte un sistem de 2 ecuaţii de gradul II în AB şi AC. O dată rezolvat acel sistem

problema revine la rezolvarea unui triunghiu în care se dau două laturi şi unghiul cuprins între ele, problemă cunoscută.

Construcţia, dată de d-l M. D. POPA (Politehnica Bucureşti).

Fie M intersecţia dreptelor BB' CC' şi

$$\overline{BB'} = b' \; ; \; \overline{CC'} = c' \; ; \; \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \beta \; ; \; \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \gamma. \qquad (1)$$

Din triunghiul ABB' tăiat de transversala CMC', după teorema lui MENELAUS, avem

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \quad \therefore \quad \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB'}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}. \qquad (2)$$

Dar din (1) se deduce

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB'}} = 1 - \beta$$

aşa că (2) devine

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} = \frac{1-\beta}{\gamma} = k_1. \qquad (3)$$

Analog găsim

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}} = \frac{1-\gamma}{\beta} = k_2. \qquad (4)$$

Din (3) şi (4) se scoate:

$$\overline{MB'} = \frac{b'}{k_1 + 1} \quad , \quad \overline{MC'} = \frac{c'}{k_2 + 1}$$

Cunoscând lungimile segmentelor în care M împarte lungimile BB' şi CC' se deduce imediat următoarea construcţie:

Pe BB' se construieşte un segment de cerc O, capabil de unghiul dat A. Punctul C' se găseşte la intersecţia cercului ω omotetic cu cercul A în raportul γ şi a cercului cu centrul în M şi raza MC'. Pot fi 2, 1, sau 0 soluţii, după numărul de intersecţii ale acestor cercuri.

Pentru cazul când BB', CC' sunt mediane, a se vedea problema 6395, rezolvată la pag. 99 din acest volum.

O construcţie analoagă a dat şi d-l I. N. MĂNCESCU (Colegiul Naţional, Predeal).

EXERCIŢII

3. *Cu numerele de la 2064 la 2072 inclusiv să se formeze un patrat magic, astfel ca suma numerelor de pe orizontale, verticale şi diagonale să fie aceeaşi şi egală cu numărul ultimei probleme propusă de* I. IONESCU *în Gazeta Matematică.*

P. P. TEODORESCU.

R. Folosim patratul magic, format cu numerele $1 - 9$ [1] şi adăugăm la fie-care număr pe 2063, găsim astfel

2065	2072	2067
2070	2068	2066
2069	2064	2071

suma numerelor de pe orizontale, verticale şi diagonale fiind 6204, numărul ultimei probleme, propusă de I. IONESCU.

4. *Intr'un triunghiu oarecare* ABC *se iau pe laturile* AB *şi* AC *dela vârfurile* B *şi* C *către* A, *segmentele* $\overline{BC'} = K.\overline{AB}$ *şi* $\overline{CB'} = K.\overline{AC}$, K *fiind un număr real oarecare.*

Să se arate că dacă β *şi* γ *sunt unghiurile făcute de* BB' *şi* CC' *cu latura* BC, *atunci:*

$$\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}B - \operatorname{cotg}C$$

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{K}{2-k} \cdot \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}.$$

MIRCEA ADAM.

R. Din triunghiurile BCB' şi BCC' deducem:

$$\frac{bk}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\beta+C)} \qquad k\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}B + (1-k)\operatorname{ctg}C$$

$$\frac{ck}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin(\gamma+B)} \qquad k\operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}C + (1-k)\operatorname{ctg}B$$

$$\therefore \quad \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}B - \operatorname{ctg}C \quad \text{şi}$$

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{k}{2-k} \cdot \frac{\operatorname{ctg}C - \operatorname{ctg}B}{\operatorname{ctg}C + \operatorname{ctg}B}$$

ultima relaţie este o extindere a problemei 5434 (*Gazeta Matematică* XLIX, pag. 629) în care $k = \frac{1}{2}$.

---

1) I. IONESCU: *Culegere de probleme de aritmetică*, ed. II, Cap. IV, prob. 15, pag. 172.

5. *Să se arate că* p *fiind un număr prim, determinantul*

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p-1)!\,(p-1) & p!\,(p-1) & p \\ 1 & p & (p-2)!-1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

se divide exact prin $(p!-p^2)$, *unde* $b \neq ap$.

I. F. FILIMON

Rp. Adunăm liniei întâia linia a doua înmulțită cu $(p-1)$ și dăm factor comun în linia întâia

$$\Delta = [(p-1)!+1)\begin{vmatrix} p-1 & p\,(p-1) & 1 \\ 1 & p & (p-2)!-1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Înmulțim coloana a treia cu $(p-1)$ și avem:

$$\Delta = [(p-1)!+1]\begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 1 & p & (p-1!+1-p \\ a & b & (p-1)\,c \end{vmatrix}$$

Scădem linia a doua din linia întâia și avem:

$$\Delta = [(p-1)!+1]\,[(p-1)!-p]\,(ap-b).$$

p fiind număr prim, conform teoremei lui WILSON

$$(p-1)!+1 = \mathcal{M}_p, \quad \text{deci} \quad \Delta = \mathcal{M}\,(p!\,p^2).$$

6. *Să se găsească un număr ai cărui factori primi și al cărui indicator sunt respectiv numerele 2, 3, 11 și 6480.*

I. N. PISANCA.

R. Fie

$$N = 2^{\alpha}\,3^{\beta}\,11^{\gamma}$$

numărul căutat, al cărui indicator este

$$\varphi(N) = 2^{\alpha-1}\,3^{\beta-1}\,11^{\gamma-1}\,.\,2\,.\,10 = 6480$$

$$\therefore \qquad 2^{\alpha-1}\,3^{\beta-1}\,11^{\gamma-1} = 324 = 2^2\,3^4$$

Deci $\quad \alpha-1=2\ ,\ \beta-1=4\ ;\ \gamma-1=0$

$$\therefore \qquad N = 2^3\,3^5\,11 = 21384.$$

PROBLEME PROPUSE

6571. Dacă p şi q sunt două numere întregi prime între ele, să arate că numărul întreg M, format numai din cifra a scrisă consecutiv de p ori, este prim faţă de numărul întreg N, format numai din cifra b scrisă consecutiv de q ori, a şi b fiind numere întregi prime între ele.

Să se arate apoi că dacă între toate aceste cifre se intercalează câte n zerouri, n fiind un număr întreg oarecare, numerele M_1 şi N_1 astfel formate sunt de asemenea prime între ele.

G-L GR. ZAPAN.

6572. Să se determine numerele întregi a, b, c, astfel ca numărul

$$N = \frac{ab}{c(a+b)}$$

să fie deasemenea număr întreg.

O. N. ŢINO.

6573. Fie ABCD un patrulater inscriptibil. O dreaptă Δ dusă prin $E \equiv (AD, BC)$ taie dreptele CD, AC, DB, AB, în α, β, γ, δ. M fiind un punct pe cercul circumscris patrulaterului, dreptele $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$, retaie acest cerc în α', β', γ', δ'. Să se arate că:

1°. Intersecţiile

$$a(B\beta', C\delta') \quad , \quad b(D\delta', A\gamma') \quad , \quad c(A\alpha', D\beta') \quad , \quad d(C\gamma', B\alpha'),$$

sunt colineare pe Δ.

2°. Dreptele Aa, Bb, Cc, Dd, se întâlnesc în N pe cercul ABCD

3°. Punctele E, M. N, sunt colineare.

P. P. DRĂGHICESCU.

6574. In dreptunghiul ABCD, latura AB este jumătate din latura BC. Fie M mijlocul laturii AD şi a, m, c, proecţiile punctelor A, M, C, pe diagonala BD. Să se demonstreze că

$$\overline{Ba} = \overline{mc} = \overline{cD} = \frac{\overline{am}}{2}.$$

G-L GH. BUICLIU.

6575. Cercul înscris în triunghiul ABC atinge latura AB în M iar cercul exînscris în unghiul A atinge latura AC în N. Fie P punctul de intersecție al dreptelor CM și BN. Dacă A' și P' sunt proecțiile lui A și P pe BC, atunci avem

$$AB + AC = A'P'.$$

DR. ANDRÉ BAL (Givors).

6576. Să se construiască un triughiu, cunoscându-i direcțiile bisectoarelor și raza cercului înscris.

CONSTANTIN C. DIACONU.

6577. Se dă un cerc O(R) și punctele B și C pe el. Cu centrul în B se descrie un cerc de rază $C > BC$, care taie cercul O în A și A_1. Fie A', B', C', A_i, B_i, C_i, M, N, P și M_1, N_1, P_1, picioarele înălțimilor triunghiurilor ABC și A_1BC precum și punctele în care ele taie a doua oară cercul O.

1°. Să se exprime unghiurile și laturile triunghiului A_1BC în funcție de unghiurile și laturile triunghiului ABC.

2°. Punctele M și N_1, M_1 și N, sunt confundate și $\overline{PP_1} = \overline{AA_1}$.

3°. H și H_1 fiind cele două ortocentre, avem $\overline{MH_1} = \overline{NH}$.

4°. Patrulaterul AA_1H_1H este paralelogram.

5°. Punctele A', B_i, C' și A_i, B', C_i sunt colineare.

6°. Patrulaterul $AA'A_iB_i$ este romb.

E. A. DODU.

6578. Fie în plan un exagon AC'BA'CB' și fie *a*, *b*, *c*, intersecțiile laturilor opuse C'B, CB'; A'C, AC'; B'A, BA'.

Să se arate că:

1. Dreptele AB, A'B' si analoagele concură pe *ab* și analoagele.

2. Dacă dreptele *a*A, *b*B, *c*C, sunt concurente într'un punct S, atunci și *a*A', *b*B', *c*C', sunt concurente într'un punct S'.

3. Dacă α, β, γ, sunt intersecțiile dreptelor SA', SB', SC' respectiv cu diagonalele BC, CA, AB, dreptele Aα, Bβ, Cγ, sunt concurente într'un punct T pe SS'. Analog, α', β', γ', fiind intersecțiile dreptelor S'A, S'B, S'C, respectiv cu diagonalele B'C', C'A', A'B', dreptele A'α', B'β', C'γ', sunt concurente într'un punct T pe SS'.

ADRIAN GHEORGHIU.

6579. Se consideră un triunghiu oarecare ABC, în care se duc simedianele AA', BB', CC', (A', B', C', fiind situate respectiv pe BC, CA, AB). Paralelele duse prin punctul A' la laturile AB, AC, taie pe AC, AB, respectiv în punctele B_a, C_a. In acelaşi fel se obţin punctele C_b, A_b, A_c, B_c. Să se arate că:

1. Grupele de puncte (B, C, B_a, C_b), (C, A, C_b, A_b), (A, B, A_c, B_c) sunt aşezate pe câte un cerc.

2. Centrul radical al cercurilor precedente este complementarul reciprocului punctului lui LEMOINE al triunghiului ABC.

3. Perechile de drepte (AA_b, AA_c), (BB_c, BB_a), (CC_a, CC_b) sunt isogonale, în raport cu unghiurile A, B, C ale triunghiului dat.

4. Punctele A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b sunt aşezate pe o elipsă; să se determine centrul ei.

5. Triunghiurile $A_b B_c C_a$, $A_c B_a C_b$ sunt echivalente.

CEZAR COŞNIŢĂ.

6580. Dacă p este un număr prim, iar p^α este un divizor al numărului m, atunci numărul $C_m^{p^\alpha}$, unde C este simbolul combinărilor, nu este divizibil prin m.

RĂDUCANU GEORGESCU.

6581. Să se rezolve sitemul de ecuaţii:

$$\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\left(ax_1+\frac{b}{x_1}\right),$$

$$\frac{(x_1+x_2)\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)}{ax_1^2+b}=\frac{(x_2+x_3)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)}{ax_2^2+b}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{(x_{n-1}+x_n)\left(x_{n-1}+\frac{1}{x_n}\right)}{ax_{n-1}^2+b}=\frac{\left(x_n+\frac{b}{a}\right)\left(x_n+\frac{a}{b}\right)}{ax_n^2+b}.$$

ING. FL. NEDELCU.

6582. Să se arate că

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{7}+\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{7}-\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}.$$

N. GHIRCOIAŞU.

6583. Să se studieze natura seriilor cu termenii generali:

$$u_n = \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{n} + p\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos\frac{\beta}{n} + q\sin\frac{\beta}{n}}\right)^{n^2}; \quad v_n = \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{n} + p\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos\frac{\beta}{n} + q\sin\frac{\beta}{n}}\right)^{n};$$

$$w_n = \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{n} + p\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos\frac{\beta}{n} + q\sin\frac{\beta}{n}}\right)^{n} - e^{\alpha p - \beta q}.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6584. Fie ABC un triunghiu oarecare şi α, β, γ, trei puncte fixe situate în planul său. Un mobil M, atras de punctele α, β, γ, cu forţele K. Mα, K. Mβ, K. Mγ, este silit să parcurgă parabola π înscrisă în triunghiul ABC. Să se arate că:

1°. Vitezele mobilului M în punctele de tangenţă ale parabolei cu laturile BC, CA, AB, sunt invers proporţionale cu distanţele tripolare ale focarului parabolei π, în raport cu triunghiul ABC.

2°. Există totdeauna cel puţin o poziţie de repaos a mobilului M pe parabola π.

EMIL E. MARINESCU.

6585. Se consideră suprafeţele dealungul cărora razele principale de curbură satisfac relaţia

$$R_1^2 + R_2^2 = 1.$$

Să se arate că elementul linear al unei astfel de suprafeţe este:

$$ds^2 = \frac{1}{\sin\omega - \cos\omega}(e^{\omega}\sin^2\omega \cdot du^2 + e^{-\omega}\cos^2\omega \cdot dv^2),$$

în care ω satisface la ecuaţia cu derivate parţiale:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} + \sec\omega \cdot \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2\right] + \operatorname{tg}\omega - 1 = 0.$$

EUGEN CRĂCIUNESCU.

ERATĂ. Problema a doua dela pag. 142 are numărul 6546, iar nu 6646.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Deleanu I. Aristide (6105, 286, 394, 424); *Deutsch Emeric* (6417, 29, 61, 80, 5, 524, E); *Dodu A. E.* (P); *Florescu B. I.* (N, P); *Gloden A.* (N); *Hangan M. Th.* (6201, 65); *Ionescu-Bujor C. Claudiu* (6413, 504); *Moraite Gh. Al.* (6201, 535); *Popa D. M.* (A); *Schlomiuk H. Norbert* (6416); *Soare V. M.* (6546, P); *Tălmaciu Marioara* (6511, 27, C); *Teleman Kostake* (4647, 894, 5129, 6314, 33, 40, 6, 50, 8, 86, 98, 402, 13, 8, 9, 37, 69, 80, P); *Teleman Silviu* (6350, 78, 412, 3, 8, 22, 6, 61, 71, 94, 5, 511, 57, 9).

Orariul Bibliotecilor Gazeta Matematică

Sălile de bibliotecă sunt deschise după următorul orariu:

Localul din Calea Griviţei Nr. 158: In fiecare zi de lucru dela 8 la 12 şi Miercurea dela 16 la 20.

Casa „I. Ionescu" din Str. Răsuri Nr. 25: Luni şi Vineri dela 8 la 10, Marţi şi Miercuri dela 16 la 20.

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de geometrie, a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ"

Vol. I—III, V—X, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . Lei 230

XXIV. **A. G. Ioachimescu**, *Mecanica raţională*, Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.270

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a).

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice.*

„GAZETA MATEMATICĂ" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII" al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele şi ori-ce sume se pot trimite la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 14.211.

LICEUL „GH. LAZĂR" SIBIU

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. 8872

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIV

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1949

SUMARUL

1. Ecuaţii cu rădăcini complementare faţă de unitate . . . . . *Gh. D. Simionescu*
2. Proprietăţi ale patrulaterului în legătură cu unele curbe înscrise . . . . . *Mihail I. Focşeneanu*
3. Note matematice: 16—17.
4. Chestiuni de exemen.
5. Biblio grafie.
6. Diverse.
7. Probleme rezolvate: 3627, 3768, 4373, 4690, 4729, 4788, 4866, 5129, 5227, 5294, 5456, 5887.
8. Probleme propuse: 6586—6600.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALA
1949

9678

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa „*Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie, compusă în prezent din d-nii: **G. G. Constantinescu,** Doctor în Matematici; **C. C. Teodorescu,** Inginer, Profesor la Politehnica Bucureşti; **Gr. Zapan,** Inginer, (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. „*Gazeta Matematică*":
Luni 7 Martie ora 17^{30}, facerea copertei pentru Nr. 7.
Luni 21 Martie ora 17^{30}, adunarea materiei pentru Nr. 8.

Nu se primesc articole, note, cereri, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.
Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care fac parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Septembrie 1948 sunt indicate în tabla de materii a volumului LIII.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cursul mediu şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

LICEUL „GH. LAZĂR" SIBIU

ECUAȚII CU RĂDĂCINI COMPLEMENTARE FAȚĂ DE UNITATE [1]

1°. Prin analogie cu ecuațiile reciproce, am propus la concursul *Gazetei Matematice* din 1948, să se studieze ecuația de gradul VI ale cărei rădăcini au, două câte două, suma egală cu 1.

Astfel de ecuații, care dacă admit o rădăcină a, admit și rădăcina complementară față de unitate $1-a$, prezintă proprietăți asemănătoare cu acelea ale ecuațiilor reciproce, dar nu au, ca acestea din urmă, o formă ușor de recunoscut. De aceea probabil că nu au trezit un interes prea mare și nu le-am văzut studiate în chip special. Totuși o cercetare mai atentă poate da la iveală unele particularități interesante în legătură cu aceste ecuații.

2°. Fie $f(x)=0$ o ecuație cu rădăcinile două câte două complementare față de unitate. Dacă ecuația este de grad *fără soț*, rădăcinile complementare se grupează în perechi, dar rămâne una stingheră a. Ecuația trebue să admită însă și rădăcina complementară $1-a$, care nu poate fi diferită de a, căci atunci ecuația ar fi de grad par.

Rezultă că $a=1-a$ sau $a=\frac{1}{2}$. Deci: *orice ecuație de grad impar, cu rădăcinile complementare față de unitate, admite rădăcina* $\frac{1}{2}$.

Atunci putem împărți pe $f(x)$ cu $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ sau $(2x-1)$ și rezolvarea unei astfel de ecuații se reduce la aceea a unei ecuații de *grad par*, cu o unitate mai mic. Prin urmare întreg studiul asupra acestei clase de ecuații se poate face numai asupra ecuațiilor de grad par.

3°. Fie

$$f(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\ldots+a_{2n}=0 \qquad (1)$$

1) Comunicare făcută la Societatea de Matematici în ziua de 22 Noembrie 1948.

ecuația generală de gradul $2n$, după ce am împărțit cu primul coeficient. Transformata sa în $1-x$ este

$$f(1-x)\equiv f(1)-\frac{x}{1}f'(1)+\frac{x^2}{2!}f''(1)-\frac{x^3}{3!}f'''(1)+\ldots \\ \ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}f^{(2n)}(1)=0. \tag{2}$$

Atât în (1) cât și în (2) x^{2n} are coeficientul $+1$. Prin urmare, dacă $f(x)=0$ are rădăcinile complementare perechi față de 1, atunci (1) și (2) trebue să aibă aceleași rădăcini, iar polinoamele $f(x)$ și $f(1-x)$ *trebue să fie identice.*

4°. *Forma ecuațiilor care admit rădăcini complementare.* Din condițiile inițiale:

$$x_1+x_2=x_3+x_4=\ldots=x_{2n-1}+x_{2n}=1 \tag{3}$$

și din $\Sigma x_i=-a_1$, rezultă $a_1=-n$.

Ecuația de gr. II este evident $x^2-x+\alpha=0$.

Pentru ecuația de gr. IV, fie că se identifică $f_4(x)$ cu $f_4(1-x)$, fie că se folosesc relațiile între rădăcini și coeficienți, dacă se notează $a_2=\alpha$ și $a_4=\beta$, se găsește

$$x^4-2x^3+\alpha x^2+(1-\alpha)x+\beta=0 \tag{4}$$

care se mai poate scrie sub forma

$$x^4-2x^3+x+\alpha(x^2-x)+\beta=0. \tag{4'}$$

Forma ecuației de gr. VI se capătă identificând (1) cu (2) pentru $2n=6$. Dacă se pune $a_2=\alpha$; $a_4=\beta$; $a_6=\gamma$, atunci se găsește:

$$x^6-3x^5+\alpha x^4+(5-2\alpha)x^3+\beta x^2+(\alpha-\beta-3)x+\gamma=0 \tag{5}$$

sau

$$x^6-3x^5+5x^3-3x+\alpha(x^4-2x^3+x)+\beta(x^2-x)+\gamma=0. \tag{5'}$$

Tot astfel pentru ecuația de gr. VIII se găsește:

$$x^8-4x^7+\alpha x^6+(14-3\alpha)x^5+\beta x^4+(5\alpha-2\beta-28)x^3 \\ +\gamma x^2+(17-3\alpha+\beta-\gamma)x+\delta=0 \tag{6}$$

sau

$$x^8-4x^7+14x^5-28x^3+17x+\alpha(x^6-3x^5+5x^3-3x) \\ +\beta(x^4-2x^3+x)+\gamma(x^2-x)+\delta=0. \tag{6'}$$

Se observă că dacă notăm polinoamele:

$P_2 \equiv x^2 - x$; $P_4 \equiv x^4 - 2x^3 + x$; $P_6 \equiv x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x$; $P_8 \equiv x^8 - 4x^7 + 14x^5 - 28x^3 + 17x$ etc., atunci *orice ecuație de grad par, cu rădăcini complementare față de unitate*, se poate exprima liniar cu ajutorul polinoamelor P_2, P_4, P_6 ... etc. Astfel ecuația cea mai generală de gr. 10 va fi:

$$P_{10} + \alpha P_8 + \beta P_6 + \gamma P_4 + \delta P_2 + \varepsilon = 0.$$

Vom numi P_2, P_4, $P_6 \ldots P_{2n}$ *polinoame primitive*. Ele au numai primul termen de grad par, ceilalți fiind termeni de grad impar; deci termen liber nu au.

Cunoscând *polinoamele primitive* putem alcătui imediat ecuația cu rădăcini complementare față de 1, care ne interesează.

5⁰. *Determinarea polinoamelor primitive.* Orice polinom primitiv, egalat cu *zero*, formează o ecuație cu rădăcini complementare față de unitate. In adevăr acestea se capătă din (4'), (5') și (6') dând tuturor parametrilor α, β, γ etc. valoarea *zero*, deci sunt cazuri particulare ale acelor ecuații. Reciproc, dacă determinăm polinoamele primitive cu condiția de a avea rădăcinile complementare față de unitate, orice combinație liniară între aceste polinoame se bucură de aceiași proprietate, deoarece transformata în $1-x$ lasă polinoamele neschimbate.

Orice polinom primitiv admite rădăcina $x=0$, deci și $x=1$.

Să notăm în general

$$P_{2n}(x) \equiv x^{2n} - nx^{2n-1} + \alpha_3 x^{2n-3} + \alpha_5 x^{2n-5} + \ldots + \alpha_{2n-1} x. \quad (7)$$

Pentru a determina coeficienții α_3, α_5 etc, vom porni dela relația:

$$P_{2n}(x) \equiv P_{2n}(1-x) \equiv P_{2n}(1) - \frac{x}{1} P'_{2n}(1) + \frac{x^2}{2!} P''_{2n}(1) - \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} P^{(2n)}_{2n}. \quad (1)$$

In desvoltarea lui $P_{2n}(1-x)$ nu trebue să existe termeni de grad par afară de x^{2n}, deci:

$$P_{2n}(1) = P''_{2n}(1) = P^{IV}_{2n}(1) = \ldots = P^{(2n-2)}_{2n}(1) = 0. \quad (8)$$

Ultima derivată se anulează de la sine, datorită faptului că am determinat pe $\alpha_1 = -n$ pe altă cale.

Derivata de ordin $(2n-4)$ ne dă, A_m^k fiind simbolul aranjamentelor:

$$P_{2n}^{(2n-4)}(1) = A_{2n}^{2n-4} - nA_{2n-1}^{2n-4} + \alpha_3 A_{2n-3}^{2n-4} = 0$$

sau, împărțind cu produsul $(2n-3)(2n-4)\ldots 6.5$, găsim

$$\alpha_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{2.3.4} = \frac{1}{4} C_{2n}^3.$$

Inlocuim această valoare a lui α_3 în

$$P_{2n}^{(2n-6)}(1) = A_{2n}^{2n-6} - nA_{2n-1}^{2n-6} + \alpha_3 A_{2n-3}^{2n-6} + \alpha_5 A_{2n-5}^{2n-6} = 0$$

și găsim

$$\alpha_5 = -\frac{1}{2} C_{2n}^5.$$

Analog se obține: $\alpha_7 = \frac{17}{8} C_{2n}^7$; $\alpha_9 = -\frac{31}{2} C_{2n}^9$ etc.

Să demonstrăm că în general coeficientul α_{2p-1} este dat de $\alpha_{2p-1} = \lambda_{2p-1} C_{2n}^{2p-1}$, în care λ_{2p-1} este un *coeficient numeric*, ce depinde numai de *rangul său* în polinom și *nu* de gradul polinomului. Pentru aceasta observăm că derivata de ordin $(2n-2p)$ ne dă:

$$A_{2n}^{2n-2p} - n A_{2n-1}^{2n-2p} + \alpha_3 A_{2n-3}^{2n-2p} + \alpha_5 A_{2n-5}^{2n-2p} + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_{2p-1} A_{2n-2p+1}^{2n-2p} = 0;$$

însă $A_{2n}^{2n-2p} - n A_{2n-1}^{2n-2p} = (1-p) A_{2n}^{2n-2p}$, încât obținem:

$$\alpha_3 A_{2n-3}^{2n-2p} + \alpha_5 A_{2n-3}^{2n-2p} + \ldots \alpha_{2p-1} A_{2n-2p+1}^{2n-2p} = (p-1) A_{2n}^{2n-2p} \quad (9)$$

Dând lui p diferite valori căpătăm sistemul:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_3 A_{2n-3}^{2n-4} = A_{2n}^{2n-4} \\ &\alpha_3 A_{2n-3}^{2n-6} + \alpha_5 A_{2n-5}^{2n-6} = 2 A_{2n}^{2n-6} \\ &\alpha_3 A_{2n-3}^{2n-2p} + \alpha_5 A_{2n-5}^{2n-6} + \ldots + \alpha_{2p-1} A_{2n-2p+1}^{2n-2p} = (p-1) A_{2n}^{2n-2p} \end{aligned}\right\} (10)$$

Deducem, conform regulei lui CRAMER:

$$\alpha_{2p-1} = \frac{D_{2p-1}}{D}, \text{ în care} \tag{11}$$

$$D = \begin{vmatrix} A_{2n-3}^{2n-4} & 0 & 0 \ldots 0 \\ A_{2n-3}^{2n-6} & A_{2n-5}^{2n-6} & \ldots . 0 \\ \vdots & \vdots & \\ A_{2n-3}^{2n-2p} & A_{2n-5}^{2n-2p} & \ldots A_{2n-2p+1}^{2n-2p} \end{vmatrix} = (2n-3)!\,(2n-5)! \ldots (2n-2p+1)!$$

și

$$D_{2p-1} = \begin{vmatrix} A_{2n-3}^{2n-4} & 0 & 0 \ldots \ldots A_{2n}^{2n-4} \\ A_{2n-3}^{2n-6} & A_{2n-5}^{2n-6} & 0 \ldots \ldots 2\,A_{2n}^{2n-6} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{2n-3}^{2n-2p} & A_{2n-5}^{2n-2p} & A_{2n-7}^{2n-2p} \ldots \ldots (p-1)\,A_{2n}^{2n-2p} \end{vmatrix}$$

Ne oprim asupra acestui determinant. Scoatem factor pe prima coloană $(2n-3)!$, pe a doua coloană $(2n-5)!\ldots$ și pe ultima coloană $(2n)!$ Căpătăm:

$$D_{2p-1} = (2n-3)!\,(2n-5)! \ldots (2n-2p-1)!\,(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 0 & 0 \ldots 0 & \frac{1}{4!} \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{1!} & 0 \ldots 0 & \frac{2}{6!} \\ \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & \ldots 0 & \frac{3}{8!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(2p-3)!} & \frac{1}{(2p-5)!} & \ldots \frac{1}{3!} & \frac{p-1}{(2p)!} \end{vmatrix}$$

Dacă se înmulțește linia I-a cu $4!$, linia II-a cu $6!$ etc, apoi se împarte coloana I-a cu $3!$ coloana II-a cu $5!$ etc, se obține:

$$D_{2p-1} = (2n)!(2n-3)!(2n-5)! \ldots (2n-2p-1)! \frac{3!\,5! \ldots (2p-3)!}{4!\,6! \ldots (2p)!} \begin{vmatrix} C_4^3 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ C_6^3 & C_6^5 & 0 \ldots 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{2p}^3 & C_{2p}^5 & C_{2p}^7 \ldots C_{2p}^{2p-3} & p-1 \end{vmatrix}$$

Să notăm acest ultim determinant cu Δ_{2p-1}. Atunci:

$$\alpha_{2p-1} = \frac{D_{2p-1}}{D} = \frac{(2n)!}{(2n-2p+1)!} \cdot \frac{1}{(2p)!\,4.6.8\ldots(2p-2)} \cdot \Delta_{2p-1}$$

$$\therefore \quad \alpha_{2p-1} = C_{2n}^{2p-1} \cdot \frac{\Delta_{2p-1}}{p!\,2^{p-1}} = \lambda_{2p-1}\, C_{2n}^{2p-1},$$

în care $$\lambda_{2p-1} = \frac{\Delta_{2p-1}}{p!\,2^{p-1}} \cdot \quad \text{q. e. d.} \qquad (12)$$

Ne propunem acum să găsim o relație de recurență între coeficienții λ_t, care să ne îngădue să calculăm valoarea lor mult mai repede decât cu ajutorul sistemului (10), însă tot din aproape în aproape. Pentru aceasta să reluăm determinantul

$$\Delta_{2p-1} = \begin{vmatrix} C_4^3 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ C_6^3 & C_6^5 & \ldots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{2p-2}^3 & C_{2p-2}^5 & \ldots & C_{2p-2}^{2p-3} & p-3 \\ C_{2p}^3 & C_{2p}^5 & \ldots & C_{2p}^{2p-3} & p-1 \end{vmatrix}$$

care desvoltat după penultima coloană este:

$$\Delta_{2p-1} = C_{2p-2}^{2p-3} \begin{vmatrix} C_4^3 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ C_6^3 & C_6^5 & \ldots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{2p-4}^3 & C_{2p-4}^5 & \ldots & C_{2p-4}^{2p-5} & p-3 \\ C_{2p}^3 & C_{2p}^5 & \ldots & C_{2p}^{2p-5} & p-1 \end{vmatrix} - C_{2p}^{2p-3}\, \Delta_{2p-3}.$$

Desvoltând și determinantul acesta după penultima coloană avem:

$$\Delta_{2p-1} = C_{2p-2}^{2p-3} C_{2p-4}^{2p-5} \begin{vmatrix} C_4^3 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ C_6^3 & C_6^5 & \ldots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{2p-6}^3 & C_{2p-6}^5 & \ldots & C_{2p-6}^{2p-7} & p-4 \\ C_{2p}^3 & C_{2p}^5 & & C_{2p}^{2p-7} & p-1 \end{vmatrix} - C_{2p-2}^{2p-3}\, C_{2p}^{2p-5} \Delta_{2p-5} - C_{2p}^{2p-3}\, \Delta_{2p-3}.$$

Observând că avem $C_{2p-2}^{2p-3} = 2(p-1)$; $C_{2p-4}^{2p-5} = 2(p-2)$ etc. găsim că se poate scrie:

$$\Delta_{2p-1} = (p-1)!\ 2^{p-2}(p-1) - 2^{p-3}(p-1)(p-2)\ldots$$

$$\ldots 3 \cdot C_{2p}^{3}\ \Delta_3 - 2^{p-4}(p-1)(p-2)\ldots 4 \cdot C_{2p}^{5}\ \Delta_5 \ldots - C_{2p}^{2p-3}\ \Delta_{2p-3}.$$

Dacă introducem această desvoltare a lui Δ_{2p-1} în (12) găsim

$$\lambda_{2p-1} = \frac{1}{2p}\left[p - 1 - \frac{\Delta_3}{2!2} C_{2p}^{3} - \frac{\Delta_5}{3!2^2} C_{2p}^{5} - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \frac{\Delta_{2p-3}}{(p-1)!2^{p-2}} C_{2p}^{2p-3}\right]$$

sau dând în (12) lui p diferite valori, deducem:

$$2p \cdot \lambda_{2p-1} = p - 1 - \lambda_3\ C_{2p}^{3} - \lambda_5\ C_{2p}^{5} - \ldots - \lambda_{2p-3}\ C_{2p}^{2p-3}.$$

Dacă punem $p = -C_{2p}^{1}\lambda_1$ $\left(\lambda_1 = -\frac{1}{2}\right.$ calculat direct$\left.\right)$ și $2p = C_{2p}^{2p-1}$, atunci trecând toți termenii în partea I-a, relația de mai sus devine:

$$\boxed{1 + C_{2p}^{1}\lambda_1 + C_{2p}^{3}\lambda_3 + C_{2p}^{5}\lambda_5 + \ldots + C_{2p}^{2p-1}\lambda_{2p-1} = 0} \quad (13)$$

Aici gradul polinomului nu mai intervine nici măcar aparent ca în sistemul (10) și aceasta îngădue calculul efectiv al coeficienților λ_i cu mult mai repede.

Dând lui p valorile 1, 2, 3 etc. se regăsesc valorile lui λ_1, λ_2, λ_3... determinate mai înainte.

Forma generală a unui polinom primitiv este deci:

$$P_{2n}(x) \equiv x^{2n} + \lambda_1 C_{2n}^{1} x^{2n-1} + \lambda_3 C_{2n}^{3} x^{2n-3} + \lambda_5 C_{2n}^{5} x^{2n-5} + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_{2n-1} C_{2n}^{2n-1} x. \quad (14)$$

Exemplu: $P_{10} = x^{10} - 5x^9 + 30x^7 - 126x^5 + 255x^3 - 155x$.

6° *Rezolvanta unei ecuații cu rădăcini complementare față de unitate.*

Din condițiile inițiale (3) deducem că polinomul $f_{2n}(x)$ admite o descompunere în factori de forma:

$$f_{2n}(x) \equiv (x^2 - x + k_1)(x^2 - x + k_2)\ldots(x^2 - x + k_n). \quad (15)$$

Aceasta sugerează imediat substituția $x^2 - x = y$, care va da o transformată în y de gradul n, adică pe jumătate față de gradul ecuației inițiale. Transformata se poate calcula dela caz la caz, dar este interesant de încercat găsirea unei expresii generale.

Observare. Forma (15) sub care se prezintă polinomul $f_{2i}(x)$ arată că derivata va avea ca factor comun pe $(2x-1)$, deci oricare ar fi gradul $2n$ al polinomului, derivata f_{2n} admite rădăcina $x = \frac{1}{2}$.

7°. *Calculul lui x^{2n} rezultat din substituția $x^2-x=y$.* Avem:

$$x^2 = x + y \quad ; \quad x^4 = (2y+1)x + y^2 + y \; ;$$

$$x^6 = x^4 \cdot x^2 = (3y^2 + 4y + 1)x + y^3 + 3y^2 + y \; ;$$

$$x^8 = x^6 \cdot x^2 = (4y^3 + 10y^2 + 6y + 1)x + y^4 + 6y^3 + 5y^2 + y \text{ etc.}$$

Se observă că x^{2n} se poate scrie în general

$$x^{2n} = x \cdot Q_{n-1}(y) + R_n(y) \qquad (16)$$

unde Q_{n-1} și R_n sunt polinoame în y, respectiv de grad $(n-1)$ și n. Deducem:

$$x^{2n+2} = x^{2n} \cdot x^2 = x\,[(y+1)\,Q_{n-1} + R_n] + y\,(Q_{n-1} + R_n).$$

Dacă însă în (16) înlocuim n cu $n+1$ rezultă:

$$x^{2n+2} = x \cdot Q_n(y) + R_{n+1}(y).$$

Din compararea celor două expresii ale lui x^{2n+2} se vede că avem:

$$Q_n = (y+1)\,Q_{n-1} + R_n \quad ; \quad R_{n+1} = y\,(R_n + Q_{n-1}). \qquad (17)$$

Eliminând pe R_n găsim $R_{n+1} = y\,(Q_n - y\,Q_{n-1})$, însă dacă în prima relație din (17) înlocuim pe n prin $n+1$ rezultă $R_{n+1} = Q_{n+1} - (y+1)\,Q_n$. Din egalarea acestor două expresii ale lui R_{n+1} obținem relația de recurență între polinoamele Q_i:

$$Q_{n+1} - (2y+1)\,Q_n + y^2\,Q_{n-1} = 0. \qquad (18)$$

Un procedeu asemănător ne conduce la relația de recurență între polinoamele R_i:

$$R_{n+1} - (2y+1)\,R_n + y^2\,R_{n-1} = 0. \qquad (18')$$

Din (18) și (18') desprindem că polinoamele Q_i și R_i sunt soluții ale aceleiași relații de recurență:

$$Y_{n+1} - (2y+1)\,Y_n + y^2\,Y_{n-1} = 0 \qquad (19)$$

unde Y_i reprezintă un polinom în y. Deosebirea între ele provine de la polinoamele inițiale:

$$Q_1 = 2y + 1 \quad ; \quad Q_2 = 3y^2 + 4y + 1 \quad \text{iar} \quad R_1 = y \quad ; \quad R_2 = y^2 + y.$$

Pentru cazul care ne interesează în problema noastră am găsit:

$$\left.\begin{aligned} Q_{n-1} &= C_n^1\, y^{n-1} + C_{n+1}^3\, y^{n-2} + C_{n+2}^5\, y^{n-3} + \ldots + C_{2n-1}^{2n-1} \\ R_n &= y^n + C_n^2\, y^{n-1} + C_{n+1}^4\, y^{n-2} + C_{n+2}^6\, y^{n-3} + \ldots + C_{2\,(n-1)}^{2\,(n-1)}\, y \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Să observăm acum că putem pune pe $P_{2n}(x)$ sub forma:

$$P_{2n}(x) \equiv x^{2n} + \lambda_1 C_n^1 x^{2n-1} + \lambda_3 C_{2n}^3 x^{2n-3} + \ldots \equiv x\, Q_{n-1}(y) +$$
$$+ R_n(y) + x[\lambda_1 C_n^1 (x Q_{n-2} + R_{n-1}) + \lambda_3 C_n^3 (x Q_{n-3} + R_{n-2}) + \ldots]$$

sau, grupând termenii și înlocuind $x^2 = x + y$:

$$P_{2n} \equiv x\, Q_{n-1} + R_n + (x + y)(\lambda_1 C_{2n}^1 Q_{n-2} + \lambda_3 C_n^3 Q_{n-3} + \ldots) +$$
$$+ x(\lambda_1 C_n^1 R_{n-1} + \lambda_3 C_n^3 R_{n-2} + \ldots).$$

Să notăm cu $T_n(y)$ transformata lui $P_{2n}(x)$ prin substituția $x^2 - x = y$. Așa cum arată (15) transformata lui P_{2n} nu mai conține termeni în x și devine $T_n(y)$, adică termenii în x se anulează reciproc. Rezultă:

$$T_n(y) \equiv R_n + y(\lambda_1 C_{2n}^1 Q_{n-2} + \lambda_3 C_n^3 Q_{n-3} + \ldots)$$

sau

$$T_n(y) \equiv y^n + C_n^2 y^{n-1} + C_{n+1}^4 y^{n-2} + \ldots + C_{2(n-1)}^{2(n-1)} y +$$
$$+ y(\lambda_1 C_n^1 Q_{n-2} + \lambda_3 C_{2n}^3 Q_{n-3} + \ldots + \lambda_{2p+1} C_{2n}^{2p+1} Q_{n-p-1}) \quad (21)$$

8°. *Cazuri particulare.* Pentru $n = 2$ găsim $P_4 \to T_2 = y^2 + y - 2y = y^2 - y$, încât rezolvanta ecuației de gr. IV

$$P_4 + \alpha P_2 + \beta = 0$$

este $y^2 - y + \alpha y + \beta = 0$ sau $y^2 + (\alpha - 1)y + \beta = 0$.

Pentru $n = 3$ rezultă $P_6 \to T_3 \equiv y^3 - 3y^2 + 3y$ și rezolvanta ecuației de gr. VI: $P_6 + \alpha P_4 + \beta P_2 + \gamma = 0$

este $y^3 - 3y^2 + 3y + \alpha(y^2 - y) + \beta y + \gamma = 0$

sau $y^3 + (\alpha - 3)y^2 + (\beta - \alpha + 3)y + \gamma = 0.$

Aceasta este ecuația rezolvantă ce s'a cerut la concurs.

GH. D. SIMIONESCU.

PROPRIETĂȚI ALE PATRULATERULUI IN LEGĂTURĂ CU UNELE CURBE INSCRISE

Să considerăm un patrulater ABCA'B'C' în care vom avea:

$OO_AO_BO_CM$ *cercul lui* MIQUEL cu centrul în O_M;

$HH_AH_BH_C$ *dreapta ortocentrelor* triunghiurilor formate de câte 3 din laturi;

(NG) *dreapta* NEWTON-GAUSS care unește mijoacele diagonalelor AA', BB', CC';

ψ *anticentrul* patrulaterului inscriptibil $OO_AO_BO_C$, iar h, h_A, h_B, h_C ortocentrele triunghiurilor formate de câte 3 din vârfurile patrupunctului $OO_AO_BO_C$;

$\Delta, \Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ *dreptele* SIMSON ale vârfurilor lui $OO_AO_BO_C$ față de triunghiurile formate de câte 3 din ele;

Ω *centrul cercului tritangent hipocicloidei* cu 3 puncte de întoarcere înscrisă în patrulaterul ABCA'B'C'.

Vom studia *câteva proprietăți ale patrulaterului.*

1°. A LABROUSSE[1] studiind curbele unicursale ce au ariile raționale, găsește în cadrul unor aplicațiuni, câteva proprietăți ale hipocicloidelor cu 3 puncte de întoarcere înscrise într'un triunghiu T.

a) Hipocicloidele formează un *fascicol linear tangențial.*

b) *Locul punctelor de întoarcere* ale acestora este o cubică unicursală (Γ), care are ca tangente inflexionale laturile lui T, iar ca punct dublu punctul K ale cărui distanțe la laturile lui T sunt invers proporționale cu cuburile laturilor lui T. Dreapta punctelor de inflexiune este polara lui K față de T.

c) *Locul punctului* ω, centrul cercului tritangent hipocicloidei este *o dreaptă* paralelă cu dreapta punctelor de inflexiune.

Mai întâi câteva observațiuni asupra punctelor K și ω.

Se observă că punctul K are drept coordonate baricentrice $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ și este deci *punctul lui* LONGCHAMPS al triunghiului T.

Punctele de inflexiune ale cubicei (Γ) *sunt deci pe dreapta lui* LONGCHAMPS *a lui* T, *care este perpendiculară pe dreapta* EULER O H.

---

1) A. LABROUSSE: Sur les courbes unicursales ayant leurs aires rationnelles. Revue de mathématiques spéciales — Noembrie 1927 pag. 1—4 și 33—35.

Punctul ω fiind centrul cercului EULER al lui T este mijlocul segmentului $\overline{OH}$. Urmează deci proprietatea:

Locul punctului ω, *centrul cercului tritangent hipocicloidei înscrise într'un triunghiu* T *este perpendiculara pe mijlocul lui* OH.

Am regăsit rezultatul D-lui R. BOUVAIST [1] găsit în 1928 pe cale analitică directă.

2°. Să revenim la patrulaterul ABCA'B'C'. Cele 4 fascicole lineare tangențiale înscrise în triunghiurile formate de câte 3 din laturi, au centrele lor pe perpendicularele în mijloacele segmentelor $\overline{OH}$, $\overline{O_AH_A}$, $\overline{O_BH_B}$, $\overline{O_CH_C}$.

Cele 4 fascicole au însă o hipocicloidă comună, cu centrul în Ω, înscrisă în patrulaterul dat. Urmează deci proprietatea [2]:

Perpendicularele pe mijloacele segmentelor $\overline{OH}$, $\overline{O_AH_A}$, $\overline{O_BH_B}$, $\overline{O_CH_C}$ *concură în centrul* Ω *al hipocicloidei înscrisă în patrulaterul* ABC A'B'C', găsită de D-l Prof. D. BARBILIAN pe cale geometrică în parte și analitică.

3°. Câteva observațiuni pentru patrulater.

a) Să considerăm patrulaterele formate din câte 3 laturi ale patrulaterului considerat și reciproca celei de-a 4-a latură față de triunghiul celor 3 laturi.

Se știe că 2 hipocicloide ale aceluiași fascicol, care au centrele lor simetrice față de OH sunt egale și simetrice față de această dreaptă.

Aceste hipocicloide admit perechi de tangente izotomice față de triunghiul circumscris. Rezultă atunci că:

Hipocicloidele înscrise în triunghiurile formate de trei din laturi și de reciproca celei de-a 4-a în raport de acel triunghiu, sunt simetrice și egale hipocicloidei înscrisă în ABC A'B'C', *centrele lor fiind simetricele lui* Ω *față de dreptele* EULER *ale triunghiurilor respective.*

b) Considerând hipocicloida STEINER în fiecare din triunghiurile de mai sus, (înfășurătoarea dreptelor SIMSON ale punctelor

1) R. BOUVAIST: Sur quelques propriétés de l'hypocicloïde à trois rebroussements. Mathésis 1928 pag. 244.

2) D. BARBILIAN: Ein Rekursionstheorem über die Vielecke. Mathematica vol. II pag. 124 — 133 — 1929.

D. BARBILIAN: Două proprietăți ale patrulaterului — Gazeta Matematică 1929 pag. 285 — 287.

de pe cercul circumscris triunghiului) ea are centrul în ω chiar pe OH şi coincide cu hipocicloida înscrisă în acelaşi triunghiu şi tangentă reciprocei dreptei SIMSON.

Urmează deci că *reciproca unei drepte* SIMSON *este tot dreaptă* SIMSON *în acelaş triunghiu, cele* 2 *drepte* SIMSON *făcând între ele un unghiu drept.* (Problema Nr. 3518 — rezolvată în G. M. pag. 66 vol. XXXIV).

4°. Se cunosc proprietăţile *anticentrului* unui patrulater inscriptibil [1]

— este punctul de întâlnire al perpendicularelor duse din mijloacele laturilor şi diagonalelor pe latura (diagonala) opusă;

— se află pe dreapta NEWTON-GAUSS a unuia din patrulaterele ce admit vârfurile patrulaterului inscriptibil, ca centre ale cercurilor circumscrise triunghiurilor formate cu câte 3 din laturile proprli;

— este la intersecţia dreptelor SIMSON ale unuia din vârfuri în raport de triunghiul format de celelalte 3;

— este punctul comun al cercurilor EULER ale triunghiurilor formate din câte 3 dintre vârfuri.

Vreau să dau o demonstraţie care permite unele completări.

Punctul ψ (anticentrul) este centrul hiperbolei echilatere circumscrisă patrupunctului $O\,O_A O_B O_C$ şi evident este la intersecţia cercurilor EULER ale triunghiurilor t_i în care se descompune acesta.

Hiperbola circumscrisă lui $OO_A O_B O_C$ aparţine celor 4 fascicole circumscrise triunghiurilor t_i şi centrul său se află evident pe asimptotele fiecărui fascicol.

Una din asimptotele fiecăruia din fascicole este tangenta la vârf a parabolei înscrisă în t_i, adică *dreapta* SIMSON *a celui de-al 4-lea vârf faţă de* t_i.

Cele 4 *drepte* SIMSON $\Delta, \Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ *trec toate prin* ψ, *centrul* hiperbolei echilatere circumscrise lui $O\,O_A O_B O_C$, care va fi pe dreapta NEWTON-GAUSS a lui ABC A'B'C'.

Dacă luăm acum dreptele SIMSON a 2 vârfuri alăturate şi ducem prin vârfurile opuse respective, paralele la acestea, cele 2 paralele se taie pe mediana laturei formate de cele 2 vârfuri opuse.

Una din bisectoarele unghiului format de cele 2 paralele la dreptele SIMSON *este deci perpendiculară pe latura opusă vârfurilor iniţiale.*

---

1) G. ŢIŢEICA: Culegere de probleme de geometrie 1929 pag. 27.

Spre ex. dreapta SIMSON Δ a lui O față de $O_AO_BO_C$ și dreapta SIMSON Δ_A a lui O_A față de OO_BO_C. Paralela din O_C la Δ se tae cu paralela din O_B la Δ_A în α pe mediatoarea laturei O_BO_C. Cum mediatoarea este una din bisectoarele lui (Δ', Δ'_A) format de paralele la Δ și Δ_A, rezultă că unghiul din ψ făcut de (Δ, Δ_A) are una din bisectoare perpendiculară pe O_BO_C.

5°. Fie acum $a\,b\,c\,d$ patrupunctul format de perpendicularele din O, O_A, O_B, O_C pe dreptele SIMSON respective $\Delta, \Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ și $a'\,b'\,c'\,d'$ patrupunctul format de simetricele punctelor a, b, c, d față de ψ.

Vârfurile a', b', c', d' se găsesc pe mediatoarele laturilor lui $O\,O_AO_BO_C$.

In adevăr anticentrul ψ *este centrul de simetrie al întregii configurații.*

In particular $h\,h_Ah_Bh_C$ și $O\,O_AO_BO_C$ sunt simetric egale [1]

In cercul $h_A\,O_B\,h\,O_C\,A'$ avem deci

$$\sphericalangle\, O_Bh_A\,a' = (\Delta_A, O\,O_C) = \sphericalangle\, h\,O_AO_C = \sphericalangle\, h\,O_BO_C = \sphericalangle\, h\,h_AO_C.$$

Dacă a_1 este punctul unde $h_A\,a'$ tae cercul $h_AO_B\,h\,O_C$, urmează că ha_1 este paralelă cu O_BO_C. In mod analog dacă a_2 este intersecția lui $a'h$ cu același cerc $h_A\,a_2$ este paralelă tot cu O_BO_C.

Punctul a' se găsește deci pe mediatoarea coardelor $a_1\,h$, O_BO_C și h_Aa_2. Simetricul său a se află pe mediatoarea lui h_Bh_C.

Bisectoarea lui $h_B\,a\,h_C$ este chiar mediatoarea lui h_Bh_C.

Urmează că *bisectoarele patrupunctului abcd concură în centrul cercului circumscris patrupunctului* $hh_Ah_Bh_C$.

Patrupunctul *abcd* este *circumscriptibil, centrul cercului înscris în el coincidând cu centrul cercului simetric al cercului lui* MIQUEL *față de anticentrul* ψ.

Rămâne să se mai arate că centrul cercului $h\,h_Ah_Bh_C$ coincide cu Ω.

Pentru aceasta este suficient să se observe că triunghiul $O_AO_BO_C$ este asemenea cu triunghiul $A_0B_0C_0$ simetricul lui ABC față de ψ și direct asemenea cu triunghiul median al acestuia $A_0^1B_0^1C_0^1$, polul fiind h.

---

1) V. THÉBAULT : Mathesis 1927 — 187 — 191 și 242 — 243 și G. M. 1946 — 391 — 392.

In aceste 2 ultime triunghiuri dreptele ce unesc puncte analoage sunt perpendiculare pe raza vectoare a punctului în triunghiul median $A_0^1 B_0^1 C_0^1$ şi deci perpendiculara pe mijlocul segmentului eulerian $\overline{hH_0}$ (H_0 simetricul lui H faţă de ψ) trece prin O_M.

Rezultă că O_M este centrul cercului tritangent, al hipocicloidei înscrisă în patrulaterul $A_0B_0C_0A_0'B_0'C_0'$ şi că Ω *este deasemenea centrul cercului* $hh_Ah_Bh_C$ [1].

Putem enunţa deci următoarea teoremă generală:

Axele parabolelor cu focarul în unul din vârfurile patrupunctului $O\,O_AO_BO_C$ *şi înscrise în triunghiurile formate de celelalte 3 vârfuri determină un patrupunct circumscriptibil unui cerc, concentric cu cercul tritangent hipocicloidei înscrisă în patrulaterul* ABC A'B'C'. *Centrul cercului tritangent hipocicloidei este simetricul centrului cercului lui* MIQUEL *al patrulaterului, faţă de anticentrul acestuia.*

6°. Inainte de a termina această parte este de observat că *patrulaterele* ABC A'B'C' *şi* $A_0B_0C\,A_0'B_0'C_0'$ *au aceeaşi dreaptă* NEWTON-GAUSS *şi dreptele* NEWTON-GAUSS *ale patrulaterelor formate din* 3 *laturi ale lui* $A_0B_0C_0\,A_0'B_0'C_0'$ *şi a 4-a latură a lui* ABC A'B'C' *trec toate prin* ψ.

La rândul lor *cubicele* (Γ) corespunzătoare celor 4 triunghiuri formate cu câte 3 din laturile patrulaterului ABC A'B'C' *se intersectează în 3 puncte comune* R_1, R_2, R_3 *care formează un triunghiu echilateral.*

In partea 2-a a articolului, se vor extinde câteva din aceste proprietăţi la poligoane.

MIHAIL I. FOCŞENEANU.

NOTE MATEMATICE

16. *Asupra unor ecuaţii diofantice.*

I. Să considerăm următoarea ecuaţie diofantică

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = u^3 + v^3 \qquad (1)$$

studiată în *American Mathematical Monthly, t. 55, 1948, p. 238—240.*

1) D. BARBILIAN: Art. citat din G. M. 1929 pag. 287.

Să punem în (1):

$$x = 1 + ak\ ,\ y = 1 + bk\ ,\ z = 1 + ck\ ,\ u = dk\ ,\ v = ek. \quad (2)$$

Calculele efectuate, deducem:

$$k = \frac{3(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2)}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - d^3 - e^3}.$$

Dacă înlocuim în (2), efectuăm operaţiile indicate şi simplificările, suprimăm apoi numitorul comun, deducem următoarele soluţii cu *cinci* parametri ale ecuaţiei (1):

$$x = (b + c)(b^2 + c^2 + 3a^2 - bc) - 3a(b^2 + c^2) - d^3 - e^3 - 2a^3,$$
$$y = (c + a)(c^2 + a^2 + 3b^2 - ca) - 3b(c^2 + a^2) - d^3 - e^3 - 2b^3,$$
$$z = (a + b)(a^2 + b^2 + 3c^2 - ab) - 3c(a^2 + b^2) - d^3 - e^3 - 2c^3,$$
$$u = 3d(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2),$$
$$v = 3e(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2).$$

Exemplu. Luând: $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$, $d = -2$, $e = -3$, avem identitatea:

$$26^3 + 44^3 + 35^3 - 3.26.44.35 = 18^3 + 27^3 \ (\equiv 25515).$$

II. Prin acelaşi procedeu putem trata ecuaţia:

$$\boxed{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = u^3 + v^3 + w^3.} \quad (3)$$

In adevăr să punem în (3):

$$x = 1 + ak,\ y = 1 + bk,\ z = 1 + ck,\ u = dk,\ v = ek,\ w = fk. \quad (4)$$

Efectuând calculele şi reducerile găsim:

$$k = \frac{3(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2)}{a^3 + b^3 + c^3 - d^3 - e^3 - f^3 - 3abc}.$$

Introducând această valoare în (4), făcând operaţiile indicate şi suprimând numitorul comun găsim următoarele soluţii cu *şase* parametri ale ecuaţiei (3):

$$x = (b + c)(b^2 + c^2 + 3a^2 - bc) - 3a(b^2 + c^2) - d^3 - e^3 - f^3 - 2a^3,$$
$$y = (c + a)(c^2 + a^2 + 3b^2 - ca) - 3b(c^2 + a^2) - d^3 - e^3 - f^3 - 2b^3,$$
$$z = (a + b)(a^2 + b^2 + 3c^2 - ab) - 3c(a^2 + b^2) - d^3 - e^3 - f^3 - 2c^3,$$
$$u = 3d(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2),$$
$$v = 3e(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2),$$
$$w = 3f(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2).$$

III. In mod identic se rezolvă şi ecuaţia următoare, mult mai generală:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=u_1^3+u_2^3+u_3^3+\ldots+u_k^3 \qquad (5)$$

Soluţiile sunt asemănătoare cu cele de mai sus.

IV. Să mai considerăm şi ecuaţia

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=u^3+v^3+w^3-3uvw \qquad (6)$$

Să facem următoarea substituţie

$$x=1+ak,\ y=1+bk,\ z=1+ck,\ u=1+dk,\ v=1+ek,\ w=1+fk. \qquad (7)$$

Introducând în (6), toate calculele şi reducerile fiind făcute, avem:

$$k=\frac{3(ab+ac+bc-de-df-ef-a^2-b^2-c^2+d^2+e^2+f^2)}{a^3+b^3+c^3-d^3-e^3-f^3-3abc+3def}$$

Această valoare pusă în (7), după facerea calculelor şi suprimarea numitorului, ne conduce la următoarele soluţii ale ecuaţiei (6), depinzând de *şase* parametri:

$$x=(b+c)(b^2+c^2+3a^2-bc)+3a(d^2+e^2+f^2-de-df-ef-b^2-c^2)$$
$$-d^3-e^3-f^3+3def-2a^3,$$

$$y=(c+a)(c^2+a^2+3b^2-ca)+3b(d^2+e^2+f^2-de-df-ef-c^2-a^2)$$
$$-d^3-e^3-f^3+3def-2b^3,$$

$$z=(a+b)(a^2+b^2+3c^2-ab)+3c(d^2+e^2+f^2-de-df-ef-a^2-b^2)$$
$$-d^3-e^3-f^3+3def-2c^3,$$

$$u=-(e+f)(e^2+f^2+3d^2-ef)+3d(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2+e^2+f^2)$$
$$+a^3+b^3+c^3-3abc+2d^3,$$

$$v=-(f+d)(f^2+d^2+3e^2-fd)+3e(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2+f^2+d^2)$$
$$+a^3+b^3+c^3-3abc+2e^3,$$

$$w=-(d+e)(d^2+e^2+3f^2-de)+3f(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2+d^2+e^2)$$
$$+a^3+b^3+c^3-3abc+2f^3.$$

Exemplu. Să luăm

$$a = 4 \ , \ b = 3 \ , \ c = 1 \ , \ d = 1 \ , \ e = 0 \ , \ f = 2.$$

Avem atunci:

$$x = -1 \ , \ y = 11 \ , \ z = 35 \ , \ u = 35 \ , \ v = 47 \ , \ w = 23.$$

$$(-1)^3 + 11^3 + 35^3 - 3(-1) \cdot 11 \cdot 35$$

$$= 35^3 + 47^3 + 23^3 - 3 \cdot 35 \cdot 47 \cdot 23 \ (\equiv 45360).$$

V. Prin acelaşi procedeu se poate soluţiona în numere întregi o ecuaţie de forma

$$\boxed{Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dxyz = u_1^3 + u_2^3 + \ldots + u_k^3} \qquad (8)$$

cu condiţia ca

$$A + B + C + D = 0. \qquad (9)$$

Deasemenea, tot prin acelaşi procedeu, putem trata şi următoarele forme de ecuaţii diofantice:

$$\boxed{Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dxyz = A_1u^3 + B_1v^3 + C_1w^3 + D_1uvw} \qquad (10)$$

cu condiţiile

$$A + B + C + D = 0 \ , \ A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 0, \qquad (11)$$

sau numai cu condiţia

$$A + B + C + D = A_1 + B_1 + C_1 + D_1. \qquad (12)$$

VI. Deasemenea se poate trata ecuaţia

$$\boxed{\begin{gathered} Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dt^3 + Exyz + Fyzt + Gztx + Htxy \\ = u_1^3 + u_2^3 + \ldots + u_k^3 \end{gathered}} \qquad (13)$$

cu următoarea condiţie

$$A + B + C + D + E + F + G + H = 0. \qquad (14)$$

VIRGIL CLAUDIAN.

17. *In legătură cu punctul lui* DUBESSET. In articolul „*Cea dintâi colaborare străină la Gazeta Matematică*", al d-lui Prof. DAN BARBILIAN, publicat în numărul festiv al *Gazetei*, involuţiile anallagmatice I_a, I_b, I_c sunt simetrii duble faţă de perechile de cercuri ale unui tetraciclu ortogonal.

Punctele α, β, γ, transformatele punctului dela ∞, sunt intersecţiile axelor radicale ale cercurilor tetraciclului luate câte două cu liniile centrelor lor.

Rezultă că aceste centre ale cercurilor tetraciclului coincid cu centrele cercurilor tritangente laturilor triunghiului $\alpha\beta\gamma$ şi aparţin unei clase de transivitate a grupului lui KLEIN I, I_a, I_b, I_c.

Să considerăm cazul particular când A, B, C, D sunt pe un cerc. Acest cerc aparţine tetraciclului şi centrul său este punctul H deoarece îndeplineşte condiţiile

$$\sphericalangle AHD = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD = 2 \sphericalangle ABD$$

şi analoagele.

Rezultă că E, F, G, H sunt centrele cercurilor tritangente ale triunghiului $\alpha\beta\gamma$ şi deci perechile de drepte (EH, FG); (FH, EG); (GH, EF) sunt perpendiculare şi se întâlnesc în α, β, γ.

In acest caz punctul R al lui DUBESSET coincide cu H, centrul cercului ABCD, ceea ce este evident, R_a, R_b, R_c coincid cu E, F, G.

Tot în acest caz involuţia I_a este simetrie dublă faţă de cercurile tetraciclului cu centrele în E şi H (cercul ABCD) şi deci punctele M, N unde o dreaptă care trece prin E taie cercul ABCD, se corespund în această involuţie.

Dacă M şi N sunt pe dreapta EH, pe care se află α, punctul lui MIQUEL al patrulaterului complet de vârfuri opuse (B, C) şi (A, D), care este deasemenea punctul central al involuţiei I_a, avem

$$\alpha A \times \alpha D = \alpha B \times \alpha C = \alpha M \times \alpha N = p_\alpha,$$

însemnând cu p_α puterea lui α faţă de cercul ABCD. Obţinem astfel rezultatul

$$\alpha A \times \alpha B \times \alpha C \times \alpha D = p_\alpha^2$$

care face obiectul problemei 6196, G. M., LI, Nr. 5.

Egalităţi analoage obţinem pentru β şi γ.

RĂDUCANU GEORGESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Universitatea din București. Facultatea de Matematici — Fizică

Sesiunea Octombrie 1948. Examen de admitere

1. Se consideră triunghiul echilateral ABC de latură 1. Prin punctul C' de pe latura AB, la distanța x de punctul B se duce paralela la AC care taie latura BC în punctul A'. Prin A' se duce paralela la AB care taie latura AC în B'.

a) Să se arate că ariile triunghiurilor A'BC', A'B'C', A'B'C sunt în progresie geometrică. Se va determina rația q a acestei progresii, în funcție de x.

b) Fie respectiv H, K, L punctele de întâlnire ale înălțimilor în triunghiurile ABC, A'BC' și A'B'C. Să se arate că figura A'LHK este un paralelogram. Să se calculeze aria acestui paralelogram în funcție de x; pentru ce valoare a lui x, paralelogramul are aria cea mai mare?

2. Se dă ecuația trigonometrică

$$(\lambda + \sqrt{3})\cos x + (\lambda - \sqrt{3})\sin x = 2\sqrt{2}$$

unde λ este un parametru arbitrar.

a) Să se determine λ, așa încât ecuația dată să aibă cele două soluții (atât în $\cos x$ cât și în $\sin x$), confundate.

b) Să se rezolve efectiv ecuația, pentru valorile lui λ, dela punctul *a)*.

3. Un corp greu este aruncat pe verticală, în sus, dela înălțimea de 200 m cu vitesa de 40 m/sec. Să se determine:

a) timpul de suire;

b) înălțimea la care ajunge;

c) timpul necesar pentru a cădea pe sol, dela acea înălțime, precum și vitesa de sosire pe sol.

Se va lua în calcule, accelerația gravității egală cu 10 m/sec² și se va face abstracție de rezistența aerului.

Institutul de Drumuri și Poduri București. Examenul de admitere în Anul I. Noembrie 1948

Subiectul I

Problema I. Se dă ecuația

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

ale cărei rădăcini se notează x_1, x_2.

1°. Fără a se rezolva această ecuație, să se formeze ecuația

$$X^2 + PX + Q = 0 \tag{2}$$

ale cărei rădăcini sunt

$$X_1 = \frac{x_1 + a}{x_2 + b}, \quad X_2 = \frac{x_2 + a}{x_1 + b}.$$

2°. Ce devine ecuația (2), dacă $a = p$, $b = q$?

Problema II. Un trapez isoscel are baza mare $AB = 2a$; iar baza mică $CD = a$, este egală cu laturile neparalele AD şi BC.

Să se arate că:

1°. $\sphericalangle BAD = 60^0$;

2°. Dreptele AD, DB sunt perpendiculare.

3°. Să se calculeze aria trapezului şi lungimile diagonalelor.

Problema III. Se dă expresia

$$y = a \sin x + b \cos x.$$

1°. Să se exprime y în funcţie de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

2°. Din expresia obţinută să se scoată $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ în funcţie de y.

3°. Să se deducă valoarea maximă şi valoarea minimă a lui y.

Subiectul II

Problema 1. Se dă triunghiul ABC ($AC > AB$). Pe AC se ia punctul D, astfel încât $AD = AB$. Bisectoarea unghiului A taie dreptele BD, BC în E, F.

Fie H proiecţia punctului A pe dreapta BC.

1°. Să se arate că:

$$BF = FD.$$

2°. Să se calculeze $\sphericalangle DFC$ în funcţie de unghiurile triunghiului ABC.

3°. Să se calculeze FC în funcţie de laturile a, b, c ale triunghiului dat.

4°. Triunghiurile AFH, BFE sunt asemenea.

Problema 2. Se dau trei dreptunghiuri D_1, D_2, D_3 astfel încât lungimile lor formează o progresie aritmetică de raţie r, iar lăţimile altă progresie aritmetică de raţie r.

Fie S_1, S_2, S_3 ariile acestor dreptunghiuri.

Să se arate că:

1°. $S_1 - 2S_2 + S_3 = 2r^2$;

2°. Perimetrele celor trei dreptunghiuri formează o progresie aritmetică a cărei raţie se cere.

Problema 3. În triunghiul dreptunghic ABC, fie D piciorul bisectoarei unghiului C.

Ştiind că $\sphericalangle DCA = 15^0$ şi că $DC = 4$ cm, să se calculeze lungimile segmentelor

$$CA \ , \ AD \ , \ CB.$$

Subiectul III

Problema 1. Se dă

$$\cos b = \frac{4}{5}.$$

Să se calculeze expresia

$$\operatorname{tg} b + \operatorname{cotg} b.$$

Problema 2. 1°. Să se rezolve ecuația

$$\log(x-1)+\log a = 2\log(x+1) - 3\log b.$$

2°. Să se găsească condiția pe care trebue să o îndeplinească a, b pentru ca rădăcinile ecuației să fie reale.

3°. Să se cerceteze dacă această condiție este verificată, când se ia

$$a = \frac{4-b}{b^2}.$$

Problema 3. Se dă triunghiul dreptunghic ABC. Pe catetele AB, AC se ia punctele C', B' astfel ca

$$AC' = \frac{AB}{k}, \quad AB' = \frac{AC}{k}.$$

Să se arate că există relația

$$k^2(\overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2) = (k^2+1)\,\overline{BC}^2.$$

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timișoara. Anul XXVIII. Nr. 11. Ianuarie 1949. V. ALACI: Asupra unghiurilor asociate ale unui triunghiu. VINCENZO G. CAVALLARO: Sur les triangles harmoniques. Note matematice, bibliografie, probleme rezolvate, probleme propuse.

Bulletin de Science et technique de la Polytechnique de Timișoara. Tome 13, fasc. 2. V. ALACI: Sur une intégrale définie nécessaire dans l'étude de séries trigonométriques. M. GHERMĂNESCU: Solutions mesurables de certaines équations fonctionelles linéaires à plusieurs variables. GH. T. GHEORGHIU: Sur un couple de surfaces. CEZAR COȘNIȚĂ: Sur le théorème de CARNOT; certains cas limites; extensions dans l'espace.

Matematiky a fysiky. Anul 73, fascicola 2, 1948 (în limba cehoslovacă). Studii matematice de IOSEF NOVÁK și Z. ZAHORSKI.

Matematiky a fysiky. Anul 73, fascicola 3, 1948. (în limba cehoslovacă). Studii matematice de ALOIS URBAN și JAN SRB.

Boletin Matematico. Anul XXI, Nr. 4 (276). Decembrie 1948, publicat la Buenos Aires (Argentina). B. I. BAIDAFF: Cosmosia Urania. B. I. BAIDAFF: Curiosidades de cálculo de derivadas. B. I. BAIDAFF: Aplastar y estirar figuras. Notas, problemas resueltos, tabla de materias.

Boletin Matematico. Suplemento Nr. 2 (15), anul XXI Nr. 3 (275). Septembrie 1948.

Archives internationales d'histoire des Sciences. Tome XXVIII, Nr. 5, Octombrie 1948. LOUIS DE BROGLIE: Celebrarea a celei a 300 aniversare a nașterii lui DENIS PAPIN. G. SARTON: Știință și tradiție. ARNAULD REYMOND: Reflexiuni asupra filosofiei științelor, filosofiei și metafizicei. R. H. SHRYOCK: Indiferența americană față de știința de bază în timpul secolului al nouăsprezecelea. JOSÉ BABINI: ARCHIMEDE sau matematica. J. O. FLECKENSTEIN:

PIERRE VARIGNON şi ştiinţele matematice la începuturile cartesianismului. J. MOGENET: Traducerea latină făcută de GÉRARD DE CRÉMONE a tratatului despre sfera în mişcare a lui AUTOLYCUS. J. A. VOLLGRAFF: CHRISTIAAN HUYGENS. R. HOOYKAAS: Prima teorie cinetică a gazelor (1727).

Documente oficiale, notiţe necrologice, dări de seamă critice, note şi informaţii, biografiile autorilor articolelor publicate în această fascicolă, tabla de materii (total 288 pagini).

LOUIS CAGNIARD, A. GLODEN, MICHEL LUCIUS: Asupra construcţiei unei reţele gravimetrice în marele ducat de Luxemburg, Noembrie 1948.

A. GLODEN: Introducerea sumară la teoria mulţimilor; câteva probleme din teoria numerelor în lumina matematicilor moderne, 1948.

A. GLODEN: Doi din cei mai eminenţi istoriografi ai matematicilor; trei matematicieni celebri

A. GLODEN: Seriile spectrale ale hidrogenului şi interpretarea lor electronică; în legătură cu bicentenarul naşterii lui GASPARD MONGE.

MIHAIL ŞT. BOTEZ: Studiul geometriei descriptive acum o sută de ani în România; NICOLAE ABRAMESCU (1884—1947), Iaşi 1947.

MIHAIL ŞT. BOTEZ: Contribuţie pentru o simplificare a sistemului de proiecţie MONGE, într'un caz special, Iaşi 1946.

MIHAIL ŞT. BOTEZ: Sur une nouvelle géométrie côtée, Iaşi 1948.

ENDEAVOUR, volumul VII, Nr. 28, London, 1948. C. E. KENNETH MEES: Metode moderne de fotografie în culori. H. J. EMELÉUS: Progresul chimiei fluorului. DOUGLAS MC KIE: Legea lui BOYLE. E. CHAIN: Proprietăţi chimice şi structura penicilinelor. DAVID S. EVANS: Protuberanţele solare. G. M. WYBURN şi P. BACSICH: Altoiuri animale. F. A. VENING MEINESZ: Explorarea câmpului gravitaţional în submarin. Revista cărţilor, note biografice asupra colaboratorilor.

Revista apare în engleză, franceză, germană, spaniolă şi italiană.

DIVERSE

Şedinţele Societăţii Române de Matematici

Societatea Română de Matematici, sub preşedinţia d-lui Prof. V. VÂLCOVICI, a ţinut şedinţe de comunicări cu caracter elementar la 22 Noembrie şi 20 Decembrie 1948, cu următoarea ordine de zi:

GH. SIMIONESCU: Ecuaţii cu rădăcini complementare faţă de unitate.

A. DOBRESCU: Un determinant în legătură cu un sistem de ecuaţii diferenţiale.

AL. NICOLESCU: Geometria unui invariant.

OCT. GHEORGHIU: Funcţii iperbolice de trei argumente.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3627. *Intr'un triunghiu oarecare* ABC, *fie:*
D *mijlocul laturei* BC;
E *piciorul înălțimei ce pleacă din* A;
F *și* G *proiecțiile vârfurilor* B *și* C *pe bisectoarea interioară a unghiului* A;
ω *centrul cercului celor nouă puncte.*
Se cere să se construiască triunghiul ABC, *cunoscându-se:*
1°. *Cercul celor nouă puncte* ω *și două oarecare din cele patru puncte* D, E, F, G.
2°. *Trei oarecare din cele patru puncte* D, E, F, G.
Discuție.

F. NEGRETZU.

Figura se bucură de următoarele proprietăți cunoscute[1]:
Punctele D, E, F, G *se găsesc pe un cerc al cărui centru* O_1 *se află pe cercul celor nouă puncte* ω. *Dreptele* DF, DG *trec prin mijloacele* C', B' *ale laturilor* AB, AC. *Triunghiul* FDG *este isoscel cu vârful în* D.

1°. Cunoscându-se două oarecare din punctele D, E, F, G se găsește imediat O_1 la intersecția cercului ω cu perpendiculara pe mijlocul distanței între cele două puncte.

Considerăm cazul când se cunoaște punctul E și unul din punctele F sau G, de exemplu F. Se determină O_1, apoi se intersectează ω în D cu cercul de centru O_1 și rază $O_1E = O_1F$. Intersecția C' a lui DF cu ω determină mijlocul laturei AB iar intersecția B' a lui ω cu paralela din C' la ED determină mijlocul laturei AC. Avem astfel construit triunghiul median DB'C' și problema este rezolvată ducând prin B' și C' paralele la DC' și DB'.

Când se dă punctul D și unul din punctele F sau G, construcția este identică cu precedenta.

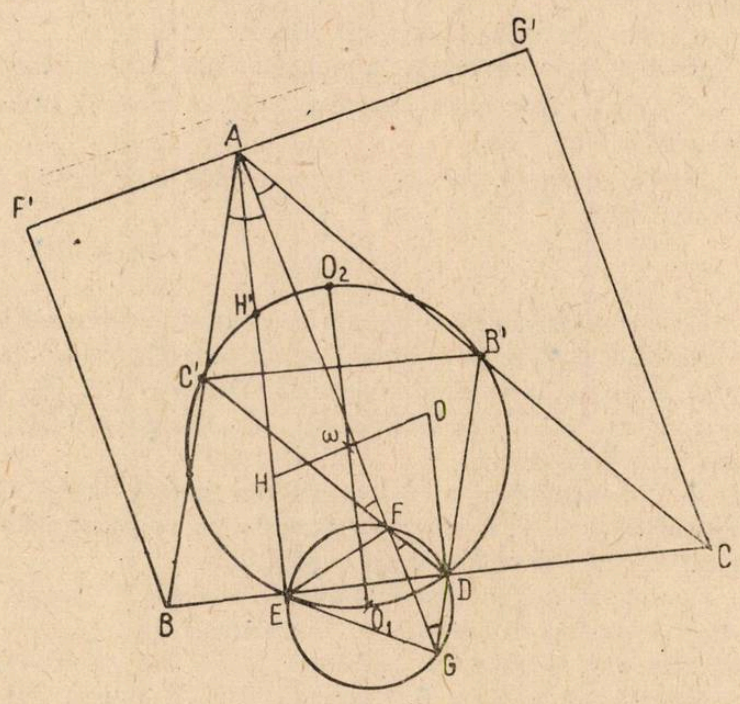
Dacă se dau punctele F, G se determină O_1 apoi se iau intersecțiile E, D ale cercului ω cu cercul de centru O_1 și rază $O_1F = O_1G$.

---

1) F. G. M. *Exercices de géometrie*, pag. 307 și 308.

A doua intersecţie O_2 a cercului ω cu perpendiculara pe mijlocul lui ED corespunde cazului când se dau proiecţiile F', G' ale vârfurilor B şi C pe bisectoarea exterioară unghiului A căci punctele E, D, F', G' se află de asemeni pe un cerc O_2 cu centrul pe ω [1].

In aceste cazuri problema este determinată şi are o singură soluţie ori cum ar fi cele două puncte date în plan.



Dacă se dau punctele E şi D problema este nedeterminată. In acest caz se ia intersecţia H' a lui ω cu perpendiculara în E pe ED, se consideră un punct H pe EH' şi se ia simetricul O al lui H faţă de ω. Punctul O se află pe perpendiculara în D pe ED. Paralela din O la ωH' taie EH' în A şi pe ED în BC. Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca AB şi AC să întâlnească pe ω cel puţin în câte un punct. Problema nu prezintă interes pentru acest caz.

---

1) F. G. M. *Exercices de géometrie*, pag. 308.

2°. *Se dau 3 din punctele* D, E, F, G. Se dau punctele E, F, G. Se construeşte cercul O_1 circumscris triunghiului EFG. Triunghiul FDG fiind isoscel, intersecţia lui O_1 cu perpendiculara pe mijlocul lui FG determină punctele D şi D'. Cercul EO_1D sau E_1OD' este cercul ω al celor 9 puncte al triunghiului de construit. Problema a revenit astfel la cazul 1°. precedent.

Se dau punctele E, D şi unul din punctele F sau G. Se determină O_1 după care problema este redusă la cazul 1°.

Problema este totdeauna posibilă, afară de cazul când se dau punctele D, F, G când pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca DF = DG.

Notă. 1°. D-l G. G. CONSTANTINESCU, când era student în anul I a rezolvat problema schimbând enunţul în sensul că la 1° se dau 3 din cele 4 puncte iar la 2° se dau toate cele 4 puncte.

Alte soluţii sau încercări de soluţii nu s'au mai primit.

2°. Regretatul V. CRISTESCU, care a dat această problemă la propus, a scris, pe originalul propunătorului, enunţul cu cerneală roşie aşa cum este publicat la pag. 278, Vol. XXXIII şi cum este redat aici. El a alăturat, la originalul propunătorului două foi. Pe una era desenată figura şi erau enumărate toate cazurile când se dau 2 din puncte pentru 1° sau 3 pentru 2°. În dreptul fie-cărui caz a scris „se poate". Pe a doua foaie, aceasta de calc, a dat soluţia pentru cazul când se dau punctele D şi E. Acest caz l-a rezolvat însă numai pentru un triunghiu special şi anume pentru triunghiul în care ω se află pe bisectoarea lui A. Soluţia lui V. CRISTESCU este următoarea: Din D se descrie un cerc care taie pe O_1 în *f* şi *g*. Paralela din ω la *fg* taie pe O_1 în punctele F şi G, aducând astfel problema la cunoaşterea celor 4 puncte.

GH. B.

PROBLEMA 3768. *Notaţiile fiind cele obişnuite să se arate că în orice triunghiu avem*

$$\frac{3\,\Pi\sin A - \Sigma\sin^3 A}{\Sigma\sin A} = \Sigma\frac{\cos(B-C)-\cos(B+C)}{2} - \Sigma\sin^2 A.$$

CRISTIAN I. RÂMNICEANU.

Ţinând seamă de egalitatea, uşor de stabilit,

$$\frac{\cos(B-C)-\cos(B+C)}{2} = \sin B\sin C$$

relaţia din enunţ devine

$$3\,\Pi\sin A - \Sigma\sin^3 A = \Sigma\sin A\,[\Sigma\sin B\sin C - \Sigma\sin^2 A]$$

care nu este decât identitatea uşor de verificat

$x^3+y^3+z^3 = 3xyz - (x+y+z)[xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2)$.

In toată această dezvoltare, nu s'a făcut uz de faptul că A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu.

Deci relaţia din enunţ are loc între 3 unghiuri oarecare.

1°. In enunţul propus la pag. 320, Vol. XXXIV numitorul membrului I era sinA în loc de Σ sinA. Această eroare de tipar a făcut ca mulţi corespondenţi să nu atace acest uşor exerciţiu.

2°. Au rectificat eroarea din enunţ şi au rezolvat bine problema d-nii: I. C. BOIAN, E. BURLACU, C. COŞNIŢĂ, CĂLIN I. C. DIMITRIU, AD. C. GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU, MIRCEA I. GROSU, M. MARGULIUS şi ION GH. POPA.

Vechimea problemei explică numele rezolvitorilor cu situaţii în învăţământul superior.

GH. B.

PROBLEMA 4373. *Dacă se împarte 10^5 printr'un număr* N *de trei cifre, partea întreagă a câtului este răsturnatul lui* N. *Care e acel număr?*

ULPIU M. FLORESCU.

Fie $N = abc$ numărul căutat şi $N' = cba$ răsturnatul său.

Trebue să avem

$$100000 = abc \times cba + R,$$

R fiind restul împărţirii.

Dacă *abc* va fi o soluţie şi *cba* va fi soluţie a problemei.

Putem deci examina numai cazul $a \geqslant c$.

Tot din cauza aceasta trebue $R < N' \leqslant N$.

Să examinăm ce valori pot lua a şi c.

Pentru $a = 9, 8, 7, 6, 5$ rezultă $c = 1$.

Pentru $a = 4$ rezultă $c = 2$

Pentru $a = 3$ rezultă $c = 2$ sau 3.

Valorile $a = 1, 2$ nu mai trebuesc examinate, din cauza observaţiei de mai sus.

Pentru determinarea lui b procedăm prin încercări. Dând la împărţitor valorile limită ale lui b (9 şi 0, pentru $a=9,\ldots 4$; 9 şi 4 pentru $a=3$, $c=2$; 3 şi 0 pentru $a=c=3$), ne rezultă la cât alte două valori, mai apropiate, între care se poate găsi b.

Efectuăm acum produsul $abc \times cba$ în care luăm pentru b o cifră mijlocie din intervalul găsit. Dacă produsul depăşeşte 10^5 trecem la cifra inferioară.

Calculele sunt rezumate în tabloul următor;

a	b	c	Produsul optim, inferior lui 10^5		$10^5 - NN'$
			$abc \times cba$	NN'	
9	0, 1	1	901 × 109	98209	1791
8	1, 2	1	811 × 118	95698	4302
7	2, 3, 4	1	721 × 127	91567	8433
6	4, 5, 6	1	641 × 146	93586	6414
5	6, 7, 8, 9	1	*571 × 175*	*99925*	*75*
4	0, 1, 2. 3, 4	2	422 × 224	94528	5472
3	5, 6, 7, 8, 9	2	362 × 263	95206	4794
2	0, 1, 2, 3	3	313 × 313	97969	2031

Din acest tablou se vede că 75 este singura valoare a lui $10^5 - NN'$ inferioară ambelor numere N, N'. Această valoare 75 este deci restul împărţirii lui 10^5 prin N sau N', corespunzător soluţiilor

$$N = 571 \text{ şi } N' = 175.$$

In adevăr, avem:

$10^5 : 571 = 175,\ 13134\ldots$ şi $10^5 : 175 = 571,\ 42857\ldots$

Observaţiuni. 1°. Aflarea lui b se poate face şi pe cale algebrică. Efectuând produsul NN' şi rezolvând în raport cu b, se găseşte:

$$b = -5{,}05\ (a+c) + \sqrt{5{,}05^2 (a+c)^2 - 100{,}01\ ac - (a^2 + c^2) + 1000 - \frac{R}{100}}$$

care se poate calcula, neglijând termenul $\frac{R}{100}$, mic în raport cu valoarea ce rezultă sub radical. Numărul încercărilor se reduce, dar calculele sunt mai grele.

2°. Problema a fost imaginată observând pe o riglă de calcul că produsele numerelor

91... × 11; 82.. × 12... ; 73... × 13... ; 65... × 15... ; 57... × 17... ;
43... × 23... ; 37... × 27... ; 31... × 31... ; 27... × 37... ; 17... × 57... ;

la care cifrele unimilor sunt identice, dau valori apropiate de 100...

Acest procedeu de calcul constitue şi cea mai simplă cale pentru aflarea valorii apropiate a lui b.

3°. Problema similară pentru un număr N de patru cifre nu are soluţie.

4°. Problema a fost rezolvată, prin încercări, apropiate de cele din soluţia de faţă, de D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU, I. BOBORODEA, V. CEAUŞESCU şi C. GAVRILESCU, în primii ani după propunerea ei.

U. M. F.

PROBLEMA 4690. *Să se demonstreze, că dacă cercul circumscris şi cercul celor nouă puncte ale unui triunghiu* ABC *se taie sub 120°, atunci:*

1°. *Raza unuia dintre cercurile tritangente triunghiului ortic* A'B'C' *este triplul razei cercului lui* EULER *al triunghiului* ABC.

2°. *Dreapta care uneşte ortocentrul cu punctul lui* LEMOINE *este paralelă cu dreapta lui* EULER *a triunghiului ortic.*

3. *Ortocentrul triunghiului ortic este centrul cercului lui* BROCARD *al triunghiului* ABC.

4°. *Suma distanţelor centrului cercului celor nouă puncte la laturile triunghiului* A' B' C' *este egală cu raza cercului circumscris triunghiului fundamental.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de d-nii: R. BOUVAIST (Franţa) şi M. D. POPA.

Fie O, ω, H, respectiv cercului circumscris, centrul cercului celor nouă puncte şi ortocentrul triunghiului ABC iar H' ortocentrul triunghiului A'B'C' şi K punctul lui LEMOINE a triunghiului ABC. Notez cu R raza cercului (O) şi deci cu $\frac{R}{2}$ raza cercului (ω). Aceste cercuri tăindu-se sub 120° avem:

$$O\omega^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{2} = \frac{7R^2}{4}$$

$$\therefore \qquad O\omega = \frac{R\sqrt{7}}{2} \quad \text{şi} \quad OH = 2O\omega = R\sqrt{7} \qquad (1)$$

Cum în orice triunghiu

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$

rezultă după (1) că pentru triunghiul special din enunţ avem

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2R^2 \qquad (3)$$

Pentru OH se mai cunoaşte expresia

$$OH = R\sqrt{1 - 8\cos A \cos B \cos C}$$

care comparată cu (1) dă, pentru triunghiul special din enunţ:

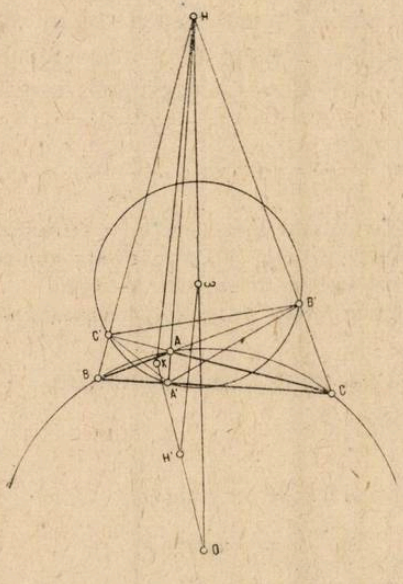
$$\cos A \cos B \cos C = -\frac{3}{4} \qquad (4)$$

ceea ce arată că unul din unghiurile triunghiului ABC este obtuz, fie A acel unghiu.

Cu aceste elemente se poate trece la rezolvarea problemei.

1°. Pentru triunghiul A'B'C' înscris în cercul (ω), punctele A, B, C, H sunt centrele cercurilor tritangente, dintre care A al cercului înscris. Utilizând relația lui EULER pentru cercul exînscris cu centrul în H avem

$$H\omega^2 = \left(\frac{HO}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} + Rr_{a'} = \frac{7R^2}{4} \quad \therefore \quad r_{a'} = \frac{3R}{2}.$$



2°. Se știe că în orice triunghiu, punctele O, H', K sunt colineare. In plus d-l V. THÉBAULT a arătat [1] că

$$\frac{OK}{OH'} = \frac{4R^2}{a^2+b^2+c^2}$$

sau, ținând seamă de (3), în cazul triunghiului special de care ne ocupăm

$$\frac{OK}{OH'} = 2$$

care arată că H' este mijlocul lui OK. Rezultă că ωH' este paralelă cu HK.

3°. Cercul lui BROCARD al unui triunghiu oarecare ABC este cercul de diametru OK. In cazul de față mijlocul lui OK corespunde cu ortocentrul H' al triunghiului ABC.

4°. Unghiul A' fiind obtuz, avem în cercul (ω)

$$\sphericalangle C'\omega B' = 360^0 - 2A' \quad ; \quad \sphericalangle A'\omega C' = 2B' \quad ; \quad \sphericalangle B'\omega A' = 2C'$$

și dacă notăm cu d'_a, d'_b, d'_c distanțele lui ω la laturile triunghiului A', B', C' atunci

$$d'_a = -\frac{R}{2}\cos 2A' \quad ; \quad d'_b = \frac{R}{2}\cos 2B' \quad ; \quad d'_c = \frac{R}{2}\cos 2C'$$

$$\therefore \quad d'_a + d'_b + d'_c = \frac{R}{2}(\cos 2B' + \cos 2C' - \cos 2A')$$

---

1) *Gazeta Matematică*, Vol. XLVII, pag. 510.

Ţinând seamă că $A'B'C'$ sunt complimentare cu A, B, C şi că $A > 90^0$ deducem

$$d'_a+d'_b+d'_c=\frac{R}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)=\frac{R}{2}[-1-4\cos A\cos B\cos C]$$

sau ţinând seamă de (4) găsim

$$d'_a + d'_b + d'_c = R.$$

Se ajunge la acelaşi rezultat dacă se ţine seamă că într'un triunghiu $A'B'C'$ cu unghiul A' obtuz, suma mediatoarelor este diferenţa între raza cercului exînscris în unghiul A' şi raza cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$. In cazul triunghiului special din enunţ

$$d'_a + d'_b + d'_c = \frac{3R}{2} - \frac{R}{2} = R.$$

Notă. 1°. Ţinând seamă de relaţiile stabilite precedent între elementele triunghiului din enunţul problemei 4690, d-l M. D. POPA a mai enunţat şi demonstrat următoarele proprietăţi ale acestor triunghiuri speciale:

1. Dacă S_1 este suprafaţa triunghiului format de proiecţiile baricentrului pe laturile triunghiului ABC atunci

$$9S_1 = S(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 2S(1 + \cos A\cos B\cos C)$$

$$\therefore \qquad 18S_1 = S.$$

2. Relaţia generală

$$\overline{KH}^2 = R^2[\operatorname{tg}^2\theta - 4\cos A\cos B\cos C(1 - \operatorname{tg}^2\theta)]$$

devine

$$\overline{KH}^2 = R^2(3-2\operatorname{tg}^2\theta) = \frac{3R^4 - 8S^2}{R^2} = \frac{\overline{\omega H}^2}{4}.$$

3. Eliminând pe θ între relaţia precedentă şi

$$\overline{OK}^2 = R^2(1 - 3\operatorname{tg}^2\theta)$$

se obţine

$$3\overline{KH}^2 - 2\overline{OK}^2 = \overline{OH}^2 = 7R^2.$$

4. Raza cercului conjugat, dată de

$$\rho' = -4R^2\cos A\cos B\cos C \quad \text{devine} \quad \rho^2 = 3R^2$$

adică *raza cercului conjugat este egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul* ABC.

5. Raza R' a cercului circumscris triunghiului tangenţial [1].

$$R' = \frac{R}{4\cos A\cos B\cos C} \quad \text{devine} \quad R' = \frac{R}{3}.$$

---

1) *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII, pag. 123.

6. Suprafața S' a triunghiului ortic A'B'C' e dată de

$$2S' = 3S.$$

7. Notând cu S_2, a_2, b_2, c_2 elementele triunghiului format de simetricele lui A, B, C față de laturile triunghiului ABC, avem

$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{c}\right)^2 = 11 + 8\cos A\cos B\cos C = 5$$

$$S_2 = S\,(3 + 8\cos A\cos B\cos C) = -3S.$$

2°. O foarte bună soluție s'a primit la 10 Iunie 1943 de la d-l P. P. DRĂGHICESCU, pe atunci elev al liceului militar din Iași. D-sa a găsit că razele r', r'_a, r'_b, r'_c ale cercurilor tritangente laturilor triunghiului A'B'C' sunt date de:

$$r' = \frac{R^2 - a^2}{2R}, \quad r'_a = \frac{3R}{2}, \quad r'_b = \frac{R^2 - b^2}{2R}, \quad r'_c = \frac{R^2 - c^2}{2R}.$$

PROBLEMA 4729. *Să se găsească un punct în planul a trei cercuri date, astfel ca polarele lui față de cercurile considerate să formeze un triunghiu asemenea cu un triunghiu dat.*

Caz particular: triunghiul dat este echilateral.

I. C. SCHILERU-DILI.

Soluție dată de d-l PETRE A. CERNESCU.

Fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor date și BC, CA, AB polarele unui punct P față de cercurile (O_1), (O_2) (O_3). Deoarece $PO_1 \perp BC$ și $PO_2 \perp CA$ urmează că

$$\sphericalangle O_1PO_2 + \sphericalangle BCA = \pi.$$

De aici urmează construcția: Pe O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 se descriu segmente de cercuri capabile de unghiurile $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$ (α, β, γ fiind unghiurile triunghiului dat). Intersecția P a acestor segmente este punctul căutat.

In cazul particular al triunghiului echilateral unghiurile O_1PO_2, O_2PO_3, O_3PO_1 sunt egale între ele și egale cu 120°.

Au dat soluții bune d-nii: LIVIU M. BIVOLARU, VIRGIL N. BUCUR, DUMITRU I. CIOC, ADOLF DEUTSCH, IOAN CĂLIN DUMITRIU, CONST. N. GAVRILESCU, ANDREI T. NADOLU, CONST. I. PASCARU, ACHILE PETRESCU, MIRCEA D. POPA, TRAIAN C. TURCU și SANDU R. TURCU.

PROBLEMA 4788. M *fiind un punct în planul unui exagon regulat* $A_1A_2 \ldots A_6$, *să se arate că există relaţia*

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_5}^2 = \overline{MA_2}^2 + \overline{MA_4}^2 + \overline{MA_6}^2.$$

Generalizare. AL. A. ROŞU.

Soluţie dată de d-nii: VICTOR L. FLORESCU, CONST. N. GAVRILESCU, EM. S. MODÂLCĂ, P. NEGOIŢĂ, C. V. PANTELIMON, C. PAREPEANU, MIRCEA D. POPA, N. D. ŞTEFĂNESCU, ŞT. C. TILICĂ, SANDU R. TURCU, M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

Fie O centrul cercului circumscris poligonului regulat $A_1A_2 \ldots A_{2n}$. Se pot nota vârfurile poligonului aşa în cât punctul M să fie în interiorul unghiului A_1OA_{2n}, fără a restrânge cu nimic generalitatea problemei. Observăm că A_1A_{n+1} este un diametru în cercul O şi notăm cu R raza cercului O, cu d distanţa OM şi:

$$\sphericalangle MOA_1 = \alpha \; ; \quad \sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_2OA_3 = \ldots = \sphericalangle A_{2n}OA_1 = \beta.$$

Presupunând $n+1$ nepereche se observă imediat pe o figură, că:

$\overline{MA_1}^2 = d^2 + R^2 - 2dR\cos\alpha$; $\overline{MA_2}^2 = d^2 + R^2 - 2dR\cos(\alpha+\beta)$

$\overline{MA_3}^2 = d^2 + R^2 - 2dR\cos(\alpha+2\beta)$; $\overline{MA_4}^2 = d^2 + R^2 - 2dR\cos(\alpha+3\beta)$

$\overline{MA_5}^2 = d^2 + R^2 - 2dR\cos(\alpha+4\beta)$; $\overline{MA}^2 = d^2 + R^2 - 2dR\cos(\alpha+5\beta)$

. . . . . .

$\overline{MA}^2_{n+1} = d^2 + R^2 - 2dR\cos(\pi-\alpha)$; $\overline{MA}^2_{n+2} = d^2 + R^2 - 2dR\cos[\pi-(\alpha+\beta)]$

$\overline{MA}^2_{n+3} = d^2 + R^2 - 2dR\cos[\pi-(\alpha+2\beta)]$; $\overline{MA}^2_{n+4} = d^2 + R^2 - 2dR\cos[\pi-(\alpha+3\beta)]$

$\overline{MA}^2_{n+5} = d^2 + R^2 - 2dR\cos[\pi-(\alpha+4\beta)]$; $\overline{MA}^2_{n+6} = d^2 + R^2 - 2dR\cos[\pi-(\alpha+5\beta)]$

. . . . . .

Ţinând seamă că

$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$

şi adunând egalităţile precedente se găseşte

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_3}^2 + \ldots + \overline{MA}^2_{2n-1} = \overline{MA_2}^2 + \overline{MA_4}^2 + \ldots + \overline{MA}^2_{2n} = n(d^2+R^2).$$

Au dat bune soluţii pe alte căi sau prin geometria analitică d-nii: PAUL DOBRESCU, M. GRUMĂZESCU, GR. MARTEŞ, AL. N. POPESCU-ZORICA, MIHAI C. VLAD, N. E. WEGENER.

PROBLEMA 4866. *Fie* P *un punct în planul triunghiului* ABC; A' şi B' *intersecţiile dreptelor* PA *şi* PB *respectiv cu* CB *şi* CA; K, L *şi* M *mijloacele segmentelor* AB, A'B' *şi* CP.

1. *Să se arate că locul geometric al punctelor* P, *pentru care avem*

$$\overline{AK}^2 = \overline{KL} \cdot \overline{KM} \qquad (1)$$

se compune dintr'un cerc O, *o dreapta* D, *şi o cubică* P.

2. *Să se verifice geometriceşte că dacă punctul* P *se găseşte pe cercul* O, *sau pe dreapta* D, *avem relaţia* (1).

A. ANGELESCU.

1. Fie $P(\alpha, \beta, \gamma)$ coordonatele baricentrice ale punctului P. Vom avea:

$$A'[0, \beta, \gamma]\ ;\ B'[\alpha, 0, \gamma].$$

Coordonatele baricentrice absolute ale punctelor ce interesează sunt:

$$L(0, 0, 1)\ ;\ K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$A'\left[0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right]\ ;\ B'\left[\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, 0, \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right]$$

$$P\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right].$$

$$L\left[\frac{\alpha}{2(\alpha+\gamma)}, \frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}, \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\alpha+\beta+2\gamma}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}\right].$$

$$M\left[\frac{\alpha}{2(\alpha+\beta+\gamma)}, \frac{\beta}{2(\alpha+\beta+\gamma)}, \frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2(\alpha+\beta+\gamma)}\right].$$

Folosind formula ce dă distanţa dintre două puncte avem:

$$\overline{KL}^2 = \frac{\gamma^2}{4(\alpha+\gamma)^2(\beta+\gamma)^2}\left[(\alpha+\beta+2\gamma)\left[a^2(\alpha+\gamma)+b^2(\beta+\gamma)\right]\right.$$

$$\left. -c^2(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)\right]$$

$$\overline{KM}^2 = \frac{1}{4(\alpha+\beta+\gamma)^2}(\alpha+\beta+2\gamma)[a^2(\alpha+\gamma)+b^2(\beta+\gamma)-c^2(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)].$$

Relaţia (1) scrisă sub forma

$$\overline{KL}^2 \cdot \overline{KM}^2 - \overline{AK}^4 = 0$$

ne dă

$$\gamma^2[(\alpha+\beta+2\gamma)[a^2(\alpha+\gamma)+b^2(\beta+\gamma)]-c^2(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)]$$
$$-c^4(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha+\gamma)^2(\beta+\gamma)^2=0$$

$$\therefore\ [(\alpha+\beta+2\gamma)\gamma[a^2(\alpha+\gamma)+b^2(\beta+\gamma)]-c^2\gamma(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$$
$$-c^2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)]$$
$$\times[(\alpha+\beta+2\gamma)\gamma[a^2(\alpha+\gamma)+b^2(\beta+\gamma)]-c^2\gamma(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$$
$$+c^2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma(\beta+\gamma)]=0$$

$$\therefore\ (\alpha+\beta+2\gamma)[a^2(\alpha+\gamma)\gamma+b^2(\beta+\gamma)\gamma-c^2(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$$
$$\times[(\alpha+\beta+2\gamma)\gamma[a^2(\alpha+\gamma)+b^2(\beta+\gamma)]+c^2(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)]=0.$$

Se recunoaşte acum că locul cerut se compune din:

Dreapta D, de ecuaţie

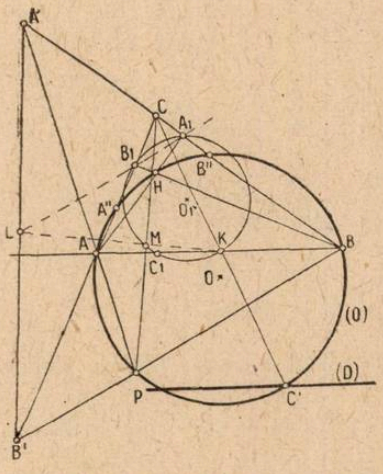
$$(D)\equiv\alpha+\beta+2\gamma=0,$$

cercul (O), de ecuaţie

$$(O)\equiv a^2(\alpha+\gamma)\gamma+b^2(\beta+\gamma)\gamma-c^2(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)=0$$

şi cubica (Γ) de ecuaţie

$$(\Gamma)\equiv(\alpha+\beta+2\gamma)\gamma[a^2(\alpha+\gamma)+b^2(\beta+\gamma)]+c^2(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=0.$$



Dreapta (D) este paralela prin C'(1, 1, — 1) — al patrulea vârf al paralelogramului ACBC' — la AB, deci simetrica faţă de AB, a paralelei prin C la AB.

Cercul (O) este cercul circumscris triunghiului ABC', este deci simetricul faţă de AB al cercului ABC, care după cum se ştie, trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC.

Cubica (Γ) este deasemeni circumscrisă triunghiului ABC'. Are o asimptotă paralelă cu AB.

2°. *Verificări geometrice.* I. *P situat pe dreapta D.* Mijlocul M al lui CP e situat pe dreapta AB şi, după teorema cunoscută referitoare la mijloacele diagonalelor unui patrulater complet, mij-

locul L al lui A'B' se găseşte deasemeni pe AB. Cum într'un patrulater complet diagonalele se divid armonic, rezultă că diviziunea (LMAB) este armonică. K fiind mijlocul lui AB, avem după cum se ştie într'o asemenea diviziune,

$$\overline{KL} \cdot \overline{KM} = \overline{KA}^2$$

II. P *este situat pe cercul* (O). Să notăm cu $A_1B_1C_1$ triunghiul ortic al triunghiului ABC; cercul $A_1B_1C_1$ este cercul lui EULER al triunghiului ABC. Se vede cu uşurinţă că cercul $A_1B_1C_1$ şi ABC' sunt omotetice de pol C şi raport $\frac{1}{2}$, lucru dealtfel cunoscut. Punctul P găsindu-se pe cercul ABC', punctul M mijlocul lui $\overline{CP}$, se va găsi pe cercul $A_1B_1C_1$ al lui EULER.

Dacă P descrie cercul (O), punctele A' şi B' descriu pe CA şi CB diviziuni omografice. Într'adevăr punctul A' determină în mod unic şi succesiv punctele P şi B' şi reciproc. In această omografie punctele dela infinit ale dreptelor CA şi CB se corespund fiind cazul când P se confundă cu C'. Aşa fiind dreapta A'B' va înfăşura o parabolă (Π) tangentă dreptelor CA şi CB. Dacă notăm cu A" şi B" punctele unde cercul (O) taie a doua oară dreptele CA şi CB, se vede fără greutate că parabola (Π) este tangentă în A" şi B" dreptelor CA şi CB, deoarece A" şi B" sunt omoloage ale punctului C în omografia de mai sus. Din cele spuse despre omotetia cercurilor $A_1B_1C_1$ şi ABC' rezultă că mijloacele segmentelor CA" şi CB" sunt B_1 şi A_1. Segmentul A'B' fiind format de o tangentă variabilă a unei parabole pe două tangente fixe CA" şi CB" are mijlocul său L, după cum se ştie, pe dreapta ce uneşte mijloacele segmentelor CA" şi CB", adică pe dreapta A_1B_1.

Reţinem deci:

— Punctele L, M, K sunt colineare (dreapta GAUSS-NEWTON a patrulaterului CAPBA'B').

— Punctele L, B_1, A_1 sunt colineare.

Se ştie deasemeni că dreapta A_1B_1 este perpendiculară pe diametrul punctului K al cercului lui EULER. Rezultă că dreapta LB_1A_1 şi cercul lui EULER $A_1B_1C_1$ se corespund într'o inversiune de pol K, puterea de inversiune fiind:

$$\overline{KB_1}^2 = \overline{KA_1}^2.$$

Rezultă că avem:

$$\overline{KM} \cdot \overline{KL} = \overline{KB_1^2} = \overline{KA_1^2}.$$

Insă:

$$\overline{KB_1} = \overline{KA_1} = \overline{KA} = \overline{KB}.$$

Deci:

$$\overline{AK^2} = \overline{KL} \cdot \overline{KM}.$$

MIRCEA D. POPA
(Politehnica Bucureşti).

PROBLEMA 5129. *Să se găsească valorile întregi pozitive ale lui x şi y pentru care numerele $11x+7y$ şi $8x+3y$ sunt simultan divizibile prin 23.*

GH. BUICLIU.

Soluţie şi generalizare, date de d-nii M. R. CONSTANTINESCU (student, Bucureşti) şi P. A. CERNESCU.

Dacă m şi n sunt numere întregi pozitive, trebue să avem

$$11x+7y = 23m \ , \ 8x+3y = 23n$$

$$\therefore \quad x = 7n - 3m \text{ şi } y = 8m - 11n \qquad (1)$$

Pentru ca x şi y, daţi de (1) să fie pozitive, trebue ca

$$\frac{3}{7}m < n < \frac{8}{11}m \qquad (2)$$

Problema are o infinitate de soluţii pentru toate valorile m şi n, care verifică neegalităţile (2).

In general soluţiile întregi pozitive ale sistemului

$$a_1 x + b_1 y = km \ , \ a_2 x + b_2 y = kn$$

în care $a_1 b_2 - a_2 b_1 = k$, sunt:

$$x = mb_2 - nb_1 \ , \ y = na_1 - ma_2$$

cu condiţia

$$\frac{a_2}{a_1}m < n < \frac{b_2}{b_1}m$$

Mai general se găseşte că sistemul

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = km_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = km_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn} = km_n$$

unde $a_{ik}(i, k = 1, 2, \ldots n)$ şi m_i sunt întregi şi

$$k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

are ca soluţii întregi pentru x_i, valorile

$$x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1i-1} & m_1 & a_{1i+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2i-1} & m_2 & a_{2i+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{ni-1} & m_n & a_{ni+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

deduse din rezolvarea sistemului general în x_i.

Notă. 1°. Au rezolvat bine problema în cazul particular din enunţ, stabilind neegalităţile (2) d-nii: V. BĂGHINA, P. P. TEODORESCU, DAN E. VASILIU, CLAUDIU C. IONESCU-BUJOR, C. N. I. BOERESCU, VAL. A. PETCU, SOFRONIE I. ŞTEFĂNESCU, AUREL D. MOROIANU, GH. COCOŞ, CORNEL D. MOLDOVEANU GABRIEL VASILESCU, SEVER TĂTARU, I. T. MUNTEANU, LONGIN ANDRONESCU.

2°. Au rezolvat problema în cazul particular, fără a stabili condiţiile (2) d-nii: LUCILIU-MIHAI C. ATANASIU, VIRGIL G. CONSTANTINESCU, VIRGILIU N. STĂNCESCU, E. A. DODU, M. V. SOARE, SEPTIMIU N. RÂMBOIU, D. I. CRĂCEA, KOSTAKE A. TELEMAN.

3°. D-l L. C. ATANASIU a încercat să rezolve şi grafic problema, fără însă a ajunge la rezultat complet.

4°. D-l E. NEMETH a dat numai parţial o serie de valori numerice de ale lui x şi y.

GH. B.

PROBLEMA 5227. *Se consideră un triunghiu variabil* ABC *la care poziția centrelor cercurilor exînscrise* I_b *și* I_c *sunt fixe iar latura* BC *se deplasează paralel cu o direcție dată. Se cere:*

1°. *Locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului* ABC.

2°. *Să se construiască triunghiul* ABC *cunoscând pozițiile punctelor* I_a *și* I_c, *direcția de deplasare a lui* BC, *precum și raza cercului circumscris* R.

I. PETRESCU.

Soluție dată de d-nii: MIRCEA D. POPA (în 1940, când era în clasa a VIII-a de liceu la Iași); P. P. DRĂGHICESCU (în 1939, când era la același liceu cu precedentul) și ȘERBAN STOIANOVICI (1939, când era elev la Colegiul din Predeal).

Fie O centrul cercului ABC. Se știe ca AI_a, BI_b, CI_c sunt înălțimi în triunghiul $I_a I_b I_c$, deci cercul ABC este cercul lui EULER al triunghiului $I_a I_b I_c$, cerc care trece și prin mijlocul A' al segmentului $I_b I_c$. Această observație conduce imediat la soluția problemei.

1°. Triunghiul BA'C este isoscel căci în triunghiurile dreptunghice $I_b BI_c$ și $I_c CI_b$ medianele A'B, A'C sunt egale cu jumătatea ipotenuzei $I_b I_c$. Cum și triunghiul BOC este isoscel, urmează că $A'O \perp BC$. Locul cerut la 1° este deci perpendiculara din A' pe direcția dată.

2°. Din 1° rezultă următoarea construcție a triunghiului ABC. Se duce perpendiculara din A' pe direcția dată și se ia pe această perpendiculară de o parte sau de alta lungimea A'O egală cu R. Cercul (O) descris din O ca centru cu raza R se întâlnește cu cercul (A') de diametru $I_b I_c$ în vârfurile B și C. Vârful A este a doua intersecție a lui $I_b I_c$ cu cercul (O). Problema are 2, 1 sau nici o soluție după cum cercurile (O), (A') se taie în 2, 1 sau nici un punct.

Condiția de posibilitate este

$$2R \geqslant I_b I_c.$$

Problema are două sisteme de soluții de poziție.

D-l H. M. BODNĂRESCU a rezolvat problema foarte bine, prin calcul. S'a primit și o soluție nesemnată.

PROBLEMA 5294. *Să se rezolve ecuația*

$$x^4 + 2ax^3 + 2bx + ab = 0.$$

GH. POPESCU—Botoșani.

Soluția I. Vom întrebuința metoda DESCARTES. Scriind

$$x^4 + 2ax^3 + 2bx + ab \equiv (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')$$

și identificând avem

$$p + p' = 2a \quad (1) \quad ; \quad pq' + qp' = 2b \quad (3)$$

$$pp' + q + q' = 0 \quad (2) \quad ; \quad qq' = ab \quad (4)$$

Pentru determinarea coeficienților p, p' , q, q' punem

$$p = a + z \quad \text{și} \quad p' = a - z$$

Relațiile (2), (3), (4) devin

$$q + q' = z^2 - a^2 \quad , \quad a(q + q') + z(q' - q) = 2b \quad , \quad qq' = ab$$

$$\therefore \quad q' + q = z^2 - a^2 \quad \text{și} \quad q' - q = \frac{2b - a(z^2 - a^2)}{z}$$

pe care ducându-le în identitatea

$$(q' + q)^2 - (q' - q)^2 = 4qq'$$

obținem

$$z^2(z^2 - a^2)^2 - [2b - a(z^2 - a^2)]^2 = 4abz^2$$

$$\therefore \quad (z^2)^3 - 3a^2(z^2)^2 + 3a^4 z^2 - (a^3 + 2b)^2 = 0 \quad (5)$$

$$\therefore \quad (z^2 - a^2)^3 - 4a^3 b - 4b^2 = 0$$

$$\therefore \quad z^2 - a^2 = \sqrt[3]{4a^3 b + 4b^2} = \sqrt[3]{\Delta}$$

$$\therefore \quad z_1 = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{\Delta}} \quad , \quad z_2 = -\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{\Delta}}.$$

Este suficient a considera numai pe z_1, găsim

$$p = a + z = a + \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{\Delta}} \quad ; \quad p' = a - z = a - \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{\Delta}}$$

$$q + q' = z^2 - a^2 = \sqrt[3]{\Delta} \quad , \quad qq' = ab.$$

Ultimele două ecuații dau

$$q = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\Delta} + \sqrt{\sqrt[3]{\Delta^2} - 4ab}\right) \quad , \quad q' = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\Delta} - \sqrt{\sqrt[3]{\Delta^2} - 4ab}\right)$$

aşa că ecuaţia dată în enunţ se descompune în următoarele două ecuaţii de gradul al doilea, uşor de rezolvat:

$$x^2 + \left(a \pm \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{\Delta}}\right) x + \frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{\Delta} \pm \sqrt{\sqrt[3]{\Delta^2} - 4ab}\right] = 0.$$

Coeficienţii p, p' sunt evident reali, atâta timp cât se ia numai rădăcina cubică aritmetică a lui Δ.

In aceste condiţii şi q, q' sunt reali, de oarece:

$$\Delta^2 = (4a^3 b + 4b^2)^2 = (4a^3 b - 4b^2)^2 + 64a^3 b^3$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{\Delta^2} = \sqrt[3]{(4ab)^3 + (4a^3 b - 4b^2)^2} \geqslant 4ab$$

I. ST. TEODORESCU, Ploeşti.

Soluţia a II-a, dată de d-nii: MIRCEA L. RUSU şi OCT. E. GHEORGHIU (studenţi, Cluj).

Vom întrebuinţa metoda FERRARI, (CH. DE COMBEROUSSE, *Algèbre superieure* Tome IV pag. 734). Dacă

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

este ecuaţia de rezolvat, atunci ea poate fi transformată în următoarea ecuaţie numită *rezolvantă*:

$$y^3 - By^2 + (AC - 4D)\, y - D\,(A^2 - 4B) - C^2 = 0$$

y_1 fiind o rădăcină a acestei *rezolvante*, rădăcinile ecuaţiei generale sunt date de rădăcinile ecuaţiilor:

$$x^2 + \left(\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + y_1}\right) x + \frac{y_1}{2} \pm \frac{\frac{Ay_1}{2} - C}{2\sqrt{\frac{A^2}{4} - B + y_1}} = 0.$$

In cazul ecuaţiei din enunţ avem

$$A = 2a \quad , \quad B = 0 \quad , \quad C = 2b \quad , \quad D = ab$$

aşa că rezolvanta este

$$y^3 - 4b\,(a^3 + b) = 0,$$

iar ecuaţiile de gradul 2 sunt

$$x^2 + \left(a \pm \sqrt{a^2 + \sqrt[4]{4b\,(a^3 + b)}}\right) x + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4b\,(a^3 + b)} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \frac{a\sqrt[3]{4b\,(a^3 + b)} - 2b}{\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{4b\,(a^3 + b)}}} = 0.$$

Soluția a III-a, dată de d-l MARIN F. VĂDUVA (Politehnica București).

Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuației generale de gradul 4, atunci rădăcinile rezolvantei sunt

$$y_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4 \quad ; \quad y_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4 \quad ; \quad y_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3.$$

In cazul problemei de față avem

$$y = \sqrt[3]{\Delta} = x_1 x_2 + x_3 x_4 \quad \text{și} \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = ab$$

ceea ce arată că $x_1 x_2$ și $x_3 x_4$ sunt rădăcinile ecuației

$$z^2 - \sqrt[3]{\Delta}\, z + ab = 0. \tag{1}$$

Pe de altă parte

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2a$$

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4 + (x_1 + x_2)(-2a - x_1 - x_2) = 0$$

$$\therefore \quad (x_1 + x_2)^2 + 2a(x_1 + x_2) - \sqrt[3]{\Delta} = 0. \tag{2}$$

Din (1) și (2) se scot $x_1 x_2$, $x_3 x_4$ și $x_1 + x_2$ și $x_3 + x_4$ cu care se formează ecuațiile de gradul 2:

$$x_2 + \left(a \pm \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{\Delta}}\right) x + \frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{\Delta} \pm \sqrt{\sqrt[3]{\Delta^2} - 4ab}\right] = 0.$$

Notă. 1°. D-l E. ST. IACOB, când încă nu făcea parte din Societatea *Gazeta Matematică*, a găsit soluțiile exacte pe calea dela soluția I.

2°. D-l P. P. DRĂGHICESCU, când era în clasa VII de liceu la Iași, a determinat pe α, p și q așa încât

$$[x^2 + (a + \alpha)x + p][x^2 + (a - \alpha)x + q] = 0$$

și a găsit soluțiile exacte.

3°. Altă soluție bună s'a primit dela d-l N. E. WEGENER.

4°. Dacă se observă că

$$\frac{a\sqrt[3]{\Delta} - 2b}{\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{\Delta}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\Delta^2} - 4ab}$$

pentru $\Delta = 4a^3 b + 4b^2$

atunci rezultatele obținute prin metoda DESCARTES sunt identice cu cele obținute prin metoda FERRARI.

5°. Aplicații ale acestor metode s'au mai dat și la pag. 204 Vol. XLIV cu ocazia rezolvării problemei 4507.

GH. B.

PROBLEMA 5456. *Se dă un patrulater* ABCD *şi se notează cu* O, E, F *intersecţiile diagonalelor şi ale perechilor de laturi opuse.*

Să se demonstreze că triunghiul complementar al triunghiului OEF *este omologic cu fiecare din cele patru triunghiuri ce se obţin din patrulaterul* ABCD *lăsând câte un vârf la o parte.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de d-l Lt. MIRCEA D. POPA. Să notăm cu O'E'F' triunghiul complementar al lui OEF şi cu H, G intersecţiile diagonalelor AC şi BD cu dreapta EF. Se ştie că H şi G sunt conjugate armonic faţă de E şi F.

Mai facem notaţiile:

$$M \equiv (AD, OE) \; ; \; N \equiv (AB, OF);$$

$$P \equiv (AB, F'O') \; ; \; Q \equiv (AD, E'O') \; ; \; R \equiv (BD, F'E').$$

Din patrulaterul complet OMANEF se deduce că diagonala MN trece prin G, conjugatul armonic al lui H faţă de E şi F, deci punctele M, N, G sunt colineare. S'a format astfel patrulaterul complet EFNMOG în care se observă imediat că punctele P, Q şi R sunt mijloacele celor trei diagonale, încât, după proprietatea cunoscută, ele sunt în linie dreaptă.

De altă parte însă punctele P, Q şi R sunt tocmai intersecţiile laturilor triunghiurilor ABD şi O'E'F', ceea ce arată că aceste triunghiuri sunt omologice, în ordinea (O'E'F' ; ADB).

Analog se arată că O'E'F' este omologic cu celelalte trei triunghiuri în ordinea:

(O'E'F' ; CBD) , O'E'F' ; BCA) , (O'E'F' ; DAC).

D-nii PAUL P. DRĂGHICESCU (elev la liceu, laşi) şi HORIA M. BODNĂRESCU au dat soluţii foarte bune, folosind teorema lui MENELAUS.

D-l PAUL DTĂGHICESCU observă că dacă punctul O este ales oricum pe diagonala AC, triunghiul O'E'F' este omologic cu triunghiurile BCD şi ABD, iar dacă O se găseşte pe diagonala BD, triunghiul O'E'F' este omologic cu triunghiurile BAC şi ACD. Când O este punctul comun celor două diagonale, triunghiul O'E'F' este omologic în acelaşi timp cu toate cele patru triunghiuri.

Generalizare. D-l IULIAN PETRESCU (elev la liceu, Bucureşti) tratează problema mai generală când triunghiul O'E'F' este înlocuit cu un triunghiu pedal $\alpha\beta\gamma$ al triunghiului OEF şi demonstrează că proprietatea se menţine.

In loc să dăm o demonstrație directă, e mai simplu să proiectăm figura ce a servit la soluția problemei, așa cum a fost propusă. In acest fel patrulaterul ABCD devine *abcd*; intersecția O a diagonalelor devine intersecția *o* a diagonalelor noului patrulater; E și F devin *e*, *f*, intersecțiile laturilor opuse. Triunghiul O'E'F' devine un triunghiu pedal $\alpha\beta\gamma$ al lui *oef*. Deoarece triunghiurile omologice rămân tot omologice într'o proiecție conică, rezultă că $\alpha\beta\gamma$ este omologic cu fiecare din triunghiurile ce se obțin din patrulaterul *abcd*, lăsând câte un vârf la o parte.

G. D. S.

PROBLEMA 5887. *Să se dovedească neegalitatea*

$$2x\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\alpha\right)+\mathrm{L}(1+x^2)<0$$

pentru $x>0$ *și* $\alpha>\frac{\pi}{2}$, *arcele fiind în intervalul* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, *iar* L *fiind simbolul logaritmilor neperieni.*

TH. ANGHELUȚĂ.

Soluție dată de d-nii: MIHAI R. CONSTANTINESCU (Liceul Ploești), MIHAIL AL. LEON (Elev la liceu, București), ALEX. GH. MORAITE (Elev la liceu, București), G. G. VRÂNCEANU (Elev la liceu, Timișoara), N. E. WEGENER (Student-inginer, București).

Soluția problemei rezultă din studiul variației funcției y, care figurează în prima parte a neegalității. Vom face acest studiu când x variază în intervalul $(-\infty, +\infty)$, α fiind un număr real oarecare.

Observăm că y rămâne neschimbat, când înlocuim pe x și α respectiv cu $-x$ și $-\alpha$. Prin urmare, curbele reprezentative ale funcției y pentru α și $-\alpha$ sunt simetrice în raport cu axa Oy. Deci vom studia variația acestei funcții numai pentru $\alpha \geqq 0$.

1°. $$0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Derivata

$$y'=2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\alpha\right)$$

se anulează pentru valoarea $x=\operatorname{cotg}\alpha$, în vecinătatea căreia schimbă

semnul. Funcția y' este discontinuă în origine, unde schimbă deasemenea semnul, având la stânga valoarea $2\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, iar la dreapta $2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Urmează tabloul variației funcției

x	$-\infty$		0		$\operatorname{cotg}\alpha$		$+\infty$
y'	-2α	$-$		$+$	0	$-$	-2α
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$L\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\searrow$	$-\infty$

Ecuația $y = 0$ are o singură rădăcină reală. Curba reprezentativă are două ramuri infinite parabolice cu direcția asimptotică $y = -2\alpha x$. Cele două ramuri au tangente deosebite în origine.

In cazul considerat avem neegalitatea $y > 0$ pentru $x < 0$.

2^0. $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$. Derivata este negativă oricare ar fi x real. y descreşte dela $+\infty$ la $-\infty$, fiind nulă în origine.

Avem neegalitățile $y < 0$ şi $y > 0$ respectiv pentru $x > 0$ şi $x < 0$.

3^0. $\alpha = 0$. In acest caz y este o funcție pară. In intervalul $(0, +\infty)$ y creşte dela 0 la $+\infty$. Derivata are la stânga originei valoarea $-\pi$ şi la dreapta $+\pi$. Cele două ramuri infinite sunt parabolice cu direcția asimptotică axa Ox.

Avem neegalitatea $y > 0$, pentru x pozitiv sau negativ.

PROBLEME PROPUSE

6586. Fie M numărul tuturor numerelor întregi ce pot fi scrise cu cele 10 cifre diferite în ordine descrescătoare şi N numărul tuturor numerelor întregi ce pot fi scrise cu cele 9 cifre semnificative în ordine crescătoare. (Se face abstracție de numerele care încep cu 0). Să se arate că:

$$M = 2N + 9 = 2^{10} - 11.$$

GR. ZAPAN.

6587. Să se găsească numărul de 4 cifre *abcd* știind că cifrele *a*, *c*, *d* sunt în progresie aritmetică și că $d = \sqrt{cb}$.

ION A. NEGUȚ.

6588. Să se elimine *x*, *y*, *z* între relațiile

$$x(1-u) = \frac{yv\alpha''}{\gamma''+\alpha''} + \frac{(1-y)\alpha'}{\gamma'+\alpha'} = \frac{zw\alpha''}{\alpha''+\beta''} + \frac{(1-z)\alpha'}{\alpha'+\beta'},$$

$$\frac{xu\beta''}{\beta''+\gamma''} + \frac{(1-x)\beta'}{\beta'+\gamma'} = y(1-v) = \frac{zw\beta''}{\alpha''+\beta''} + \frac{(1-z)\beta'}{\alpha'+\beta'},$$

$$\frac{xu\delta''}{\beta''+\delta''} + \frac{(1-x)\gamma'}{\beta'+\gamma'} = \frac{yv\gamma''}{\gamma''+\alpha''} + \frac{(1-y)\gamma'}{\gamma'+\alpha'} = z(1-w),$$

iar din rezultat, să se determine *u*, *v*, *w*, când α', α'', ... etc. sunt cunoscute și diferite de zero. Să se dea o interpretare geometrică ecuațiilor date și rezultatelor obținute.

M. GHERMĂNESCU.

6589. Se consideră un împrumut de V lei contractat cu un procent unitar *r*, amortizabil în *n* ani după sistemul olandez, cu anuități $a_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ sau după sistemul francez cu anuități constante *a*.

1°. Să se arate că metoda olandeză oferă o amortizare mai rapidă decât metoda franceză.

2°. Se poate determina un număr $p(n, r)$, funcțiune de *n* și *r* astfel ca să avem

$$a_i > a \text{ pentru } i < p(n, r) \; ; \; a_i < a \text{ pentru } i > p(n, r).$$

Se va calcula efectiv acest număr pentru $n = 100$ și $r = 0{,}025$.

3°. Să se arate că $p(n, r)$ crește cu *n* — procentul fiind constant — și să se determine marginea sa superioară.

4°. Pentru *n* constant, $p(n, r)$ descrește când *r* crește. Se vor găsi marginile superioară și inferioară ale numărului $p(n, r)$ în acest caz.

B. BARBĂLAT.

6590. Să se arate că dacă se notează $x + \frac{1}{x} = y$, atunci

$$x^n + \frac{1}{x^n} = y^n + \sum_{k=1} (-1)^k \frac{n}{k} C_{n-k-1}^{n-2k} y^{n-2k},$$

limita superioară a lui k fiind $\frac{n}{2}$ sau $\frac{n-1}{2}$ după cum n este *par* sau *impar*.

GH. D. SIMIONESCU.

6591. Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu, iar x, y, z numere reale oarecare, atunci

$$2\sum [a(1+yz)\sqrt{1+x^2}] \leq (a+b+c)\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}.$$

C. IONESCU-ŢIU.

6592. Se consideră un triunghiu ABC de ortocentru H şi tangenta t în A la cercul ABC. Fie B_1, B_2 şi C_1, C_2 respectiv proiecţiile vârfurilor B şi C pe AC, AB şi tangenta t.

1°. Să se arate că dreptele B_1B_2, C_1C_2 şi AH sunt concurente într'un punct ω.

2°. Se cere locul lui ω când A descrie cercul ABC, iar B şi C rămân fixe.

I. A. BARBU.

6593. Fie C_a, C_b două cercuri ortogonale de centre O_a, O_b; A, B punctele lor comune şi O punctul de întâlnire al dreptelor O_aO_b, AB. C_i fiind un cerc de centru O_i al fascicolului ortogonal fascicolului determinat de C_a, C_b, iar a_i intersecţia dreptei O_aO_i cu coarda comună cercurilor C_a, C_i şi b_i intersecţia dreptei O_bO_i cu coarda comună cercurilor C_b, C_i, să notăm α_i, β_i punctele în care cercurile de centru O şi raze $\overline{Oa_i}$, $\overline{Ob_i}$ taie dreapta AB, de aceeaşi parte a punctului O.

Să se arate că punctele α_i, β_i se corespund într'o involuţie de centru O şi puncte duble A, B.

CONST. IONESCU-BUJOR.

6594. Fie AA', BB', CC' înălțimile triunghiului ABC cu unghiurile din A și B egale. Paralela din B la AC se taie în B'' cu paralela din A la BB'. Să se demonstreze că B''A' este paralelă cu CC'.

DINU MORARU.

6595. Fie ABC un triunghiu oarecare, $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic, H ortocentrul, M mijlocul laturii BC, iar A_2 mijlocul lui AH. Se mai notează cu M_1 și M_2 proiecțiile lui M pe laturile AC și AB respectiv, cu A_2' și A_2'' proiecțiile lui A_2 pe AC și AB respectiv și cu B_1', C_1' proiecțiile lui A_2 respectiv pe BB_1 și CC_1. Cercurile ABC și AB_1C_1 se mai taie în α. Să se demonstreze că:

1°. Patrulaterul αB_1MB este inscriptibil.

2°. Patrulaterul αC_1MC este inscriptibil.

3°. Patrulaterul $MM_1M_2\alpha$ este inscriptibil.

4°. Patrulaterul $A_1A_2A_2'C_1'$ este inscriptibil.

5°. Patrulaterul $A_1A_2A_2''B_1'$ este inscriptibil.

6°. Dreapta αM împreună cu celelalte două asemănătoare sunt concurente.

VIRGIL CLAUDIAN.

6596. Fiind dat triunghiul ABC, să se afle locul geometric al punctelor M ale căror triunghiuri podare sunt automediane. Să se considere și cazul când triunghiul ABC este el însuși automedian, de exemplu cu BC ca latură mijlocie.

ANDREI DOBRESCU.

6597. O dreaptă variabilă (Δ) taie o conică (C) în punctele α, β.

1°. Dacă A, B sunt două puncte fixe pe conică, locul geometric al intersecției P a dreptelor $A\alpha$, $B\beta$, în cazul când dreapta Δ

a) se rotește în jurul unui punct fix M sau

b) se deplasează paralel cu ea însăși,

este tot o conică.

2°. Să se studieze natura acestei conice-loc geometric, în cazul când conica (C)

A) se reduce la un cerc;

B) degenerează într'un sistem de drepte concurente.

PETRE P. TEODORESCU.

6598. Prin punctul de rebrusment O al unei cisoide drepte se duc două coarde variabile perpendiculare OA, OB.

Să se demonstreze relaţia:

$$\overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}^2 (\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 3d^2) = d^6,$$

d fiind diametrul cercului de bază.

Să se găsească o relaţie asemănătoare, presupunând că în locul coardelor perpendiculare OA, OB se iau două coarde care fac un unghiu dat.

CEZAR COŞNIŢĂ.

6599. Să se determine $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ aşa încât două soluţii ale ecuaţiei

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

să fie legate prin relaţia

$$y_2 = x^n \cdot y_1$$

şi apoi să se rezolve. Generalizare pentru

$$y_2 = \varphi(y_1).$$

M. FOCŞENEANU.

6600. Forţa F, care lucrează asupra unui resort elicoidal, dă o deformare f a resortului, care este proporţională cu forţa F şi cu numărul de spire n:

$$f = kn\,\mathrm{F},$$

k fiind sensibilitatea resortului în *mm*/tonă.

Dacă două resoarte cu sensibilitatea $k_1 = 45$ *mm*/tonă $n_1 = 13$ spire, cu o lungime $l_1 = 200$ *mm* şi $k_2 = 60$ *mm*/tonă $n_2 = 15$ spire şi $l_2 = 250$ *mm*, se montează pe aceeaşi axă, unul după altul, comprimându-le la o lungime $l = 400$ *mm*, mai mică decât suma lungimilor lor, să se afle forţa ce va lucra în cele două resoarte.

C. C. TEODORESCU.

ERATĂ. La pag. 214, vol. LIV, la Chestiuni de examen, Algebra — se va adăuga la 1 şi 2 modulo 23.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi s'au reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), probleme propuse (P), şi probleme rezolvate, dela:

Berdan Constantin (4698, 6232, 6522, 6563); *Comănescu S. Valerian* (6536); *Constantinescu I. Gh.* (5871, 6290, 6350, 6386, 6416); *Deleanu A. Aristide* (6501, 6502, 6503, 6504, 6505); *Diaconescu C. Constantin* (P); *Dodu A. Eugen* (6417, 6502, 6504); *Dragomir I. Dan* (6503, 6504, 6531, 6532, 6536, P); *Enescu G. George* (5593, 6323, 6532); *Negrea A. Mircea* (6469, 6524); *Orănescu O. Amedeu* (N); *Popovici D. Dan* (6346, 6416, 6446, 6495, 6532); *Stănescu D. Cristian* (5136, 6417, 6426, 6502, 6503, 6513); *Tâlmaciu I. Marioara* (5129, 6424, 6471, 6503, 6504, 6505, 6509, 6524, 6526, 6529, 6532, 6533, 6564, 6565, 6572, 6574); *Teleman A. Kostake* (6272, 6290, 6322, 6325, 6334, 6335, 6338, 6343, 6354, 6378, 6388, 6416, 6429, 6446, 6473, 6482, 6516, 6559, 6564, 6565, 6574, 6576, 6580); *Teleman A. Silviu* (5129, 6290, 6322, 6340, 6343, 6354, 6371, 6380, 6398, 6418, 6420, 6465, 6522, 6564, 6574, 6576); *Teodorescu Ion* (4256, N, P); *Teodorescu P. Petre* (N, P); *Visarion A. Viorel* (6125); *Zănescu Liviu* (6532).

Orariul Bibliotecilor „Gazeta Matematică"

Sălile de bibliotecă sunt deschise după următorul orariu:

Localul din Calea Griviţei Nr. 158: In fiecare zi de lucru dela 9 la 12, iar Miercurea dela 9 la 12 şi dela 16 la 20.

Casa „I. Ionescu" din Str. Răsuri Nr. 25: Luni şi Vineri dela 8 la 10, Marţi şi Miercuri dela 16 la 20.

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele şi problemele propuse, care se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, XII şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *Gh. I. Liteanu.* . . Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a). . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . Lei 230

Pentru trimiterea prin poştă a volumelor de mai sus, se va adăoga câte 40 lei pentru fiecare volum.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 800

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 360

Abonamentele şi ori-ce sume se pot trimite la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa :

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 14480.

8949

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIV

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1949

SUMARUL

1. Congresul Intelectualilor din R. P. R. pentru apărarea păcii şi culturii. . . . *Gazeta Matematică*
2. Către corespondenţii şi abonaţii noştri { *N. Profiri, V. Novacu, Gr. Zapan*
3. Identităţi şi analiză diofantică . . . . *V. Claudian*
4. Asupra unei limitări superioare ale modulelor rădăcinilor unei ecuaţii algebrice. *Th. Anghelută*
5. O propoziţie în genul polarei. . . . . *N. N. Mihăileanu*
6. Raport asupra premiului de aritmetică „Ion Ionescu" pe anul 1947—1948 . . { *Virgil Claudian, G. G. Constantinescu, O. N. Ţino*
7. Concursul „Gazeta Matematică" din 1949 { *Delegaţia Societăţii „Gazeta Matematică"*
8. Note matematice: 18—19.
9. Chestiuni de exemen.
10. Bibliografie.
11. Probleme rezolvate: 5646, 5734, 5918, 5928, 5945, 6036, 6057, 6153, 6202, 6252.
12. Probleme propuse: 6601—6615.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALA
1949

8949

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie, compusă în prezent din d-nii: Academician Prof.-Ing. **N. Profiri** (Ministrul Comunicaţiilor); Prof.-Univ. **Valeriu Novacu**; Inginer **Gr. Zapan** (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 21 Martie ora 17^{30}, adunarea materiei pentru Nr. 8 şi alegerea comisiunei pentru concursul *« Gazeta Matematică »*.

Luni 4 Aprilie ora 17: Facerea copertei pentru Nr. 8.

Nu se primesc articole, note, cereri, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care fac parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Septembrie 1948 sunt indicate în tabla de materii a volumului LIII.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cursul mediu şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

CONGRESUL INTELECTUALILOR DIN R.P.R. PENTRU APĂRAREA PĂCII ŞI A CULTURII

Societatea *Gazeta Matematică* urmăreşte răspândirea ştiinţelor matematice şi desvoltarea gustului pentru aceste ştiinţe în massele largi ale tineretului nostru şcolar. Ea caută să stimuleze cercetările originale teoretice şi aplicate în massa fiilor poporului muncitor.

De aceea Societatea *Gazeta Matematică* socoteşte că desvoltarea unor aptitudini pentru astfel de cercetări nu este posibilă decât într'un regim de democraţie şi de pace.

Societatea *Gazeta Matematică* găseşte că şi ea are o parte de răspundere pentru viitorul Patriei noastre, faţă de lumea muncitoare din Republica Populară Română şi faţă de istorie.

Pentru aceasta Societatea *Gazeta Matematică* salută Congresul Intelectualilor din Republica Populară Română pentru pace şi cultură, şi aderă la lupta dusă de poporul muncitor împotriva instigatorilor la război, însuşindu-şi întru totul programul Congresului arătat în ordinea de zi publicată de Comitetul de iniţiativă.

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ

CĂTRE CORESPONDENȚII ȘI ABONAȚII NOȘTRI

Reforma învățământului de toate gradele, inițiată de Partidul Muncitoresc Român și realizată de guvern deschide porțile școlilor, instituțiilor de învățământ de toate gradele, maselor largi populare și astfel cultura devine un bun al întregului popor. Aplicarea reformei învățământului la începutul anului școlar 1948 — 1949 se caracterizează printr'o îmbinare armonioasă între teorie și practică punând o teorie temeinică bazată pe științele exacte în slujba practicei. Crearea de școli și institute corespunzătoare pentru pregătirea de specialiști în toate ramurile de activitate productivă a corespuns unei necesități imperioase. In programele de învățământ stabilite se dă întâetatea științelor spre a îndruma judecata tineretului înspre metodele de gândire rațională pe cari le dau disciplina științelor matematice.

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ" spre a se încadra cât mai adecuat noului program al învățământului va da diverselor rubrici ale publicațiilor sale un cadru real corespunzător cerințelor ivite prin reforma învățământului și progresele științelor matematice. Vom insista deasemenea asupra metodei de predare a matematicilor deosebit de importante în acest moment de restructurare a învățământului nostru, inspirându-ne din marea experiență a învățământului și a tradiției școlii matematice din U. R. S. S.

Totodată dorind să punem la îndemâna tuturor revistele editate pentru stimularea învățământului Matematicilor în Republica Populară Română, reducem abonamentele anuale dela 800 lei și resp. 360 lei la:

400 lei pentru „GAZETA MATEMATICĂ"

200 lei pentru „SUPLIMENTUL CU EXERCIȚII"

Abonații la „GAZETA MATEMATICĂ" care începând dela 1 Septembrie 1948 au plătit vechile abonamente vor primi gratuit la cerere un volum jubilar sau un volum vechiu din „GAZETA MATEMATICĂ", iar abonații la „SUPLIMENTUL CU EXERCIȚII" un volum jubilar sau un volum vechiu din supliment.

Cu acest prilej, facem apel către toți corespondenții și colaboratorii „GAZETEI MATEMATICE", elevi, studenți și profesori iubitori ai științelor matematice, să caute a răspândi în cercul lor „GAZETA MATEMATICĂ" și „SUPLIMENTUL CU EXERCIȚII" pentru împlinirea imperativului de planificare a vieții noastre economice și formarea de cadre de specialiști pe care le impune construcția socialismului la noi în țară.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

Academician Prof.-Ing. N. Profiri, Prof.-Univ. V. Novacu, Ing. Gr. Zapan.

IDENTITĂȚI ȘI ANALIZĂ DIOFANTICĂ.

In rândurile care urmează voi face un efort ca să scot în evidență rolul foarte important pe care îl au un mare număr de identități algebrice în rezolvarea mai multor categorii de ecuații diofantice. Voi pleca dela cazuri foarte simple și deci cunoscute de toată lumea, pentruca apoi să ajung la expresiuni destul de dificile care să-mi ofere soluții întregi ale unor categorii noui de ecuații nedeterminate.

Această metodă, împreună cu acelea expuse de mine în paginile acestei reviste, ne va oferi materialul de bază în studiul analizei nedeterminate.

I. Plecăm dela identitatea

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy \qquad (1)$$

Dacă punem aici

$$x=p^2 \quad , \quad y=q^2$$

avem imediat soluția ecuației pitagorice

$$\boxed{A^2+B^2=C^2} \quad , \qquad (2)$$

$$A=p^2-q^2 \quad , \quad B=2pq \quad , \quad C=p^2+q^2.$$

Dacă observăm că $x-y$ și $x+y$ trebue să fie impare și prime între ele, și prime cu $4xy$, rezultă că x și y sunt de paritate diferită și prime între ele; așa dar punând $x=p^2$, $y=q^2$ obținem soluțiile de mai sus, în care p și q sunt prime între ele și de paritate diferită.

Observare. Dacă scriem relația (1) sub forma

$$(x-y)^2+2\,(2xy)=(x+y)^2,$$

putem avea imediat soluția ecuației

$$\boxed{X^2+2Y^2=Z^2} \quad , \qquad (3)$$

luând $x=2p^2$, $y=q^2$:

$$X=2p^2-q^2 \quad , \quad Y=2pq \quad , \quad Z=2p^2+q^2.$$

II. Să considerăm identitatea

$$(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2.$$

In baza ei vom avea o soluție în numere întregi a ecuației

$$\boxed{A^2+B^2=2C^2+2D^2}\ , \qquad (4)$$

și anume:

$$A=p+q\ ,\quad B=p-q\ ,\quad C=p\ ,\quad D=q.$$

Soluția depinde de *doi* parametri.

III. Fie identitatea

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2.$$

Să punem aici

$$x=2p^2\ ,\quad y=q^2\ ;\quad 2xy=2\,.\,2p^2\,.\,q^2=(2pq)^2.$$

In asemenea condițiuni, vom avea soluția ecuației următoare

$$\boxed{A^2=B^2+C^2+D^2} \qquad (5)$$

și anume cu *doi* parametri:

$$A=2p^2+q^2\ ,\quad B=2p^2\ ,\quad C=2pq\ ,\quad D=q^2.$$

Observare. Din identitatea

$$(x+y+z)^2=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2,$$

deducem tot soluții ale ecuației (5) dacă punem

$$(x+y)z=2t^2\ \ \therefore\ \ x+y=2m^2\ ,\quad z=n^2\ .\ t=mn.$$

IV. Plecând dela identitatea evidentă

$$(x+y+z)+(x-y+z)-(x+y-z)+(-x+y+z)=4z,$$

prin integrare în raport cu x și prin determinarea constantei de integrare, obținem o serie de identități pe care le vom utiliza în cele ce urmează.

Deasemenea, plecând dela identitatea evidentă cu *patru* litere

$$(x+y+z+u)-(x+y+z-u)-(x+y-z+u)-$$
$$-(x-y+z+u)+(-x+y+z+u)+(x+y-z-u)+$$
$$+(x-y+z-u)+(x-y-z+u)=0,$$

prin integrare în raport cu x și determinând constanta de integrare, găsim alte identități pe care le vom utiliza mai departe.

Să luăm deci identitatea următoare:

$$(x+y+z)^2+(x-y+z)^2-(x+y-z)^2-(-x+y+z)^2=8xz.$$

Obligând pe $8xz$ să devină un pătrat, vom pune prin urmare

$$x=2p^2 \quad , \quad y=q \quad , \quad z=r^2.$$

Avem deci soluțiile ecuației diofantice

$$\boxed{A^2+B^2=C^2+D^2+E^2} \quad , \tag{6}$$

$$A=2p^2+q+r^2 \quad , \quad B=2p^2-q+r^2,$$
$$C=2p^2+q-r^2 \quad , \quad D=-2p^2+q+r^2 \quad , \quad E=4pr.$$

Aceste soluții depind de *trei* parametri.

Putem avea o soluție cu *patru* parametri dacă punem

$$x=2p^2k \quad , \quad y=q \quad , \quad z=r^2k,$$

și avem astfel următoarele soluții:

$$A=2p^2k+q+r^2k \quad , \quad B=2p^2k-q+r^2k,$$
$$C=2p^2k+q-r^2k \quad , \quad D=-2p^2k+q+r^2k \quad , \quad E=4pkr.$$

V. Avem identitatea:

$$(x+y+z+u)^2-(x+y+z-u)^2-(x+y-z+u)^2$$
$$-(x-y+z+u)^2-(-x+y+z+u)^2+(x+y-z-u)^2$$
$$+(x-y+z-u)^2+(x-y-z+u)^2=0.$$

Prin urmare ea ne oferă soluții pentru ecuația diofantică

$$\boxed{A^2+B^2+C^2+D^2=E^2+F^2+G^2+H^2} \quad . \tag{7}$$

Aceste soluții sunt următoarele:

$$A=m+n+p+q \quad , \quad B=m+n-p-q \quad , \quad C=m-n+p-q,$$
$$D=m-n-p+q \quad , \quad E=m+n+p-q \quad , \quad F=m+n-p+q,$$
$$G=m-n+p+q \quad , \quad H=-m+n+p+q.$$

VI Fie identitatea.

$$(x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(x-y+z)^3-(-x+y+z)^3=24xyz.$$

Să obligăm pe 24 xyz să devină un cub perfect. Pentru aceasta putem pune

$$x = 3p^2 q \quad , \quad y = 3pq^2 \quad , \quad z = r^3,$$

sau $$x = m^3 \quad , \quad y = 9n^3 \quad , \quad z = p^3.$$

Vom avea atunci soluţii pentru ecuaţia

$$\boxed{A^3 + B^3 + C^3 + D^3 = E^3} \; ; \qquad (8)$$

$$A = 3p^2 q + 3pq^2 - r^3 \quad , \quad B = 3p^2 q - 3pq^2 + r^3,$$

$$C = -3p^2 q + 3pq^2 + r^3 \quad , \quad D = 6pqr \quad , \quad E = 3p^2 q + 3pq^2 + r^3;$$

sau următoarea grupă:

$$A = m^3 + 9n^3 - p^3 \quad , \quad B = m^3 - 9n^3 + p^3 \quad , \quad C = -m^3 + 9n^3 + p^3,$$

$$D = 6mnp \quad , \quad E = m^3 + 9n^3 + p^3.$$

Observarea 1. Prin considerarea identităţilor precedente, putem avea soluţii întregi şi pentru următoarele categorii de ecuaţii:

$$\boxed{\begin{array}{l} A^2 + B^2 = C^2 + D^2 + 2E^2. \qquad (9) \\ X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 2U^3, \qquad (10) \\ X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 3U^3, \qquad (11) \\ X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 4U^3, \end{array}} \quad \text{etc.} \qquad (12)$$

Observarea 2. Să privim următoarea identitate

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3\,(x + y)\,(y + z)\,(z + x).$$

Să încercăm să punem

$$(x + y)\,(y + z)\,(z + x) = 9t^3. \qquad (13)$$

Putem satisface ecuaţia (13) luând, de pildă

$$x + y = p^3 \quad , \quad y + z = q^3 \quad ; \quad z + x = 9r^3.$$

$$\therefore \qquad x + y + z = \frac{1}{2}\,(p^3 + q^3 + 9r^3),$$

$$x = \frac{1}{2}(p^3 - q^3 + 9r^3) \; , \; y = \frac{1}{2}(p^3 + q^3 - 9r^3) \; , \; z = \frac{1}{2}(-p^3 + q^3 + 9r^3).$$

Identitatea de mai sus ne dă, deci, o soluție cu *trei* parametri, a ecuației

$$\boxed{X^3+Y^3+Z^3+T^3=U^3}\ , \qquad (14)$$

și anume:

$$X=p^3+q^3-9r^3\ ,\quad Y=p^3-q^3+9r^3\ ,\quad Z=-p^3+q^3+9r^3,$$
$$T=6pqr\ ,\quad U=p^3+q^3+9r^3.$$

Acestea sunt însă soluțiile din grupul al doilea găsite pentru ecuația (8) de mai sus.

Observarea 3. In definitiv, va trebui ca $3xyz$ să fie cub perfect. Vom putea atunci pune

$$x=3\alpha^3p^2q\ ,\quad y=3\beta^3q^2r^3\ ,\quad z=\gamma^3r^2p;$$

sau deasemenea

$$x=\alpha^3p^2q\ ,\quad y=\beta^3q^2r\ ,\quad z=9\gamma^3r^2p;$$

vom avea astfel soluții cu *șase* parametri ale ecuației (8).

Deasemenea mai putem pune:

$$x=\alpha^3p^2q\ ,\quad y=\beta^3pq^2\ ,\quad z=9\gamma^3$$

și vom avea pentru ecuația (8) o soluție cu *cinci* parametri.

VII. Să considerăm identitatea:

$$(x+y+z+u)^3-(x+y+z-u)^3-(x+y-z+u)^3$$
$$-(x-y+z+u)^3+(-x+y+z+u)^3+(x+y-z-u)^3$$
$$+(x-y+z-u)^3+(x-y-z+u)^3=48\,yzu.$$

Dacă obligăm pe $48\,yzu$ să devină cub perfect, atunci vom putea pune:

$$y=2p^3\ ,\ z=2q^3\ ,\ u=9r^3 \quad \text{sau} \quad y=4p^2q\ ,\ z=pq^2\ ,\ u=9r^3.$$

Următoarea ecuație diofantică

$$\boxed{A^3+B^3+C^3+D^3+E^3=F^3+G^3+H^3+I^3}\ , \qquad (15)$$

va avea deci soluțiile cu *patru* parametri:

$$A=m+2p^3+2q^3+9r^3\ ,\quad B=-m+2p^3+2q^3+9r^3,$$
$$C=m+2p^3-2q^3-9r^3\ ,\quad D=m-2p^3-2q^3+9r^3,$$
$$E=m-2p^3+2q^3-9r^3\ ,\quad F=m+2p^3+2q^3-9r^3,$$
$$G=m+2p^3-2q^3+9r^3\ ,\quad H=m-2p^3+2q^3+9r^3,$$
$$I=12pqr;$$

sau următoarea grupă de soluţii:

$$A = m + 9r^3 + pq(4p + q) \quad , \quad B = -m + 9r^3 + pq(4p + q),$$
$$C = m - 9r^3 - pq(4p - q) \quad , \quad D = m - 9r^3 - pq(4p - q),$$
$$E = m + 9r^3 - pq(4p + q) \quad , \quad F = m - 9r^3 + pq(4p + q),$$
$$G = m + 9r^3 + pq(4p - q) \quad , \quad H = m + 9r^3 - pq(4p - q),$$
$$I = 12pqr.$$

Observare. Putem avea soluţii cu *şapte* parametri, cum am văzut mai sus.

VIII. Să considerăm acum identitatea:

$$(x+y+z+u)^4 - (x+y+z-u)^4 - (x+y-z+u)^4$$
$$-(x-y+z+u)^4 - (-x+y+z+u)^4 + (x+y-z-u)^4$$
$$+(x-y+z-u)^4 + (x-y-z+u)^4 = 192\,xyzu.$$

Obligând pe $192xyzu$ să devină puterea a patra a unei expresii, vom putea să punem

$$x = 4m^3n \quad , \quad y = 3mn^3 \quad , \quad z = 9p^3q \quad , \quad u = pq^3 \; ; \quad \text{sau}$$
$$x = 4m^4 \quad , \quad y = 9n^4 \quad , \quad z = p^4 \quad , \quad u = 3q^4.$$

Avem deci două grupe de soluţii pentru următoarea ecuaţie diofantică:

$$\boxed{A^4 + B^4 + C^4 + D^4 = E^4 + F^4 + G^4 + H^4 + I^4} \quad : \quad (16)$$

$$(\alpha) \quad \begin{cases} A = mn(4m^2 + 3n^2) + pq(9p^2 + q^2), \\ B = mn(4m^2 + 3n^2) - pq(9p^2 + q^2), \\ C = mn(4m^2 - 3n^2) + pq(9p^2 - q^2), \\ D = mn(4m^2 - 3n^2) - pq(9p^2 - q^2), \\ E = mn(4m^2 + 3n^2) + pq(9p^2 - q^2), \\ F = mn(4m^2 + 3n^2) - pq(9p^2 - q^2), \\ G = mn(4m^2 - 3n^2) + pq(9p^2 + q^2), \\ H = mn(-4m^2 + 3n^2) + pq(9p^2 + q^2), \\ I = 12mnpq; \end{cases}$$

$$(\beta) \quad \begin{cases} A = 4m^4 + 9n^4 + p^4 + 3q^4 \quad , \quad B = 4m^4 + 9n^4 - p^4 - 3q^4, \\ C = 4m^4 - 9n^4 + p^4 - 3q^4 \quad , \quad D = 4m^4 - 9n^4 - p^4 + 3q^4, \\ E = 4m^4 + 9n^4 + p^4 - 3q^4 \quad , \quad F = 4m^4 + 9n^4 - p^4 + 3q^4, \\ G = 4m^4 - 9n^4 + p^4 + 3q^4 \quad , \quad H = -4m^4 + 9n^4 + p^4 + 3q^4, \\ I = 12mnpq. \end{cases}$$

Aceste soluții depind de *patru* parametri.

Observarea 1. In legătură cu ecuația (15), se mai pot rezolva și ecuațiile de forma:

$$A^3+B^3+C^3+D^3+E^3+F^3+G^3+H^3=2U^3; \quad (17)$$
$$A^3+B^3+C^3+D^3+E^3+F^3+G^3+H^3=3U^3; \quad (18)$$
$$A^3+B^3+C^3+D^3+E^3+F^3+G^3+H^2=12U^3; \quad \text{etc.} \quad (19)$$

Observarea 2. Putem pune:

$x=6\alpha^4 m^2 np$, $y=6\beta^4 n^2 pq$, $z=3\gamma^4 p^2 qm$, $u=\delta^4 q^2 mn$

căreia îi corespunde o soluție cu *opt* parametri a ecuației (16).

Deasemenea putem pune:

$x=2\alpha^4 m^2 np$, $y=2\beta^4 n^2 pq$, $z=\gamma^4 p^2 qm$, $u=27\delta^4 q^2 mn$;

sau:

$x=4\alpha^4 m^2 np$, $y=\beta^4 n^2 pq$, $z=\gamma^4 p^2 qm$, $u=27\delta^4 q^2 mn$;

sau încă substituția

$x=12\alpha^4 m^2 np$, $y=3\beta^4 n^2 pq$, $z=9\gamma^4 p^2 qm$, $u=27\delta^4 q^2 mn$,

sau alte substituții care satisfac relația

$$12\,xyzu=\theta^4.$$

IX. Avem următoarea identitate:

$$(y+z)^3+(z+x)^3+(x+y)^3+6xyz=(x+y+z)^3+x^3+y^3+z^3.$$

Dacă aici punem, de exemplu:

$$x=4a^3 \quad , \quad y=9b^3 \quad , \quad z=c^3$$

atunci ecuația diofantică

$$X^3+Y^3+Z^3+T^3=U^3+V^3+W^3+S^3 \quad , \quad (20)$$

are următoarele soluțiuni cu *trei* parametri:

$X=9b^3+c^3$, $Y=4a^3+c^3$, $Z=4a^3+9b^3$, $T=6abc$,

$U=4a^3+9b^3+c^3$, $V=4a^3$, $W=9b^3$, $S=c^3$.

Observare. Trebue să satisfacem relaţiunea

$$abcd = \theta^2.$$

Vom putea pune atunci

$$a = \alpha^2 mn \quad , \quad b = \beta^2 np \quad , \quad c = \gamma^2 pq \quad , \quad d = \delta^2 qm.$$

Obţinem atunci pentru ecuaţia (22) o soluţie cu *opt* parametri.

XII. Identitatea

$$x^4 = y^4 + z^4 = 2x^2 y^2 + 2y^2 z^2 + 2z^2 x^2,$$

este valabilă numai dacă $x + y + z = 0$.

Insă o ecuaţie de forma

$$\boxed{A + B + C = 0}$$

poate fi satisfăcută în numere întregi, dacă luăm

$A = y - z$, $B = z - x$, $C = x - y$; sau

$A = x(y - z)$, $A = y(z - x)$, $C = z(x - y)$; sau

$A = y + z - 2x$, $B = z + x - 2y$, $C = x + y - 2z$; sau

$A = a(bc')$, $B = b(ca')$, $C = c(ab')$,

unde o notaţie de forma $(\alpha\beta)$, reprezintă un determinant de ordinul al doilea în care s'au indicat termenii din diagonala principală.

Deasemenea putem lua

$$A = (ad)(bc) \quad , \quad B = (bd)(ca) \quad , \quad B = (cd)(ab),$$

unde s'a notat

$$(ad) = a_1 d_2 - a_2 d_1 \quad , \quad (bc) = b_1 c_2 - b_2 c_1, \text{ etc.}$$

Deasemenea o ecuaţie de forma

$$\boxed{A + B + C + D = 0}$$

poate fi rezolvată în numere întregi luând

$A = y + z + t - 3x$, $B = z + t + x - 3y$, $C = t + x + y - 3z$, $D = x + y + z - 3t$;

sau luând

$A = a(bc'd'')$, $B = b(cd'a'')$, $C = c(da'b'')$, $D = d(ab'c'')$,

unde o notaţie de forma $(\alpha\beta\gamma)$ reprezintă un determinant de ordinul III, cu indicarea termenilor din diagonala principală.

Observare. Putem pune:

$$x = 6\alpha^3 m^2 n \quad , \quad y = 6\beta^3 n^2 p \quad , \quad z = \gamma^3 p^2 m;$$

sau următoarea substituție:

$$x = 4\alpha^3 m^2 n \quad , \quad y = \beta^3 n^2 p \quad , \quad z = 9\gamma^3 p^2 m.$$

Vom putea avea astfel soluții cu *șase* parametri pentru ecuația (20).

X. Identitatea următoare

$$(y+z-2x)^4+(z+x-2y)^4+(x+y-2z)^4=18\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2,$$

ne dă o soluție pentru ecuația

$$\boxed{X^4 + Y^4 + Z^4 = 2U^2} \quad , \qquad (21)$$

dacă în prealabil, punem:

$$y - z = A \quad , \quad z - x = B \quad , \quad y - x = A + B.$$

Avem, după oarecari transformări

$$X=A+2B \quad , \quad Y=B+2A \quad , \quad Z=A-B \quad , \quad U = 3(A^2+AB+B^2).$$

Aplicație numerică. Luând $A = 4$, $B = 2$ avem

$$8^4 + 10^4 + 2^4 = 2 \cdot 84^2 . (= 14112).$$

XI. Avem identitatea

$$a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 d^2 + b^2 c^2 d^2 + abcd\,(a+b+c+d)^2 =$$
$$= (abc + abd + acd + bcd)^2 + abcd\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Să punem aici, de pildă

$$a = m^2 \quad , \quad b = n^2 \quad , \quad c = p^2 \quad , \quad d = q^2;$$

vom avea atunci o soluție a ecuației

$$\boxed{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 = F^2 + G^2 + H^2 + I^2 + J^2} \quad , \qquad (22)$$

cu patru parametri:

$$A = m^2 n^2 p^2 \quad , \quad B = n^2 p^2 q^2 \quad , \quad C = p^2 q^2 m^2 \quad , \quad D = q^2 m^2 n^2,$$
$$E = mnpq\,(m^2 + n^2 + p^2 + q^2),$$
$$F = m^2 n^2 p^2 + n^2 p^2 q^2 + p^2 q^2 m^2 + q^2 m^2 n^2,$$
$$G = m^3 npq \quad , \quad H = mn^3 pq \quad , \quad I = mnp^3 q \quad , \quad J = mnpq^3.$$

In asemenea condiţiuni, ecuaţia diofantică

$$\boxed{X^4 + Y^4 + Z^4 = 2U^2 + 2V^2 + 2W^2}\ , \qquad (23)$$

are următoarele soluţii generale:

$$X = a(bc' - b'c)\ ,\ Y = b(ca' - c'a)\ ,\ Z = c(ab' - a'b),$$
$$U = bc\,(ac' - a'c)\,(ab' - a'b),$$
$$V = ca\,(bc' - b'c)\,(ba' - b'a),$$
$$W = ab\,(ca' - c'a)\,(cb' - c'b)\ ;$$

sau mai generale:

$$X = (a_1 d_2 - a_2 d_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1),$$
$$Y = (b_1 d_2 - b_2 d_1)(b_1 c_2 - c_2 a_1),$$
$$Z = (c_1 d_2 - c_2 d_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1),$$
$$U = (b_1 d_2 - b_2 d_1)(c_1 d_2 - c_2 d_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 c_2 - a_2 c_1),$$
$$V = (c_1 d_2 - c_2 d_1)(a_1 d_2 - a_2 d_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1)(b_1 a_2 - b_2 a_1),$$
$$W = (a_1 d_2 - a_2 d_1)(b_1 d_2 - b_2 d_1)(c_1 a_2 - c_2 a_1)(c_1 b_2 - c_2 b_1).$$

XIII. Ne propunem acum să rezolvăm ecuaţia

$$\boxed{X^5 + Y^5 + Z^5 + T^5 = 5U^2}\ . \qquad (24)$$

Plecăm dela identitatea următoare

$$(x+y+z)^5 + (x-y-z)^5 + (-x+y-z)^5 + (-x-y+z)^5 = 80\,xyz\,(x^2+y^2+z^2).$$

Să punem în membrul al doilea

$$x = bc\ ,\ y = ca\ ,\ z = ab.$$

$$\therefore\ xyz = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2\ ;\ b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 = t^2. \qquad (25)$$

Pentru a rezolva ecuaţia (25) este suficient să punem mai departe:

$$bc = p^2 + q^2 - r^2\ ,\ ca = 2pr\ ,\ ab = 2qr\ ,\ t = p^2 + q^2 + r^2.$$

Din ecuaţiile a doua şi a treia putem lua

$$a = 2r\ ,\ b = q\ ,\ c = p;$$

introducând în prima, calculele făcute găsim:

$$p^2 - pq + q^2 = r^2. \qquad (26)$$

Pentru a rezolva ecuaţia (26) punem:

$$p = 1 + \alpha k \quad , \quad q = 1 + \beta k \quad , \quad r = 1 + \gamma k.$$

Găsim imediat

$$k = \frac{2\gamma - \alpha - \beta}{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2} .$$

$$\therefore \quad p = -2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\gamma \quad , \quad q = \alpha^2 - 2\alpha\beta - \gamma^2 + 2\beta\gamma \, ,$$

$$r = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma.$$

Dacă aici punem

$$\gamma - \alpha = A \quad , \quad \beta - \gamma = B \quad , \quad \beta - \alpha = A + B,$$

deducem valorile

$$p = B\,(2A + B) \quad , \quad q = A\,(2B + A) \quad , \quad r = A^2 + AB + B^2.$$

$$\therefore \quad a = 2\,(A^2 + AB + B^2) \quad , \quad b = A\,(A + 2B) \quad , \quad c = B\,(B + 2A).$$

Prin urmare avem:

$$x = AB\,(A + 2B)\,(B + 2A),$$

$$y = 2B\,(B + 2A)\,(A^2 + AB + B^2),$$

$$z = 2A\,(A + 2B)\,(A^2 + AB + B^2),$$

$$t = 2A^4 + 6A^3B + 11A^2B^2 + 6AB^3 + 2B^4.$$

Prin urmare soluţiile ecuaţiei (24) care depind de *doi* parametri sunt:

$$X = AB\,(A+2B)\,(B+2A) + 2\,(A^2+AB+B^2)\,(A^2+4AB+B^2),$$

$$Y = AB\,(A+2B)\,(B+2A) - 2\,(A^2+AB+B^2)\,(A^2+4AB+B^2),$$

$$Z = 2B\,(B+2A)\,(A^2+AB+B^2) - A\,(A+2B)\,(2A^2+4AB+3B^2),$$

$$T = 2A\,(A+2B)\,(A^2+AB+B^2) - B\,(2A+B)\,(3A^2+4AB+2B^2),$$

$$U = 8AB(A+2B)(B+2A)(A^2+AB+B^2)(2A^4+6A^3B+11A^2B^2+6AB^3+2B^4).$$

* * *

XIV. Considerând identitatea

$$(aa' + bb')^2 + (ab' - a'b)^2 = (aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2 =$$

$$= (a^2 + b^2)\,(a'^2 + b'^2),$$

avem deci, pentru ecuaţia diofantică

$$\boxed{A^2 + B^2 = C^2 + D^2} \quad , \qquad (27)$$

soluţia foarte generală:

$$A = aa' + bb' \quad , \quad B = ab' - a'b \quad , \quad C = aa' - bb' \quad , \quad D = ab' + a'b.$$

Dacă se cunosc două sisteme (a, b, c), (a', b', c') de soluții ale ecuației pitagorice

$$A^2 + B^2 = C^2, \tag{28}$$

adică

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad , \quad a'^2 + b'^2 = c'^2,$$

atunci și sistemul

$$aa' + bb' = (m^2 - n^2)(p^2 - q^2) + 4mnpq,$$
$$ab' - a'b = 2pq(m^2 - n^2) - 2mn(p^2 - q^2),$$
$$cc' = (m^2 + n^2)(p^2 + q^2),$$

reprezintă o soluție a ecuației (28), unde s'a însemnat

$$\left.\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \quad , \quad b = 2mn \quad , \quad c = m^2 + n^2, \\ a' &= p^2 - q^2 \quad , \quad b' = 2pq \quad , \quad c' = p^2 + q^2. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

In adevăr, avem

$$aa' + bb' = (mp + nq)^2 - (mq - np)^2,$$
$$ab' - a'b = 2(mp + nq)(mq - np),$$
$$cc' = (mp + nq)^2 + (mq - np)^2,$$

care sunt *de aceeași formă* ca și (29).

XV. Avem identitățile:

$$(aa' + bb' + cc')^2 + (ab' - a'b)^2 + (ac' - a'c)^2 + (bc' - b'c)^2$$
$$= (aa' - bb' - cc')^2 + (ab' + a'b)^2 + (ac' + a'c)^2 + (bc' - b'c)^2$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

De aici deducem soluția generală a ecuației:

$$\boxed{A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2} : \tag{30}$$

$$A = aa' + bb' + cc' \quad , \quad B = ab' - a'b \quad , \quad C = ac' - a'c,$$
$$D = aa' - bb' - cc' \quad , \quad E = ab' + a'b \quad , \quad F = ac' + a'c.$$

Caz particular. Luând $c' = 0$, avem identitățile:

$$(aa' + bb')^2 + (ab' - a'b)^2 + (a'c)^2 + (b'c)^2 = (aa' - bb')^2$$
$$+ (ab' + a'b)^2 + (a'c)^2 + (b'c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2).$$

Să punem:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2, \tag{31}$$
$$a'^2 + b'^2 = d'^2. \tag{32}$$

Cunoscând soluţiile ecuaţiilor (31) şi (32) adică

$$a = l^2 + m^2 - n^2 \quad , \quad b = 2ln \quad , \quad c = 2mn \quad , \quad d = l^2 + m^2 + n^2,$$

$$a' = p^2 - q^2 \quad , \quad b' = 2pq \quad , \quad d' = p^2 + q^2,$$

avem soluţia cu *cinci* parametri pentru ecuaţia

$$\boxed{X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = U^2} \; : \qquad (33)$$

$$\begin{aligned} X &= aa' \pm bb' = (p^2 - q^2)\,(l^2 + m^2 - n^2) \pm 4\,lnpq, \\ Y &= ab' \mp a'b = 2pq\,(l^2 + m^2 - n^2) \mp 2ln\,(p^2 - q^2), \\ Z &= a'c \quad\;\; = 2mn\,(p^2 - q^2), \\ T &= b'c \quad\;\; = 4mnpq, \\ U &= dd' \quad\;\; = (l^2 + m^2 + n^2)\,(p^2 + q^2). \end{aligned}$$

Dacă punem

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \quad , \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = d'^2.$$

adică luăm

$$\begin{aligned} a &= l^2 + m^2 - n^2 \quad , & a' &= p^2 + q^2 - r^2, \\ b &= 2ln \;, & b' &= 2pr \;, \\ c &= 2mn, & c' &= 2qr, \\ d &= l^2 + m^2 + n^2 \quad , & d' &= p^2 + q^2 + r^2, \end{aligned}$$

atunci avem pentru ecuaţia (33) soluţiile:

$$\begin{aligned} X &= aa' \pm bb' \pm cc' = (l^2 + m^2 - n^2)\,(p^2 + q^2 - r^2) \pm 4\,lnpr \pm 4\,mnqr, \\ Y &= ab' \mp a'b = 2\,pr\,(l^2 + m^2 - n^2) \mp 2\,ln\,(p^2 + q^2 - r^2), \\ Z &= ac' \mp a'c = 2\,qr\,(l^2 + m^2 - n^2) \mp 2\,mn\,(p^2 + q^2 - r^2), \\ T &= bc' - b'c = 4\,lnqr - 4\,mnpr = 4\,nr\,(lq - mp), \\ U &= dd' \quad\;\; = (l^2 + m^2 + n^2)\,(p^2 + q^2 + r^2), \end{aligned}$$

care depind de *şase* parametri.

XVI. Avem identitatea:

$$\begin{aligned} &(aa' + bb' + cc' + dd')^2 + (ab' - a'b + cd' - c'd)^2 + \\ &\quad + (ac' - a'c + db' - d'b)^2 + (bc' - b'c + ad' - a'd)^2 \\ &\quad = (aa' + bb' - cc' - dd')^2 + (ab' - a'b + c'd - cd')^2 \\ &\quad + (a'c - ac' + db' + d'b)^2 + (bc' + b'c + ad' + a'd)^2 \\ &\quad = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2). \end{aligned}$$

Ea ne va da soluțiile generale ale ecuației:

$$\boxed{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = E^2 + F^2 + G^2 + H^2} : \quad (34)$$

$A = aa' + bb' + cc' + dd'$, $E = aa' + bb' - cc' - dd'$,
$B = ab' - a'b + cd' - c'd$, $F = ab' - a'b + c'd - cd'$,
$C = ac' - a'c + db' - d'b$, $G = a'c - ac' + db' + d'b$,
$D = bc' - b'c + ad' - a'd$, $H = bc' + b'c + ad' + a'd$,

care depind de *opt* parametri arbitrari.

XVII. Avem, deasemenea, identitățile

$$(aa' + bb' + cc' + dd')^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2$$
$$+ (ad' - a'd)^2 + (bd' - b'd)^2 + (cd' - c'd)^2 = (aa' + bb' - cc' - dd')^2$$
$$+ (bc' + b'c)^2 + (ca' + c'a)^2 + (ab' - a'b)^2 + (ad' + a'd)^2$$
$$+ (bd' + b'd)^2 + (cd' - c'd)^2 \quad (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)$$

De aici deducem următoarele soluții generale ale ecuației diofantice:

$$\boxed{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 = F^2 + G^2 + H^2 + I^2 + J^2} : \quad (35)$$

$A = aa' + bb' + cc' + dd'$, $B = bc' - b'c$, $C = ca' - c'a$,
$D = ad' - a'd$, $E = bd' - b'd$,
$F = aa' + bb' - cc' - dd'$, $G = bc' + b'c$, $H = ca' + c'a$,
$I = ad' + a'd$, $J = bd' + b'd$.

Aceste soluții depind de *opt* parametri.

XVIII. Dacă vom considera identitățile

$$(aa' + bb' + cc')^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2$$
$$+ (a'd)^2 + (b'd)^2 + (c'd)^2 = (aa' + bb' - cc')^2 + (bc' + b'c)^2$$
$$+ (ca' + c'a)^2 + (ab' - a'b)^2 + (a'd)^2 + (b'd)^2 + (c'd)^2$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2),$$

să punem:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 \quad , \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = e'^2.$$

Vom avea, pentru ecuația diofantică

$$\boxed{X^2+Y^2+Z^2+S^2+U^2+V^2+W^2=T^2}\ , \qquad (36)$$

următoarele soluții generale, care depind de *șapte* parametri:

$$X=aa'+bb'\pm cc'\ ,\quad Y=bc'\mp b'c,$$
$$Z=ca'\mp c'a\ ,\quad S=ab'-a'b,$$
$$U=a'd\ ,\quad V=b'd\ ,\quad W=c'd\ ,\quad T=ee',$$

unde avem:

$$a=k^2+l^2+m^2-n^2\ ,\quad a'=p^2+q^2-r^2,$$
$$b=2kn\ ,\quad b'=2pr,$$
$$c=2ln\ ,\quad c'=2qr,$$
$$d=2mn\ ,$$
$$e=k^2+l^2+m^2+n^2\ ,\quad e'=p^2+q^2+r^2,$$

k, l, m, n, p, q, r fiind numere întregi pozitive sau negative.

XIX. Avem identitatea următoare:

$$(a'^2+b'^2+c'^2)\,[(ab''-a''b)^2+(bc''-b''c)^2+(ca''-c''a)^2]$$
$$=(a'a''+b'b''+c'c'')^2+[a\,(b'c''-b''c')+b\,(c'a''-c''a')$$
$$+c\,(a'b''-a''b')]^2,$$

cu următoarele condițiuni:

$$a^2+b^2+c^2=1,$$
$$aa'+bb'+cc'=0,$$
$$a'^2+b'^2+c'^2+aa''+bb''+cc''=0.$$

Ea ne dă soluția în numere întregi a ecuației diofantice:

$$\boxed{(X^2+Y^2+Z^2)\,(U^2+V^2+W^2)=S^2+T^2}\ . \qquad (37)$$

* * *

XX. Avem identitățile:

$$(x+y+z-u)+(x+y-z+u)+(x-y+z+u)$$
$$+(-x+y+z+u)=2x+2y+2z+2u,$$
$$(x+y+z-u)^2+(x+y-z+u)^2+(x-y+z+u)^2$$
$$+(-x+y+z+u)^2=4x^2+4y^2+4z^2+4u^2.$$

Ele ne dau soluțiile sistemului diofantic:

$$\left.\begin{array}{c} A+B+C+D=E+F+G+H, \\ A^2+B^2+C^2+D^2=E^2+F^2+G^2+H^2 \end{array}\right| . \qquad (38)$$

Avem soluțiile cu *patru* parametri:

$$A=a+b+c-d \ , \ B=a+b-c+d,$$
$$C=a-b+c+d \ , \ D=-a+b+c+d,$$
$$E=2a \ , \ F=2b \ , \ G=2c \ , \ H=2d.$$

XXI. Făcând mai sus $u=0$, avem următoarele identități:

$$(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(-x+y+z)^2 = 4x^2+4y^2+4z^2,$$
$$(x+y+z)+(x+y-z)+(x-y+z)+(-x+y+z) = 2x+2y+2z.$$

Aceste identități ne dau soluțiile cu *trei* parametri ale sistemului diofantic:

$$\left.\begin{array}{c} X+Y+Z+T=U+V+W, \\ X^2+Y^2+Z^2+T^2=U^2+V^2+W^2 \end{array}\right| : \qquad (39)$$

$$X=m+n+p \ , \ Y=m+n-p \ , \ Z=m-n+p,$$
$$T=-m+n+p \ , \ U=2m \ , \ V=2n \ , \ W=2p.$$

XXII. Deasemenea, avem identitățile[1]:

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2,$$
$$(x+y)+(y+z)+(z+x)=(x+y+z)+x+y+z.$$

Deducem din ele soluțiile sistemului[2] diofantic:

$$\left.\begin{array}{c} A+B+C=D+E+F+G, \\ A^2+B^2+C^2=D^2+E^2+F^2+G^2 \end{array}\right| , \qquad (40)$$

în funcție de *trei parametri* și anume:

$$A=b+c \ , \ B=c+a \ , \ C=a+b,$$
$$D=a+b+c \ , \ E=a \ , \ F=b \ , \ G=c.$$

1) Cunoscute de EULER și GOLDBACH.

2) Este tot sistemul (39) de mai sus. Identitățile dela XXI se obțin din acelea dela XXII și reciproc. Așa, de pildă, dacă în XXII punem $y+z=x_1$, $z+x=y_1$, $x+y=z_1$ obținem relațiile din XXI.

XXIII. Să mai considerăm și identitățile

$$(y+z+t)^2+(z+t+x)^2+(t+x+y)^2+(x+y+z)^2 = 2(x+y+z+t)^2+x^2+y^2+z^2+t^2,$$

$$(y+z+t)+(z+t+x)+(t+x+y)^2+(x+y+z) = 2(x+y+z+t)+x+y+z+t.$$

Din analiza lor, deducem imediat soluțiile sistemului diofantic:

$$\boxed{\begin{array}{l} A+B+C+D=2E+F+G+H+I, \\ A^2+B^2+C^2+D^2=2E^2+F^2+G^2+H^2+I^2 \end{array}} \quad (41)$$

Ele depind de *patru* parametri:

$$A=b+c+d\ ,\ B=c+d+a\ ,\ C=d+a+b\ ,\ D=a+b+c,$$
$$E=a+b+c+d\ ,\ F=a\ ,\ G=b\ ,\ H=c\ ,\ I=d.$$

XXIV. Avem identitățile

$$\begin{cases} (2y+2z-x)+(2z+2x-y)+(2x+2y-z)=3x+3y+3z, \\ (2y+2z-x)^2+(2z+2x-y)^2+(2x+2y-z)^2=(3x)^2+(3y)^2+(3z)^2. \end{cases}$$

Din cercetatea lor deducem soluțiile cu *trei* parametri ale următorului sistem diofantic:

$$\boxed{\begin{array}{l} A+B+C=D+E+F \\ A^2+B^2+C^2=D^2+E^2+F^2, \end{array}} \quad (42)$$

și anume:

$$A=2p+2q-r\ ,\ B=2q+2r-p\ ,\ C=2r+2p-q,$$
$$D=r\ ,\ E=p\ ,\ F=q.$$

XXV. Identitățile următoare mai generale:

$$[2x_2+2x_3+\ldots+2x_n-(n-2)x_1]+[2x_3+2x_4+\ldots+2x_1-(n-2)x_2]+$$
$$\ldots+[2x_1+2x_2+\ldots+2x_{n-1}-(n-2)x_n]=nx_1+nx_2+\ldots+nx_n,$$
$$[2x_2+2x_3+\ldots+2x_n-(n-2)x_1]^2+[2x_3+2x_4+\ldots+2x_1-(n-2)x_2]^2+$$
$$\ldots+[2x_1+2x_2+\ldots+2x_{n-1}-(n-2)x_n]^2=(nx_1)^2+\ldots+(nx_n)^2,$$

ne dau soluții cu n parametri pentru următorul sistem diofantic:

$$\boxed{\begin{array}{l} A_1+A_2+\ldots+A_n=B_1+B_2+\ldots+B_n \\ A_1^2+A_2^2+\ldots+A_n^2=B_1^2+B_2^2+\ldots+B_n^2 \end{array}} \quad (43)$$

Luând mai sus $n = 4$, ajungem la problema pusă la nr. XX mai înainte.

Mă opresc aici cu aceste considerațiuni. Utilizarea identităților ne-a condus la rezultate interesante și în legătură cu soluțiile unor *sisteme* nedeterminate. Evident că soluțiile generale a unor astfel de sisteme se găsesc și prin alte cercetări.

VIRGIL CLAUDIAN.

ASUPRA UNEI LIMITARI SUPERIOARE ALE MODULELOR RĂDĂCINILOR UNEI ECUAȚII ALGEBRICE

Se datorește d-lui WALSH teorema următoare [1].

Modulele rădăcinilor ecuației algebrice.

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (1)$$

sunt limitate superior de expresia.

$$|a_1| + \sqrt{|a_2|} + \ldots + \sqrt[n]{|a_n|}. \qquad (2)$$

D-l WALSH [2] a dedus teorema sa ca o consecință a memoriului citat mai sus. D-l JULES RUDNICKI a dat o altă demonstrație teoremei [3].

Iată o demonstrație mai elementară și foarte simplă, care are avantajul de a pune în evidență mijlocul de a obține expresia (2).

Observăm întâi că această expresie depinde numai de modulele coeficienților ecuației. Prin urmare, ea *este deasemenea o limită superioară pentru modulele* rădăcinilor ecuației

$$P(x) \equiv x^n - |a_1| x^{n-1} - \ldots - |a_n| = 0.$$

Pe de altă parte, rădăcina pozitivă a acestei ecuații este cea mai bună limită superioară ale acestor module. Deci pentru

---

1) J. L. WALSH, An inegality for the roots of an algebraic equation. Annals of Matematics, sec. series, vol. 25. 1923–24, pag. 286.

2) On the location of the roots of the jacobian of two binary forms. Math. Soc. vol. 24, Number 1, July 1922 pag 31.

3) JULES RUDNICKI, Sur un théorème de M. J. L. WALSH, Soc. Polon. Math. T. XI, 1932, pag. 14.

a obține o limită superioară, este destul de a găsi pentru x un număr pozitiv, care să facă polinomul $P(x)$ pozitiv.

In acest scop se poate proceda în chipul următor, punând pentru simplificarea scrierii $|a_i| = A_i$, $i = 1, \ldots, n$ și notând cu ρ numărul căutat. Avem.

$$P(\rho) = \rho^{n-1}(\rho - A_1) - A_2\rho^{n-2} - \ldots - A_n.$$

$P(\rho)$ neputând fi negativ, trebue să avem $\rho = A_1 + \rho_1$ cu $\rho_1 > 0$. Procedând în mod analog, obținem

$$P(\rho) = \rho^{n-2}(\rho\rho_1 - A_2) - A_3\rho^{n-3} - \ldots - A_n.$$

Pentru $A_1 = 0$, membrul al doilea devine

$$\rho_1^{n-2}(\rho_1^2 - A_2) - A_3\rho^{n-3} - \ldots - A_n.$$

De aici rezultă $\rho = \sqrt{A_2} + \rho_2$, unde $\rho_2 > 0$. Ținem seamă că expresia

$$P_2 = \rho\rho_1 - A_2$$

este un polinom de gradul al doilea în raport cu ρ_2, având coeficienții pozitivi. Continuând, scriem

$$P(\rho) = \rho^{n-3}(\rho P_2 - A_3) - A_4\rho^{n-4} - \ldots - A_n.$$

Apoi facem $A_1 = A_2 = 0$ și găsim

$$\rho_2^{n-3}(\rho_2^3 - A_3) - A_4\rho_2^{n-4} - \ldots - A_n.$$

De unde urmează $\rho_2 = \sqrt[3]{A_3} + \rho_3$, cu $\rho_3 > 0$. Polinomul

$$P_3 = \rho P_2 - A_3$$

este de gradul al treilea în raport cu ρ_3 și are coeficienții pozitivi. Repetând raționamentul de $i - 1$ ori se obține

$$P(\rho) = \rho^{n-i}(\rho P_{i-1} - A_i) - A_{i+1}\rho^{n-i-1} - \ldots - A_n$$

și pentru $A_1 = A_2 = \ldots = A_{i-1} = 0$ se deduce

$$\rho_{i-1}^{n-i}(\rho_{i-1}^i - A_i) - A_{i+1}\rho_{i-1}^{n-i-1} - \ldots - A_n$$

și prin urmare $\rho_{i-1} = \sqrt[i]{A_i} + \rho_i$, având $\rho_i > 0$. Polinomul $P_i = \rho P_{i-1} - A_i$ este de gradul i prin raport cu ρ_i și are coeficienții pozitivi. Pentru $i = n$, se găsește limita superioară (2).

Din demonstrație mai urmează că limita este atinsă numai când ecuația (1) ia forma

$$x^n + a_i x^{n-i} = 0.$$

Limita găsită de d-l WALSH, poate fi completată cu cea următoare [1]

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

Această chestiune o lăsăm în seama corespondenţilor *Gazetei*.

TH. ANGHELUŢĂ.

O PROPOZIŢIE IN GENUL POLAREI

1. *Considerăm o conică* C, *o dreaptă* d *şi un punct* M_0. *O secantă mobilă dusă prin* M_0 *taie conica în* M_1, M_2 *şi pe* d *în* N. *Fie* M *conjugatul armonic al lui* N *în raport cu* M_1, M_2. *Locul geometric al lui* M *este o conică* Γ; *această conică trece prin* M_0, *prin polul dreptei* d *şi prin intersecţiile conicei* C *cu dreapta* d *şi cu polara* p *a lui* M_0.

Intr'adevăr, fie P intersecţia dreptelor *d*, *p*. Pentru $N \equiv P$, $M \equiv M_0$; deci M_0 este un punct al locului şi se observă că acest punct este simplu; pe orice secantă dusă prin M_0, corespunde câte un singur punct M; deci locul, tăiat de orice dreaptă în două puncte, este o conică.

Pentru poziţii particulare ale secantei recunoaştem şi restul afirmaţiilor din enunţ.

Se ştie locul geometric al mijloacelor coardelor conicei C, duse prin M_0 este o conică γ de aceeaşi natură cu C. Fie X, Y intersecţiile dreptei *d* cu γ; când $N \equiv X$, X este mijlocul coardei M_1M_2 deci conjugatul M este la infinit, M_0X este deci o direcţie asimptotică. *Conica* Γ *loc geometric are direcţiile asimptotice* M_0X, M_0Y. Ea poate fi iperbolă, parabolă sau elipsă, după cum *d* taie, atinge ori nu taie conica γ.

2. Fie $f(M) = 0$ ecuaţia conicei C şi $d(M) = 0$ ecuaţia dreptei. Considerăm pe M şi M_0 ca puncte de bază; orice alt punct N al dreptei este definit de vectorul $M + kM_0$, $(k = -\overline{MN} : \overline{NM_0})$. Intersectăm cu conica şi avem

$$f(M) + 2kp(M, M_0) + k^2 f(M_0) = 0,$$

1) WEBER, Traité d'Algèbre Supérieure, traduit par I. GRIESS, p. 379. TH. ANGHELUŢĂ, Curs de Algebră Superioară, vol. II, p. 304.

p fiind forma polară a lui M_0 în raport cu f; fie k_1, k_2 rădăcinile acestei ecuații, ce corespund punctelor M_1, M_2. Raportul anarmonic al punctelor M_1, M_2, M, N este egal cu raportul valorilor k, corespunzătoare, punctele formează deci o diviziune armonică, dacă

$$(k_1 + k_2)(k_3 + k_4) = 2(k_1k_2 + k_3k_4);$$

dar $$k_3 = 0, \quad k_4 = -\frac{\overline{NM}}{\overline{NM_0}} = -\frac{d(M)}{d(M_0)},$$

iar $$k_1 + k_2 = -2\frac{p(M, M_0)}{f(M_0)}, \quad k_1k_2 = \frac{f(M)}{f(M_0)}.$$

Obținem, în definitiv, ecuația locului

$$p(M, M_0) \cdot d(M) = f(M) \cdot d(M_0).$$

3. *Observații. a)* Să presupunem că d *trece prin* M_0 $d(M_0) = 0$, atunci $p(M, M_0) = 0$ sau $d(M) = 0$, după cum considerăm că secanta trece prin M_0 ori că N este mobil pe d; prima interpretare corespunde polarei. *Locul geometric se reduce, în acest caz la polară.*

b) Dacă d este dreapta dela infinit a planului, $d(M) = d(M_0)$ și ecuația devine

$$f(M) = p(M, M_0),$$

ceea ce traduce enunțul unei propoziții deja folosite: *locul mijloacelor coardelor interceptate de conica* C, *pe secante mobile duse printr'un punct fix* M_0, *este o conică* γ *de aceeași natură cu* C.

c) Dacă d coincide cu polara p, conica Γ, determinată de punctele M_0 și intersecțiile d, p cu conica C — se reduce la *tangentele duse prin* M_0; ecuația lor se regăsește din (1)

$p^2(M, M_0) = f(M) \cdot f(M_0)$ căci $d(M_0) = p(M_0, M_0) = f(M)$.

d) Presupunând conica C și dreapta d date, conicele Γ depind de doi parametri: coordonatele lui M_0, există deci un punct M_0, astfel încât conica Γ să devină un cerc.

e) Dacă M_0 este în centrul O al conicei C, conica Γ apare ca un gen de extensiune a transformatei prin inversiune a dreptei d, față de conica C; ecuația acestei conice Γ se obține din (1) cu $p(M, M_0) = f(O)$, sau

$$\frac{f(M)}{f(O)} = \frac{d(M)}{d(O)}.$$

4. Când punctul M_0 descrie o curbă (m),

$$x = \lambda \quad , \quad y = \varphi(\lambda)$$

ecuația (1) reprezintă conice ce depind de λ; înfășurătoarea lor este o curbă (μ) care poate fi privită ca transformată a curbei (m). Toate curbele transformate μ trec prin trei puncte fixe: intersecțiile I și J ale dreptei d cu conica C și polul K al dreptei d.

In particular, când punctul M_0 descrie o dreaptă δ, conicele Γ formează un fascicol, deci trec prin patru puncte fixe. Trei sunt I, J, K independente de δ. Pentru a-l determina pe al patrulea, luăm pe M_0 la infinit pe δ; când secanta mobilă dusă prin M_0 este δ, N coincide cu intersecția $z = (d, \delta)$ și M coincide cu intersecția (z, δ), z fiind polara lui Z. In acest mod *facem să-i corespundă unei drepte* δ *un punct situat pe* δ; transformarea este o polaritate față de un sistem nul.

5. Să facem o transformare proiectivă[1], care transformă punctele I și J în punctele ciclice ale planului. Conica C devine un cerc de centru O; N este atunci mijlocul segmentului M_1M_2 și lui N este cercul descris pe OM_0; ca diametru.

Introducându-ne regăsim propoziția că Γ trece prin M_0, I, J și k (omologul lui O), U și V intersecțiile polarei lui M_0 cu conica C — omoloagele intersecției cercurilor C, (OM_0).

Transformarea considerată aici asociază fiecărui punct M_0 din plan, cercul (OM_0).

Mai facem o transformare prin inversiune de centru O. M_0 fiind dat, cercul asociat (OM_0) devine o dreaptă perpendiculară pe OM_0, care este chiar polara Ajungem deci la transformarea clasică, prin polare reciproce

Transformarea considerată la § 1 constă deci dintr'o transformare prin polare reciproce 3); figura o transformam printr'o inversiune 2); apoi face o transformare proiectivă 1).

Pe această cale putem regăsi rezultatele precedente. Să presupunem, de exemplu că M_0 descrie o dreaptă δ; în 3) polarele punctelor dreptei trec prin polul dreptei; cercurile (OM_0) trec deci în 2) printr'un punct fix, H, care este proiecția lui O pe δ; în 1), H rămâne punct pe δ; dar OH este polara punctului dela

1) Ideea aceasta o datoresc d-lui Prof. D. BARBILIAN.

infinit al dreptei δ, în 2); în 1), când d ajunge dreaptă la distanță finită, H este situat pe polara intersecției (d, δ).

Să cercetăm cum se transformă propoziția din 3) că dacă mai multe drepte trec printr'un punct fix, polii lor sunt pe o dreaptă. In 2) dreptele considerate devin cercuri ce trec prin O și prin alt punct fix H; M_0 este diametralul lui O într'un astfel de cerc, situat pe perpendiculara în H pe OH; deci și în 1) locul geometric al punctelor M_0, ce corespund conicelor Γ care trec prin patru puncte fixe I, J, K, H este o dreaptă ce trece prin acest punct. M_0 este polul față de conica C a celei de a doua intersecții a conicelor C, Γ.

6. Propozițiile precedente se pot extinde, fără modificări substanțiale, în spațiu.

N. N. MIHĂILEANU.

RAPOPT ASUPRA PREMIULUI DE ARITMETICĂ „ION IONESCU" PE ANUL 1947—1948

Cercetând activitatea corespondenților elevi de învățământ mediu în anul 53 al *„Gazetei Matematice"* am constatat că nici un corespondent nu are o activitate deosebită în acest domeniu pentru a fi premiat.

COMISIA PENTRU PREMIUL DE ARITMETICĂ „ION IONESCU"

VIRGIL CLAUDIAN,

G. G. CONSTANTINESCU, O. N. ȚINO.

Acest raport a fost citit și aprobat în Adunarea Generală din 14 II. 1949.

CONCURSUL „GAZETA MATEMATICĂ" DIN 1949

Pentru concursul din anul acesta al *Gazetei Matematice* s'au primit în termen 39 cereri de înscriere. In ședința din 7 Martie au fost admiși următorii candidați:

Clasa a VIII-a: *Bedrosian C. Bedros, Buzenchi E. Josette, Chiriță Vasile, Ionescu-Bujor C. Claudiu, Juster M. Dan, Lumânare V. Florea, Mihăilescu C. Niculae, Năstase C. Adriana, Petraru I. Vitalius, Roitman N. Ily, Teleman A. Kostake, Zaidman D. Sami.*

Clasa a IX-a: *Cota A. Al., Dragoş N. Lazăr, Flondor I. Ion, Florescu V. Eugeniu, Gurită C. Vasile, Hogea Grigore, Oproiu I. Adrian.*

Clasa a X-a: *Amohnoaie Epifan, Călușița I. Mioara, Constantinescu I. Gheorghe, Deleanu I. Aristide, Dragomir I. Dan, Dună D. Gheorge, Enea N. Țarină, Făcăoaru Gh. Ioan, Hangan M. Theodor, Meriu C. Gh., Neacșu Gr. Ion, Șchiopu I. Zoe, Teleman A. Silviu, Țurcanu D. Const., Visarion A. Viorel.*

Clasa a XI-a: *Neguț A. Ion, Vărzaru I. Emanoil, Vasiliu M. Florin Mircea, Zamfirescu I. Vasile.*

Probele scrise și orale pe care le va trece fiecare candidat, precum și programa analitică a materiei de concurs, sunt publicate la pag. 201 din acest volum.

Prima lucrare scrisă se va da Joi 28 Aprilie, dela ora 8^{30} la ora 11^{30}, iar a doua lucrare scrisă se va da în aceeași zi dela ora 15^{30} la ora 18^{30}.

Oralul începe Vineri 29 Aprilie ora 8^{30}.

Atât lucrările scrise cât și oralul se dau în localul *Institutului Politehnic* Calea Griviței, 132, București.

Societatea *Gazeta Matematică* va căuta, pe cât posibil, să asigure mijloace pentru venirea și cazarea la București a candidaților care în cererea de înscriere au arătat că nu au aceste mijloace, înștiințându-i din vreme.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

NOTE MATEMATICE

18. *Asupra numerelor proporționale și invers proporționale.*

Fie $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ și $\{a_1, a_2, \ldots a_s\}$ respectiv codivizorul maxim și comultiplul minim al numerelor $a_1, a_2 \ldots, a_s$.

I. *Dacă numerele* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *sunt proporționale cu numerele* $b_1, b_2, \ldots b_n$, *adică dăcă*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_n} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

atunci

$$\frac{(a_1, a_2, \ldots a_n)}{(b_1, b_2, \ldots b_n)} = \frac{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}{\{b_1, b_2, \ldots . b_n\}} = \frac{a}{b}. \tag{2}$$

In adevăr dacă presupunem că $\frac{a}{b}$ este o fracție ireductibilă, din (1) rezultă

$$a_i = ac_i \quad \text{și} \quad b_i = bc_i \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

numerele c_i fiind numere naturale.

Deci

$$\{a_1, a_2, \ldots a_n\} = \{ac_1, ac_2, \ldots ac_n\} = a\{c_1, c_2, \ldots c_n\}$$

$$(a_1, a_2, \ldots a_n) = (ac_1, ac_2, \ldots ac_n) = a(c_1, c_2, \ldots c_n)$$

și analog

$$\{b_1, b_2, \ldots b_n\} = b\{c_1, c_2, \ldots c_n\}\ ;\ (b_1, b_2, \ldots b_n) = b(c_1, c_2, \ldots c_n)$$

ceeace justifică propoziția de mai sus.

II. *Dacă numerele* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *sunt invers proporționale cu numerele* $b_1, b_2, \ldots b_n$, *adică dacă*

$$a_1 . b_1 = a_2 . b_2 = \ldots = a_n . b_n = M \qquad (3)$$

atunci

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = M. \quad (4)$$

In adevăr fie α_i (respectiv β_i) exponenții în care un număr prim oarecare p intră în descompunerea în factori primi a numerelor a_i (respectiv b). Din egalitățile (3) rezultă

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \ldots = \alpha_n + \beta_n = \gamma$$

deci valoarea maximă a lui α_i corespunde valorii minime a lui β_i și reciproc. In produsul

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$$

factorul prim p figurează deci cu exponentul γ adică cu același exponent cu care intră în descompunerea în factori a lui M. Aceasta fiind adevărat pentru toți foctorii primi ai lui M, urmează că

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = M$$

și în virtutea simetriei

$$\{a_1, a_2, \ldots a_n\}(b_1, b_2, \ldots b_n) = M$$

adică ceeace era de demonstrat.

III. Dacă în propoziția dela II facem

$$n = 2 \qquad a_1 = b_2 = a \quad \text{și} \quad b_1 = a_2 = b$$

obținem

$$(a, b)\{b, a\} = a . b \qquad (5)$$

şi deci propoziţia dela II poate fi considerată ca generalizarea relaţiei clasice (5).

Alte două cazuri particulare sunt date ca exerciţii în *Algebra (vol. I) de* OCTAV ONICESCU şi GH. GALBURĂ. Exerciţiul 15 (pag. 29) corespunde la

$$M = a_1 . a_2 \ldots a_n$$

şi exerciţiul 14 (pag. 28) la $M = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$.

In acest din urmă caz din (4) se deduce

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \frac{M}{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}} = 1$$

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \frac{\{a_1, a_2 \ldots, a_n\}}{(a_1, a_2, \ldots, a_n)},$$

iar nu $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = 1$, ceeace nu poate avea loc decât în cazul cu totul lipsit de interes

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n \qquad b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$$

IV. Cele două propoziţiuni pot fi înmânuchiate în următoarea:

Teoremă. *Dacă numerele* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sunt proporţionale sau invers proporţionale cu numerele* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *atunci are loc relaţia*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}(b_1, b_2, \ldots b_n).$$

V. Fie $a_1 . b_1 = c_1$, $a_2 . b_2 = c_2 \ldots, a_n . b_n = c_n$

Analog ca mai sus se pot stabili relaţiile:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\ (b_1, b_2, \ldots, b_n) \leqslant (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\ \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \geqslant \{c_1, c_2 \ldots, c_n\}.$$

IOAN B. FLORESCU.

19. *Generalizarea problemei 6154.* Ne propunem în rândurile de mai jos să stabilim relaţia:

$$a + (C_m^2 + C_2^1 C_m^4 + C_3^2 C_m^6 + \ldots)\left(b\cos^{m-2}\frac{C}{m} + c\cos^{m-2}\frac{B}{m}\right)$$

$$+ (C_m^6 + C_4^1 C_m^8 + C_5^2 C_m^{10} + \ldots)\left(b\cos^{m-6}\frac{C}{m} + c\cos^{m-6}\frac{B}{m}\right)$$

$$+ \ldots = (1 + C_m^2 + C_m^4 + \ldots)\left(b\cos^m\frac{C}{m} + c\cos^m\frac{B}{m}\right)$$

$$+ (C_m^4 + C_3^1 C_m^6 + C_4^2 C_m^8 + \ldots)\left(b\cos^{m-4}\frac{C}{m} + c\cos^{m-4}\frac{B}{m}\right) + \ldots$$

Intr'adevăr, în cunoscuta identitate

$$a = b\cos C + c\cos B$$

înlocuim pe cosB şi cosC prin:

$$\cos B = \cos^m \frac{B}{m} - C_m^2 \cos^{m-2} \frac{B}{m} \sin^2 \frac{B}{m} + \ldots$$

$$\cos C = \cos^m \frac{C}{m} - C_m^2 \cos^{m-2} \frac{C}{m} \sin^2 \frac{C}{m} + \ldots,$$

sau înlocuind pe sinus în funcţie de cosinus, avem:

$$\cos B = (1 + C_m^2 + C_m^4 + \ldots)\cos^m \frac{B}{m}$$

$$- (C_m^2 + C_2^1 C_m^4 + C_3^2 C_m^6 + \ldots)\cos^{m-2} \frac{B}{m}$$

$$+ (C_m^4 + C_3^1 C_m^6 + C_4^2 C_m^8 + \ldots)\cos^{m-4} \frac{B}{m}$$

$$- (C_m^6 + C_4^1 C_m^8 + C_5^2 C_m^{10} + \ldots)\cos^{m-6} \frac{B}{m} + \ldots$$

şi

$$\cos C = (1 + C_m^2 + C_m^4 + \ldots)\cos^m \frac{C}{m}$$

$$- (C_m^2 + C_2^1 C_m^4 + C_3^2 C_m^6 + \ldots)\cos^{m-2} \frac{C}{m}$$

$$+ (C_m^4 + C_3^1 C_m^6 + C_4^2 C_m^8 + \ldots)\cos^{m-4} \frac{C}{m}$$

$$- (C_m^6 + C_4^1 C_m^8 + C_5^2 C_m^{10} + \ldots)\cos^{m-6} \frac{C}{m} + \ldots$$

şi trecând termenii negativi în membrul întâiu obţinem relaţia ce ne-am propus s'o stabilim.

Câteva cazuri particulare interesante.

Pentru $m = 2$ obţinem relaţia:

$$b\cos^2 \frac{C}{2} + c\cos^2 \frac{B}{2} = p.$$

(Cul. de Tr. partea II, p. 7).

Pentru $m = 3$ relația:

$$a + 3b\cos\frac{C}{3} + 3c\cos\frac{B}{3} = 4\left(b\cos^3\frac{C}{3} + c\cos^3\frac{B}{3}\right)$$

din enunțul problemei 6154.

Pentru $m = 4$ obținem relația:

$$a + 4b\cos^2\frac{C}{4} + 4c\cos^2\frac{B}{4} = p + 4b\cos^4\frac{C}{4} + 4c\cos^4\frac{B}{4}.$$

ILIE N. CONSTANTINESCU — Student.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREȘTI

Examenul de Geometria analitică și Diferențială. Secția construcții Iunie 1948

I. Se dă curba (C) exprimată parametric prin ecuațiile

$$x = t \quad , \quad y = t^2 - 1 \quad , \quad z = t^4.$$

Se cere:

1°. Să se scrie ecuația generală a cuadricelor care conțin curba (C).

2°. Să se arate că toate aceste cuadrice sunt parabolizi eliptici sau hiperbolici.

3°. Să se găsească ecuațiile celor două plane de simetrie ale fiecărui paraboloid, precum și ecuațiile axei de simetrie și coordonatele vârfului.

Să se găsească apoi locul vârfului.

II. Să se găsească expresia razei de torsiune și ecuația planului osculator într'un punct curent M al curbei C. Să se arate apoi că prin punctul A (0, 0, 9) trec 2 plane osculatoare P_1 și P_2 ale curbei (C). Să se găsească ecuațiile lor și coordonatele punctelor M_1 și M_2 ale curbei C, în care planele osculatoare sunt P_1 și P_2.

Secția Electro Mecanică. Iunie 1948

1. Se consideră în planul a două axe perpendiculare Ox, Oy punctul

$$M\left[\frac{t(7t-4)}{2t-1} \; ; \; \frac{t(t+3)}{2t-1}\right].$$

Se cere să se arate că:

a) Punctul M descrie, când t variază o conică C. *b)* Să se scrie ecuația și să se determine centrul, axele, vârfurile și focarele reale și asimptotele.

2. Să se găsească coordonatele centrului de curbură și expresia razei de curbură a conicei C în punctul M.

3. Să se găsească punctele conicei C în care raza de curbură are o valoare minimă şi să se arate că ele coincid cu vârfurile reale ale conicei.

4. Să se scrie ecuaţia normalei la conica C în punctul M şi să se deducă apoi că printr'un punct oarecare A din plan trec în general 4 normale la conica C. Să se găsească picioarele acestor normale pe conică, când punctul A are coordonatele $A\left(\frac{7}{2}, \frac{14}{3}\right)$.

Secţia Mine şi Metalurgie

Se consideră cuadrica Q de ecuaţie $xy - z = 0$ şi punctul M de coordonate $(\alpha, \alpha^3, \alpha^4)$, unde α este un parametru. Se cere:

a) Să se determine natura cuadricei Q. Să se scrie ecuaţiile celor două familii de generatoare. *b)* Să se arate că punctul M se află pe cuadrică şi să se scrie ecuaţiile urmei (D) a planului tangent în punctul M pe planul xOy.

c) Să se găsească înfăşurătoarea (C) a dreptelor D, când α variază şi să se calculeze în funcţie de α, coordonatele punctelor de contact D al dreptei D cu înfăşurătoarea C.

d) Să se determine în funcţie de α coordonatele centrului de curbură $\mathcal{C}$ al curbei C în punctul D.

BIBLIOGRAFIE

Anais da Faculdade de Ciências do Porto. Vol. XXXII. No. 3 şi 4. G. DEDEBANT: Sur le calcul aléatoire.

Nachrichten der Österreichischen Matematischen Gesellschaft. Jänner 1949 No. 5.

Quarterly of Applied Mathematic. Vol. VI. Jan. 1949. N. 4. H. PORITSKY: Homogeneous harmonic functions. A. GLEYZAL: A mathematical formulation of continuous deformation problems.

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova.

Revista Matematica din Timişoară. Anul XXVIII. Februarie 1949. Nr. 12. D. POMPEIU: Algebra şi Aritmetica.— M. I. FOCŞENEANU: O cubică remarcabilă. Note, bibliografie, probleme propuse şi rezolvate.

GASTON CASANOVA: *Mathématique et Matérialisme dialectique.*

Metoda Marxistă de cercetare se identifică chiar prin definiţie cu metoda de cercetare ştiinţifică.

Studiul raporturilor dintre matematici şi materialismul dialectric, în cartea d-lui GASTON CASANOVA este de natură să alunge prejudecata care vrea să facă din matematici o ştiinţă aparte, un edificiu pur logic şi complet izolat de realităţi.

Pentru cine a urmărit în evoluţia istorică a matematicilor crizele pe care le-a parcurs, va apare evidentă afirmaţia că aceste crize au fost rezultatul concepţiei idealiste şi iluziilor matematicienilor şi că învingerea lor s'a datorat întotdeauna aplicării intuitive a metodei dialectice. Intuirea acestei

metode de a constitui fără îndoială unul din caracterele esențiale ale genialității matematicianilor care au produs salturi în desvoltarea acestei științe.

Am spus „intuirea" acestei metode, pentru că HEGEL însuși considera complet depărtate de dialectică științele matematice.

Cristalizarea metodei dialectice și aplicarea ei la studiul matematicilor a permis deabia mai târziu să se recunoască matematicilor caracterul lor de știință eminamente dialectică.

Evoluția noțiunii de număr constitue o perfectă confirmare a dialecticei. Numărul real nu este altceva decât sinteza dintre numărul *pozitiv* și antiteza sa numărul *negativ*, iar noțiunea generică de *număr* nu este decât sinteza dintr'o noțiune de număr real și antiteza sa numărul *imaginar*.

Definirea infinitului drept „calitatea unei cantități care poate deveni mai mare decât ori ce număr dat" cuprinde în ea înscrise câteva dintre trăsăturile fundamentale ale dialecticei: contradicția finit-infinit, schimbarea cantității în calitate și sinteza într'o formă unică a tezei „finit" și antiteza „infinit".

Plasându-se din punct de vedere al unui matematician, înăuntrul științelor matematice, d-l GASTON CASANOVA studiază cu grija numeroase exemple făcând să reiasă în mod evident conținutul dialectic atât din punct de vedere cronologic cât și logic, al desvoltării matematicilor și veșnica noutate și originalitate a sintezelor dialecticei, punând în evidență triada hegeliană.

Astfel geometria analitică, nu este altceva decât sinteza realizată de intuiția genială a lui DESCARTES între algebră și geometrie, ramuri ale matematicilor care păreau până atunci a nu avea nimic comun între ele.

Prin sinteza contradicțiilor dintre „continuu" și „discontinuu" „finit" și „infinit", „probabil" și „sigur" prin legarea făpturilor matematice de fenomenele fizice, chimice, sociale, economice și părăsirea punctului de vedere care privește funcțiile, ecuațiile, etc. ca un rezultat al inspirației divine și nu ca un efect al progresului gândirii științifice și al celorlalte științe, se pot învinge crizele desvoltării acestei științe și înlătura anarhia care vrea să facă din matematici o simplă acrobație.

D-sa nu scoate însă în evidență suficient factorii determinanți în evoluția matematicilor și nu arată strânsa legătură ce există între evoluția matematicilor și cea a celorlalte științe.

O altă lacună a lucrării o constitue lipsa analizei a o serie de ramuri ale matematicei, lipsă explicabilă prin faptul că o asemenea lucrare în loc să fie produsul munci colective a mai multor matematicieni, este rezultatul activității unei singure persoane.

Cu toate aceste lipsuri, citirea lucrării d-lui CASANOVA care constitue prima încercare de prezentare dialectică a ansamblului științelor matematice prezintă un deosebit interes atât pentru matematicieni preocupați de cercetarea matematică cât și pentru profesori de matematică cărora le va sugera calea cea mai bună pentru introducerea unor noțiuni la introducerea cărora azi au dificultăți.

AUREL PĂRVU.

PROBLEME REZOLVATE

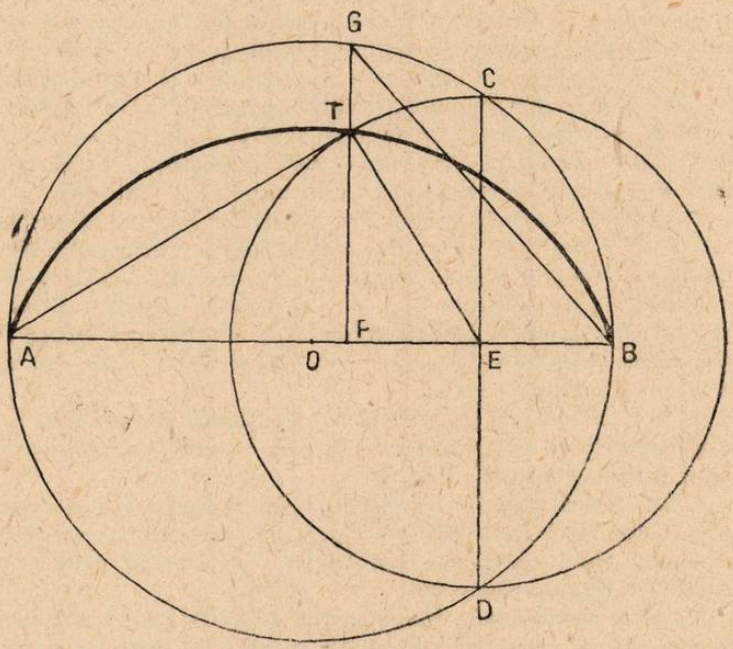
PROBLEMA 5646. *Fie* AB *un diametru fix al cercului* (O) *şi* E *un punct mobil pe* AB. *Se duce tangenta* AT *la cercul descris pe coarda* CD *perpendiculară în* E *pe* AB, *ca diametru, şi se proiectează* T *în* F *pe* AB. *Se cere:*

1°. *Locul geometric al punctului* T.

2°. *Maximul suprafeţei trapezului* CEFT.

GH. BUICLIU.

1°. Fie *g* intersecţia lui (O) cu TF. Pentru ca punctul C să se poată construi trebue ca E să fie între A şi B. Pe de altă parte pentru ca T să fie real punctul E trebue să fie cuprins



între O şi B. Când E este în (O) cercul (E) se confundă cu (O) iar T se confundă cu A. Când E vine în B cercul (E) se reduce la punctul B iar T vine în B. Fie deci E cuprins între O şi B. Observăm că TF este, prin construcţie, polara lui A faţă de

cercul (E) şi considerând şi triunghiul dreptunghic ACB se deduce

$$\overline{CE}^2 = EA \cdot EF = EA \cdot EB \quad \therefore \quad EF = EB \qquad (1)$$

Din triunghiurile dreptunghice ATE şi AGB se scoate, ţinând seamă şi de (1):

$$\overline{TF}^2 = FA \cdot FE \quad \text{şi} \quad \overline{GF}^2 = FA \cdot FB = 2 \cdot FA \cdot EF.$$

Din aceste relaţiuni se deduce

$$\overline{GF}^2 = 2 \cdot \overline{TF}^2 \quad \therefore \quad \frac{GF}{TF} = \sqrt{2}$$

care arată că T descrie elipsa având pe AB ca axă mare şi pe $\frac{AB}{\sqrt{2}}$ ca axă mică.

2°. Notând cu x valoarea comună a segmentelor FE şi EB şi cu S suprafaţa trapezului CEFT, avem

$$2S = FE\,(TF + CE) = x\left[\sqrt{2x\,(R - x)} + \sqrt{x\,(2R - x)}\right] \qquad (2)$$

unde R este raza cercului (O).

Derivăm în (2), după efectuarea tuturor calculelor şi reducerilor se obţine

$$S' = \frac{(3R - 4x)\sqrt{2Rx - x^2} + (3R - 2x)\sqrt{2Rx - 2x^2}}{\sqrt{2\,(R - x)\,(2R - x)}}.$$

Pentru maximul şi minimul lui S se anulează numărătorul lui S'. Avem succesiv

$$\frac{3R - 4x}{3R - 2x} = -\sqrt{\frac{2R - 2x}{2R - x}} \quad \therefore \quad x\,(8x^2 - 24Rx + 15R^2) = 0$$

ale cărei rădăcini sunt

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{6}}{4} R < R \quad , \quad x_3 = \frac{6 + \sqrt{6}}{4} R > R.$$

Rădăcina x_1 corespunde minimului, trapezul reducându-se la punctul B. Rădăcina x_2 corespunde maximului, punctul F se află între O şi B. Rădăcina x_3 fiind mai mare ca R plasează pe E în afara segmentului OB deci punctul C este imaginar.

Ducând pe x_2 în (2) se găseşte maximul lui S. Făcând toate calculele se ajunge la

$$S_{max} = \frac{(6 - \sqrt{6})\left[\sqrt{4\sqrt{6} - 9} + \sqrt{\frac{2\sqrt{6} + 3}{2}}\right]}{16} R^2 = 0{,}6367\ldots R^2 \qquad (3)$$

Notă. 1. Punctul 1°. al problemei este redijat după soluţia primită, la data propunerei ei, dela d-l M. AL. VASILESCU-ŞTABU. D-sa s'a înşelat însă la aflarea maximului, considerând fără vre-o demonstraţie că maximul are loc când E vine în O.

2. D-l M. C. MANOLACHE (Bacalaureat) şi d-l P. P. DRĂGHICESCU au dat foarte bune soluţii analitice luând ca axe pe AB şi diametrul perpendicular în O pe AB, iar ca variabilă pe $OE = \lambda$ cu $0 < \lambda \leqslant R$ şi găsind elipsa

$$x^2 + 2y^2 - R^2 = 0.$$

ca loc al lui T iar maximul lui S sub forma (3). D-l M. C. MANOLACHE a dat şi rezultatul numeric (3) sub forma $S_{max} = 0{,}63\ R^2$.

3. D-nii: I. I. BUZINCU, I. ST. TEODORESCU-Ploeşti, D. GH. VASILIU, M. V. SOARE, D. V. PĂLĂCEANU, E. N. WEGENER, CONST PANTELIMON au rezolvat problema prin geometria analitică ca la (2) dând însă fie-care câte un rezultat diferit pentru S_{max} şi diferit de cel adevărat. Singur d-l I. I. BUZINCU s'a apropiat de rezultatul (3) dând rezultatul numeric sub forma $S_{max} = 0{,}64\ R^2$.

4. D-l M. R. CONSTANTINESCU a rezolvat problema pe cale analitică luând ca variabilă unghiul COE şi găsind rezultatul exact pentru punctul 1° dar greşind total la aflarea maximului.

GH. B.

PROBLEMA 5734. *Fie* M *centrul izodinamic intern al unui triunghiu* ABC, *înscris în cercul* O *şi* a, a' *picioarele a două izogonale* A_a, A'_a *în unghiul* A. *Pentru a uşura construcţiile se vor lua* a *şi* a' *între* B *şi* C. *Cercul* BMC *întâlneşte în* a_1 *şi* a'_1 *pe* M_a *şi* M'_a, *iar* $a_1a'_1$ *taie în* C', B' *pe* MC *şi* MB. *Prin* C' *şi* B' *se duc paralele la* CA *şi* BA, *care sunt întâlnite respectiv în* b_1, b'_1 *şi* c_1, c'_1 *de cercul cu centrul în* O *şi trecând prin* a_1, a'_1.

Să se demonstreze: 1°. *Că* Mb_1, Mb'_1 *şi* Mc_1, Mc'_1 *sunt izogonale respectiv în unghiurile* CMA *şi* BMA.

2. *Că pentagoanele* $b_1CMAb'_1$ *şi* $c_1BMAc'_1$ *sunt inscriptibile.*

GH. BUICLIU.

Se ştie că cele două centre izodinamice ale unui triunghiu ABC se găsesc pe dreapta OK ce uneşte centrul cercului circumscris cu punctul lui LEMOINE al triunghiului ABC. Deci, ceeace ne interesează, O se găseşte pe linia centrelor isodinamice [1].

---

1) TR. LALESCU. *La géométrie du triangle.*

După relația lui STEINER, și proprietățile punctului M[1] avem:

$$\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \cdot \frac{\overline{a'B}}{\overline{a'C}} = \frac{\overline{AB^2}}{\overline{AC^2}}.$$

Deci:

$$\therefore \quad \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \cdot \frac{\overline{a'B}}{\overline{a'C}} = \frac{\overline{MB^2}}{\overline{MC^2}},$$

adică Ma și Ma' sunt isogonale în triunghiul BMC.

Deci $a_1a_1' \parallel BC$ adică trapezul BCa_1a_1' este isoscel. Există deci un cerc cu centrul în O și care trece prin a_1 și a_1'.

Fie A' punctul în care paralela din B' la AB taie pe MA.

Deci

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}},$$

adică paralela din c' la cA trece prin A', iar triunghiurile ABC, A'B'C' sunt omotetice, centrul de omotetie fiind M, care este deci centrul isodinamic intern comun al acestor două triunghiuri. Fiindcă centrul cercului circumscris triunghiului A'B'C' se găsește pe MO rezultă că MO este linia centrelor isodinamice a triunghiului A'B'C'.

In *Gazeta Matematică*, vol. XLVIII pag. 220 s'a arătat că dacă un cerc cu centrul pe linia centrelor isodinamice trece prin picioarele a două isogonale din același unghiu, el determină pe celelalte două laturi picioarele a câte două drepte isogonale în unghiurile opuse.

Rezultă că dreptele $B'b_1$ și $B'b_1'$ sunt isogonale în unghiul A'B'C'. Deci:

$$\frac{\overline{b_1C'}}{\overline{b_1A'}} \cdot \frac{\overline{b_1'C'}}{\overline{b_1'A'}} = \frac{\overline{B'C'^2}}{\overline{B'A'^2}}. \qquad (1)$$

Am arătat însă că M este centrul isodinamic al triunghiului A'B'C'. Deci:

$$\frac{\overline{MC'}}{\overline{MA'}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'A'}}$$

și relația (1) devine:

$$\frac{\overline{b_1C'}}{\overline{b_1A'}} \cdot \frac{\overline{b_1'C'}}{\overline{b_1'A'}} = \frac{\overline{MC'^2}}{\overline{MA'^2}},$$

1) TR. LALESCU. *La géométrie du triangle.*

ceeace demonstrează că dreptele Mb_1, Mb_1' sunt isogonale în unghiul CMA.

2°. Fiindcă:

$$\overline{C'a_1} \cdot \overline{C'a_1'} = \overline{C'C} \cdot \overline{C'M} = \overline{C'b_1} \cdot \overline{C'b_1'},$$

rezultă că punctele C, M, b_1, b_1' sunt pe acelaşi cerc.

Din relaţiile:

$$\frac{\overline{C'C}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{A'A}}{\overline{AM}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{C'M}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{A'M}}{\overline{AM}}$$

deducem:

$$\overline{C'C} \cdot \overline{C'M} = \overline{A'A} \cdot \overline{A'M} \cdot \frac{\overline{CM}^2}{\overline{AM}^2}$$

Iar din relaţiile

$$\frac{\overline{b_1C'}}{\overline{b_1A'}} \cdot \frac{\overline{b_1'C'}}{\overline{b_1'A'}} = \frac{\overline{B'C'}^2}{\overline{B'A'}^2} = \frac{\overline{MC'}^2}{\overline{MA'}^2} = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{MA}^2}$$

deducem:

$$\overline{C'b_1} \cdot \overline{C'b_1'} = \overline{A'b_1'} \cdot \overline{A'b_1} \cdot \frac{\overline{MC}^2}{\overline{MA}^2}.$$

Deci, fiindcă

$$\overline{C'C} \cdot \overline{C'M} = \overline{C'b_1} \cdot \overline{C'b_1'},$$

rezultă

$$\overline{A'A} \cdot \overline{A'M} = \overline{A'b_1} \cdot \overline{A'b_1'},$$

adică şi punctul A se găseşte pe cercul CMb_1b_1'.

Puteam demonstra aceasta prin câteva egalităţi de unghiuri:

$$\sphericalangle b_1MC = \sphericalangle b_1b_1'C = \sphericalangle b_1'b_1A = \sphericalangle b_1'MA.$$

Ce am demonstrat pentru punctele b_1 şi b_1' se aplică întocmai punctelor c_1, c_1' dacă ele există.

P. P. DRĂGHICESCU.

Notă. W *fiind un centru isodinamic al unui triunghiu* $A_1A_2A_3$, *se consideră isogonalele* A_ia_i, A_ia_i'. *Dreptele* Wa_i, Wa_i' *întâlnesc un cerc concentric cu cercul* $A_1A_2A_3$ *în* b_i, b_i' $(i = 1, 2, 3)$. *Dacă unul din pentagoanele* $MA_2A_3b_1b_1'$, $MA_3A_1b_2b_2'$, $MA_1A_2b_3b_3'$ *este inscriptibil, şi celelalte două sunt la fel.*

Rezultă din demonstraţia dela punctul 2.

P. P. DRĂGHICESCU.

PROBLEMA 5918. *Un corp* A *(de rotaţie în jurul axei* OO') *de massă* M = 10 *unităţi de massă în sistemul technic, este aşezat deasupra altui corp* B *(tot de rotaţie în jurul axei* OO') *de massă* m=5 *unităţi de massă, axele ambelor corpuri coincizând. Corpurile sunt legate între ele. Se aplică în central de greutate* G *al corpului* A *o forţă verticală de sus în jos de 33 kg, iar în central de greutate al corpului* B, *în* g, *o altă forţă, tot verticală şi de sus în jos de 45 kg. Se lasă ambele corpuri să cadă şi se presupune că ele cad în vid. Să se calculeze eforturile (de compresiune sau de tracţiune) care se desvoltă între ambele corpuri, în timpul căderii lor. (Se presupune că* $g = 9{,}80$ *m/sec²).*

I. VARDALA.

I. Soluţia autorului. Corpurile A şi B fiind legate între ele, ansamblul lor poate fi considerat *ca un singur corp* supus la patru forţe, toate verticale şi acţionând de sus în jos şi care însumate ne dau rezultanta:

$$R = 10 \times 9{,}80 + 5 \times 9{,}80 + 33 + 45 = 225 \text{ kg.}$$

Massa ansamblului fiind $M + m = 15$ unităţi de massă în sistemul technic, *acceleraţia* pe care o capătă acest ansamblu în cădere este:

$$\gamma = \frac{R}{M+m} = \frac{225}{15} = 15 \frac{m}{sec^2}.$$

Să reexaminăm acuma, *în mod separat,* condiţiile de mişcare ale fiecărui corp în parte.

a) Corpul A este supus unor forţe verticale de sus în jos de $10 \times 9{,}8 + 33 = 131$ kg.

Cum însă acest corp, în timpul căderii sale are o *acceleraţie* de 15 m/sec² va fi supus şi la *forţa de inerţie*

$$-M\gamma = -10 \times 15 = -150 \text{ kg}$$

forţă verticală dar de jos în sus.

Rezultanta acestor forţe fiind egală cu $131 - 150 = -19$ kg aceasta înseamă că corpul A exercită în timpul căderii sale, *o tracţiune de 19 kg asupra corpului* B.

b) Corpul B este de altă parte supus forţelor verticale de sus în jos: $5 \times 9{,}8 + 45 = 94$ kg precum şi *forţei de inerţie*

$$-m\gamma = -5 \times 15 = -75 \text{ kg.}$$

Rezultanta acestor forţe fiind egală cu $94 - 75 = +19$ kg, aceasta înseamnă că şi corpul B exercită *o tracţiune tot de 19 kg asupra corpului* A.

Rezultatul este evident *conform principiului acţiunii şi reacţiunii.*

II. *Soluţie* dată de d-l EUGEN V. CARAMALĂU, (Bucureşti).

Să presupunem că în timpul mişcării *corpurile trag unul de altul cu o forţă* N.

Notând cu γ *acceleraţia sistemului* şi aplicând *principiul lui* D'ALEMBERT fiecărui corp în parte avem:

$$Mg + 33 + N - M\gamma = 0 \quad ; \quad mg + 45 - N - m\gamma = 0.$$

Inlocuind pe M şi m prin valorile lor şi rezolvând sistemul obţinem:

$$\gamma = 15 \text{ m/sec}^2 \quad ; \quad N = 19 \text{ kg.}$$

AL. ST.

PROBLEMA 5928. *Pe o dreaptă* Δ *se consideră punctele fixe* A, B *şi punctul mobil* C. *Fie* MN *tangenta comună exterioară la cercurile* (O_1) *şi* (O_2) *de diametru* AB *şi* BC, *punctul* M *fiind pe primul cerc. Tangenta în* C *la* (O_2) *taie pe* O_2N *în* P.

Să se determine poziţia punctului C *în următoarele condiţii:*

1°. O_1P *să treacă prin mijlocul lui* MN.

2°. A, M, P *să fie colineare.*

Aceste condiţii pot fi îndeplinite simultan?

GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-nii: EM. E. MARINESCU, M. MIHĂLCIOIU, C. CORDUNEANU.

1°. Fie R raza cercului O_1 şi X raza cercului O_2. Notăm cu L mijlocul lui MN şi cu D intersecţia MN cu Δ.

Dreptele O_1M, O_2N fiind paralele prin ipoteză, dacă O_1P trece prin L, figura O_1MPN este un paralelogram şi deci

$$NP = O_1M = R. \qquad (1)$$

Triunghiurile dreptunghice O_2CP, O_2ND sunt egale având unghiul O_2 comun şi catetele O_2C, O_2N egale. Deci

$$O_2D = O_2P \quad \therefore \quad CD = NP = R.$$

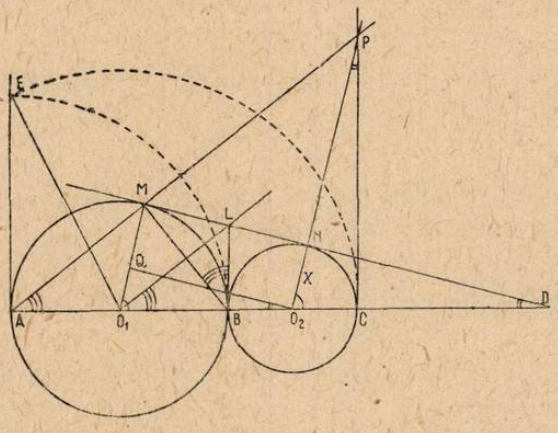
Triunghiurile asemeni O_1MD, O_2ND dau

$$\frac{DO_1}{DO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} \quad \therefore \quad \frac{2(R+X)}{R+X} = \frac{R}{X} \quad \therefore \quad X = \frac{R}{2}.$$

Rezultă că punctul C se determină luând pe prelungirea lui ABO lungimea BC egală cu jumătate din AB.

2°. Duc prin O_2 paralela O_2Q la MN. Triunghiurile asemeni O_1QO_2, O_2CP dau

$$\frac{O_2P}{O_1O_2} = \frac{O_2C}{O_1Q} \quad \therefore \quad \frac{O_2P}{X+R} = \frac{X}{R-X} \quad \therefore \quad O_2P = \frac{X(R+X)}{R-X}.$$



Dacă AM trece prin P triunghiul AO_2P, asemeni cu AO_1M, este isoscel deci

$$O_2P = AO_2 = 2R + X = \frac{X(R+X)}{R-X} \quad \therefore \quad X^2 + RX - R^2 = 0$$

$$\therefore \quad X = \frac{R}{2}[-1 \pm \sqrt{5}].$$

Deci 2 valori pentru X, din care valoarea negativă nu este admisibilă. Rămâne

$$X = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2} \quad \therefore \quad BC = R(\sqrt{5}-1).$$

Raza cercului O_2 este prin urmare egală cu latura decagonului regulat înscris în cercul O_1. Pentru construcția punctului C se duce tangenta în A la O_1, pe care tangentă se ia $AE = AB$.

Intersecția lui Δ cu cercul de centru O_1 și rază O_1E determină pe C pe prelungirea lui AB.

Din valorile găsite pentru X la 1^0 și 2^0 se vede că cele două condiții nu pot fi îndeplinite simultan.

Notă. 1^0. Au rezolvat foarte bine problema pe căi analoage, dar ceva mai lungi d-nii: MIRCEA D. POPA, M. R. CONSTANTINESCU, AL. GH. MORAITE, D. M. IORDACHE, GH. A. GRIGORE, P. P. DRĂGHICESCU, I. A. BARBU, M. V. SOARE și K. A. TELEMAN.

2^0. Construcția punctului C în cazul 2^0 este dată după soluția d-lui M. D. POPA.

3^0. D-l P. P. DRĂGHICESCU a demonstrat direct că cele 2 condiții nu pot fi simultane, în felul următor: De oarece

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBL = \sphericalangle LO_1B$$

ca având aceeași măsură, jumătatea arcului MB, rezultă că AM și O_1L sunt paralele, deci nu se pot întâlni.

PROBLEMA 5945. 1. *Să se arate, că derivatele succesive ale funcției:*

$$y = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

verifică ecuația:

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)\, y = 0 \qquad (E)$$

2. *Din integrarea ecuației* (E) *să se deducă derivata de ordinul* n *a funcției* y.

3. *Să se verifice rezultatul obținut calculând direct pe* $y^{(n)}$.

ȘERBAN GHEORGHIU.

1. Este evident că derivata de ordinul n, $y^{(n)}$ a funcțiunei y este de forma:

$$y^{(n)} = e^{\alpha x} [A_n \cos \beta x + B_n \sin \beta x] \qquad (1)$$

A_n și B_n fiind constante convenabil alese. Deoarece,

$$e^{\alpha x} \cos \beta x\ ,\ e^{\alpha x} \sin \beta x$$

sunt soluțiuni ale ecuației (E) rezultă că $y^{(n)}$ verifică deasemeni aceeași ecuație.

2. Pentru a se determina constantele A_n și B_n este prin urmare suficient a cunoaște valoarea lui $y^{(n)}$ și a derivatei sale $y^{(n+1)}$ într'un punct oarecare — spre exemplu $x = 0$.

Fie pentru aceasta u_n valoarea lui $y^{(n)}$ în punctul $x = 0$.

Avem evident:

$$u_0 = 0 \quad , \quad u_1 = \beta$$

$$u_{n+2} - 2\alpha u_{n+1} + (\alpha^2 + \beta^2)\, u_n = 0 \qquad (2)$$

şi $\quad A_n = u_n \quad , \quad \alpha A_n + \beta B_n = A_{n+1} = u_{n+1}$.

Pentru a determina constantele $u_0, u_1, \ldots, u_n \ldots$ considerăm funcţiunea

$$y = \frac{ax + b}{(\alpha^2 + \beta^2)\, x^2 - 2\alpha x + 1}$$

a şi b fiind doi coeficienţi ce vor fi calculaţi numai decât.

Funcţiunea y putând fi desvoltată în serie MAC LAURIN pentru $|x| < \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ punem $f(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x + \ldots$

Prin identificare obţinem:

$$u_0 = \beta \quad ; \quad u_1 - 2\alpha u_0 = \alpha \, ;$$

$$u_{n+2} - 2\alpha u_{n+1} + (\alpha^2 + \beta^2)\, u_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sau înlocuind pe u_0 şi u_1 prin valorile lor din (2) avem:

$$a = \beta \quad , \quad b = 0$$

şi $\quad y = \dfrac{\beta x}{(\alpha^2 + \beta^2)\, x^2 - 2\alpha x + 1} = \dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{-1}{(\alpha + i\beta)\, x - 1} + \dfrac{1}{(\alpha - i\beta) - 1}\right]$

$$\therefore \qquad y = \frac{1}{2i}[1 + (\alpha + i\beta)\, x + (\alpha + i\beta)^2 x^2 + \ldots] -$$

$$- \frac{1}{2i}[1 + (\alpha - i\beta)\, x + (\alpha - i\beta)^2 x^2 + \ldots]$$

obţinem în definitiv:

$$u_n = \frac{1}{2i}[(\alpha + i\beta)^n - (\alpha - i\beta)^n]$$

Constantele A_n şi B_n din (1), ce definesc pe $y^{(n)}$ au deci valorile:

$$A_n = \frac{1}{2i}[(\alpha + i\beta)^n - (\alpha - i\beta)^n] \quad ; \quad B_n = \frac{1}{2}[(\alpha + i\beta)^n + (\alpha - i\beta)^n].$$

3. Avem evident:

$$y = e^{\alpha x} \sin \beta x = \frac{1}{2i}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right]$$

$$\therefore \quad y^{(n)} = \frac{1}{2i}\left[(\alpha+i\beta)^n e^{(\alpha+i\beta)x} - (\alpha-i\beta)^n e^{(\alpha-i\beta)x}\right]$$

$$\therefore \quad y^{(n)} = \frac{e^{\alpha x}}{2i}\left[(\alpha+i\beta)^n - (\alpha-i\beta)^n\right]\cos\beta x + \frac{e^{\alpha x}}{2}\left[(\alpha+i\beta)^n + (\alpha-i\beta)^n\right]\sin\beta x$$

ceace confirmă rezultatul dela 2.

u primit soluţiuni parţiale dela d-nii: MIHAI R. CONSTANTINESCU (Ploeşti), ANTON I. VARGĂ (student), CĂLIN I. DIMITRIU şi SILVIU A. TELEMAN.

Ş. G.

PROBLEMA 6036. *Să se arate că numerele de forma*

$$N = \underbrace{44\ldots4}_{n}\ \underbrace{22\ldots25}_{n+1}$$

sunt patrate perfecte.

C. C. MIHĂILESCU.

I. *Soluţie* dată de d-nii: V. D. PĂLĂCEANU, AL. IEŞAN, A. ŞAICHIN, GH. A. GRIGORE, D. D. NACHE, AL. MINCULESCU, I. V. FILIP, P. P. DRĂGHICESCU, OCT. GH. TOMA şi VALERIU AL. PETCU.

Avem succesiv

$$N = \underbrace{44\ldots4}_{n} \times 10^{n+2} + \underbrace{22\ldots2}_{n+1} \times 10 + 5$$

$$= 4 \times 10^{n+2}(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1)$$

$$+ 2 \times 10\,(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1) + 5$$

$$= 4 \times 10^{n+2}\frac{10^n - 1}{10 - 1} + 2 \times 10\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} + 5$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{2(n+1)} - 4 \cdot 10^{n+2} + 2 \cdot 10^{n+2} - 2 \cdot 10 + 45}{9}$$

$$= \frac{2^2 \cdot 10^{2(n+1)} - 2 \cdot 10 \cdot 10^{n+1} + 25}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^{n+1} - 5}{3}\right)^2.$$

II. *Soluţie* dată de d-nii: M. R. CONSTANTINESCU şi M. V. SOARE.

Se observă că

$$4225 = 65^2 \quad \text{şi} \quad 442225 = 665^2.$$

Deci, dacă proprietatea enunţată este adevărată, atunci trebue demonstrat că patratul numărului $\underbrace{66\ldots65}_{n}$ are forma din enunţ. Observăm că avem succesiv:

$$\underbrace{66\ldots65}_{n}{}^2 = \left[6\,(10^n + 10^{n+1} + \ldots + 1) - 1\right]^2 = \left[6 \cdot \frac{10^{n+1}-1}{9} - 1\right]^2$$

$$= \left[\frac{2 \cdot 10^{n+1} - 5}{3}\right]^2 = \frac{4 \cdot 10^{2n+2} + 25 - 2 \cdot 10^{n+2}}{9}$$

$$= \frac{\overbrace{399\ldots98}^{n-1}\overbrace{00\ldots025}^{n}}{9} = \underbrace{44\ldots4}_{n}\ \underbrace{22\ldots25}_{n+1}.$$

Notă. Au dat soluţii apropiate de soluţia I d-nii: I. A. BARBU, AL. BĂRBULESCU, C. I. CANTUNIAR, T. CIOBOTĂ, P. D. COLUMBEANU, C. C. DIACONU, C. CORDUNEANU, I. T. MUNTEANU, TR. V. MUSTĂCESCU, GEORGE M. NICOLAE, I. I. NOVAC, MIRCEA D. POPA, Z. SEGAL, N. C. ŞERBAN, C. GH. STAN, V. M. I. STANCIU, AUREL C. TOFAN, I. C. UDREA, MIRCEA VLAD, E. WEGENER, GEORGE ENESCU, VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Slatina), SEPTIMIU N. RÂMBOIU.

Soluţii analoage cu soluţia a doua au dat d-nii: GH. D. BRAŞOVEANU, ILIE N. CONSTANTINESCU, M. D. COTARIU, PETRE F. IONESCU, VICTOR GH. PITIGOI, G. G. VRÂNCEANU, VIOREL A. VISARION.

D-l P. P. TEODORESCU urmează o cale analoagă cu soluţia a doua observând că

$$\underbrace{66\ldots65}_{n} = \underbrace{999\ldots9}_{n+1} - \underbrace{33\ldots34}_{n}$$

şi efectuând ridicările la patrat.

D-l KOSTAKE A. TELEMAN observă că

$$4N = \underbrace{177\ldots7}_{n-1}\underbrace{688\ldots89}_{n-1} \times 100 = P^2 \times 100$$

$\underbrace{177\ldots7}_{n-1}\underbrace{688\ldots89}_{n-1}$ fiind patrat perfect [1].

GH. B.

1) I. IONESCU. *Culegere de aritmetică*, I, p. 151.

PROBLEMA 6057. *Să se verifice că*

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s C_{i-r}^{s-r} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r} = (-1)^k C_{n-i}^{k-r}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

1°. *Soluție.* Consider șirul:

$$A_0 = C_{n-k}^{k-r} \quad ; \quad A_1 = C_{n-k+1}^{k-r} \; ; \; \ldots \; ; \; A_{k-r+1} = C_{n-r+1}^{k-r} \qquad (1)$$

Formăm diferențele:

$$\Delta_{A_0} = A_1 - A_0 = C_{n-k+1}^{k-r} - C_{n-k}^{k-r} = C_{n-k}^{k-r-1}$$

$$\Delta^2_{A_0} = \Delta_{A_1} - \Delta_{A_0} = C_{n-k+1}^{k-r-1} - C_{n-k}^{k-r-1} = C_{n-k}^{k-r-2}$$

. . . . . .

$$\Delta^{k-r+1}_{A_0} = C_{n-k}^{k-r-(k-r+1)} = C_{n-k}^{-1} = 0.$$

Dar: [1]

$$\Delta^m_{A_0} = A_m - C_m^1 A_{m-1} + C_m^2 A_{m-2} - \ldots + (-1)^m A_0 \qquad (2)$$

Așa că:

$$\sum_{s=r-1}^{k}(-1)^s C_{k-r+1}^{k-s} C_{n-s}^{k-r} = 0$$

sau putem scrie:

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s C_{k-r+1}^{k-s} C_{n-s}^{k-r} = 0. \qquad (3)$$

deoarece: $C_p^q = 0 \quad (q > p)$.

Dacă în (1) facem $r = 0$, obținem:

$$\Delta^k_{A_0} = C_{n-k}^{k-k} = C_{n-k}^0 = 1$$

și ținând seama de (2):

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s C_k^s C_{n-s}^k = 1. \qquad (4)$$

Dacă în (4) înlocuim pe k prin $(k-1)$ și pe n prin $(i+k-1)$, obținem:

$$\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s C_{k-1}^s C_{i+k-s-1}^{k-1} = 1. \qquad (5)$$

Pentru $r = 0$, relația din enunț devine

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s C_i^s C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^k = (-1)^k C_{n-i}^k. \qquad (a)$$

---

1) TH. ANGHELUȚĂ: *„Curs de Algebră superioară"* vol. I, pag. 52.

Se vede imediat că (a) se verifică pentru $k = 0$.

Să presupunem că (a) se verifică pentru $(k-1)$, oricare ar fi n:

$$\sum_{s=0}^{k-i} (-1)^s C_i^s C_{i-s-1}^{i-k} C_{n-s}^{k-1} = (-1)^{k-1} C_{n-i}^{k-1} \qquad (6)$$

şi să arătăm că se verifică şi pentru k.

Ţinând seama de (4), (5), (6) şi de:

$$C_p^q = C_{p-1}^{q-1} + C_{p-2}^{q-1} + \ldots + C_{p-m}^{q-1} + C_{p-m}^q$$

vom avea succesiv:

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_i^s C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^k = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_i^s C_{n-s}^k (C_{i-s}^{i-k} - C_{i-s-1}^{i-k}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_i^s C_{i-s}^{i-k} C_{n-s}^k - \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C_i^s C_{i-s-1}^{i-k} C_{n-s}^k =$$

$$= C_i \sum_{s=0} (-1)^s C_k^s C_{n-s}^k - \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C_i^s C_{i-s-1}^{i-k} C_{i+k-s-1}^k$$

$$- \sum_{s=0}^{k-1} \left[(-1)^s C_i^s C_{i-s-1}^{i-k} \sum_{m=0}^{n-i-k} C_{n-s-m-1}^{k-1} \right] =$$

$$= C_i^k - C_i^k \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C_{k-1}^s C_{i+k-s-1}^{k-1} - \sum_{m=0}^{n-i-k} (-1)^{k-1} C_{n-i-m-1}^{k-1} =$$

$$= C_i^k - C_i^k + (-1)^k \sum_{m=0}^{n-i-k} C_{n-i-m-1}^{k-1} = (-1)^k C_{n-i}^k .$$

Relaţia (a) e astfel verificată. Relaţia din enunţ se verifică pentru $r = 0$. Să o presupunem adevărată pentru $(r-1)$, oricare ar fi n:

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r+1}^{s-r+1} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r+1} = (-1)^k C_{n-i}^{k-r+1} \qquad (7)$$

şi să arătăm că se verifică şi pentru r.

Ţinând seama de (3) şi (7) vom avea succesiv:

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r}^{s-r} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r+1}^{s-r+1} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r}$$

$$- \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r}^{s-r+1} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r+1}^{s-r+1} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s+1}^{k-r+1}$$

$$- \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r+1}^{s-r+1} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r+1} - C_{i-r}^{i-k-1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{k-r+1}^{k-s} C_{n-s}^{k-r} =$$

$$= (-1)^k [C_{n-i+1}^{k-r+1} - C_{n-i}^{k-r+1}] = (-1)^k C_{n-i}^{k-r} .$$

Relaţia din enunţ e astfel stabilită.

2°. *Cazuri particulare interesante:*

a) Dacă facem $i = k + 1$, obţinem relaţia:

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{k-r+1}^{s-r} C_{n-s}^{k-r} = (-1)^k C_{n-k-1}^{k-r} . \qquad (\alpha)$$

b) Dacă în această relaţie facem: $k = 2m$; $r = m$; obţinem:

$$\sum_{s=0}^{2m} (-1)^s C_{m+1}^{s-m} C_{n-s}^{m} = C_{n-2m-1}^{m} . \qquad (\beta)$$

c) Dacă în relaţia din enunţ facem:

$r = m$; $k = 2m$; $i = 3m$; $n = 4m$, obţinem:

$$\sum_{s=0}^{2m} (-1)^s C_{2m}^{s-m} C_{3m-s-1}^{m-1} C_{4m-s}^{m} = (-1)^{2m} C_m^m$$

care se mai poate scrie:

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s C_{2m}^{s} C_{2m-s}^{m-1} C_{3m-s}^{m} = 1. \qquad (\gamma)$$

3°. Consider relaţia

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r}^{s-r} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r-p} = (-1)^k C_{n-i}^{k-r-p} . \qquad (\delta)$$

Am văzut că (δ), se verifică pentru $p = 0$.

Să presupunem că se verifică pentru $(p-r)$, oricare ar fi n:

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r}^{s-r} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r-p+1} = (-1)^k C_{n-i}^{k-r-p+1}$$

şi să arătăm că e valabilă şi pentru p. Vom avea:

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r}^{s-r} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r-p} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r}^{s-r} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s+1}^{k-r-p+1}$$

$$- \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r}^{s-r} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r-p+1} = (-1)^k \left[C_{n-i+1}^{k-r-p+1} - C_{n-i}^{k-r-p+1} \right] =$$

$$= (-1)^k C_{n-i}^{k-r-p} .$$

Relaţia (δ) e astfel demonstrată. Ea se mai poate scrie:

$$\sum_{s=0}^{k-r} (-1)^{k-r-s} C_{i-r}^{s} C_{i-r-s-1}^{i-k-1} C_{n-r-s}^{k-r-p} = C_{n-i}^{k-r-p}$$

şi pentru $p = k - r$, avem:

$$\sum_{s=0}^{k-r} (-1)^{k-r-s} C_{i-r}^{s} C_{i-r-s-1}^{i-k} = 1 \qquad (b)$$

care a făcut obiectul problemei 6068, rezolvată în vol. LI, pag. 616.

In soluția dată s'a omis să se verifice (b) pentru: $r = 0$. Avem:

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} C_i^s C_{i-s-1}^{i-k-1} = 1. \qquad (c)$$

Pentru $k=0$, relația (c) e evidentă. Să presupunem că se verifică pentru $(k-1)$ și să arătăm că e adevărată și pentru k. Avem:

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} C_i^s C_{i-s-1}^{i-k-1} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} C_i^s C_{i-s}^{i-k} -$$

$$- \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{k-s} C_i^s C_{i-s-1}^{i-k} = C_i^k \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} C_k^s +$$

$$+ \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{k-s-1} C_i^s C_{i-s-1}^{i-k} = 1, \quad \text{deoarece:} \quad \sum_{s=0}^{n} (-1)^n C_n^s = 0.$$

Relația (b) e astfel complet verificată.

PETRE P. TEODORESCU.

PROBLEMA 6153. *Să se arate că între arcele* a, b, c, d *și suma lor* 2s, *avem relația*

$$\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\sin(s-d)$$
$$+ \cos(s-a)\cos(s-b)\cos(s-c)\cos(s-d)$$
$$= \sin a \sin b \sin c \sin d + \cos a \cos b \cos c \cos d.$$

MIRCEA ADAM.

Pornind dela relațiile

$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$
$$2\cos a \cos a = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

găsim

$$4\sin a \sin b \sin c \sin d = [\cos(a-b) - \cos(a+b)][\cos(c-d) - \cos(c+d)]$$
$$4\cos a \cos b \cos c \cos d = [\cos(a-b) + \cos(a+b)][\cos(c-d) + \cos(c+d)]$$

deci

$$E_1 = 4\sin a \sin b \sin c \sin d + 4\cos a \cos b \cos c \cos d$$
$$= 2\cos(a-b)\cos(c-d) + 2\cos(a+b)\cos(c+d)$$
$$= \cos(a+b+c+d) + \cos(-a+b+c-d)$$
$$+ \cos(a-b+c-d) + \cos(a+b-c-d).$$

În această relaţie înlocuind pe a, b, c, d respectiv prin $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, $(x-d)$ obţinem

$$E_2 = \sin(x-a)\sin(x-b)\sin(x-c)\sin(x-d)$$
$$+\cos(x-a)\cos(x-b)\cos(x-c)\cos(x-d)$$
$$=\cos(4x-a-b-c-d)+\cos(-a+b+c-d)$$
$$+\cos(a-b+c-d)+\cos(a+b-c-d).$$

Rezultă

$$E_2 - E_1 = \cos(4x-a-b-c-d)-\cos(a+b+c+d)$$
$$=2\sin 2x\sin 2(s-x) \qquad (1)$$

deci în general avem

$$\sin(x-a)\sin(x-b)\sin(x-c)\sin(x-d)$$
$$+\cos(x-a)\cos(x-b)\cos(x-c)\cos(x-d)$$
$$=\sin a\sin b\sin c\sin d+\cos a\cos b\cos c\cos d$$
$$+\frac{1}{2}\sin 2x\sin 2(s-x) \qquad (1)$$

în care făcând $x=s$, găsim identitatea din problemă.

1°. Singurul corespondent care a stabilit relaţia (1), deşi pe o cale prea lungă, a fost d-l MIRCEA D. POPA.

2°. Au rezolvat bine problema d-şoarele: ELENA DRĂGHICESCU şi SANDA M. HANGAN, precum şi d-nii: M. A. BARBAIANI, I. A. BARBU, R. I. BESCHEA, C. BOERESCU, GH. BRAŞOVEANU, C. I. CANTUNIAR, P. D. COLUMBEANU, M. R. CONSTANTINESCU, V. G. CONSTANTINESCU, C. C. CORDUNEANU, D. I. CRĂCEA, C. DIACONU, A. E. DONEAUD, S. E. FANCIOTTI, I. FL. FILIMON, ST. I. GHEORGHIŢĂ, GHEORGHE A. GRIGORE, R. S. HARET, IACOB E. HARGHEL, A. I. KLANG, M. G. IOSIFESCU, S. V. MANOLIU, G. V. MANOLESCU, T. V. MUSTĂCESCU, I. T. MUNTEANU, A. GH. MORAITE, I. I. NOVAC, C. PANTELIMON, I. L. POPESCU, C. V. ROŞU, M. A. SLĂVESCU, FL. I. STROESCU, G. D. SÂMBOANU, SLT. C. ŞERBAN, P. P. TEODORESCU, A. I. VARGA şi E. WEGENER.

3°. Identitatea din enunţ face parte dintr'o serie de relaţiuni între funcţiile trigonometrice a 4 arce oarecare, relaţiuni foarte rar întâlnite în culegerile de probleme şi pe lângă care cei 40 de rezolvitori au trecut fără să le observe. Vom reveni pe larg asupra acestor relaţiuni cu altă ocazie.

M. I. A.

PROBLEMA 6202. *Dacă* I_a *este centrul cercului exînscris unghiului* A *al triunghiului pseudo-isoscel* ABC, *cu bisectoarele* BE *şi* CD *egale, atunci:*

$$m_a^2 = km'^2_a + \frac{3}{4}a(b+c-a)$$

$$m_b^2 = km'^2_b + \frac{3}{4}a(2c-a)$$

$$m_c^2 = km'^2_c + \frac{3}{4}a(2b-a)$$

unde a, b, c, m_a, m_b, m_c *sunt laturile şi medianele triunghiului* ABC *iar* m'_a, m'_b, m'_c *sunt medianele triunghiului* I_aBC *corespunzătoare vârfurilor* I_a, B *şi* C *coeficientul* k *fiind raportul între* $2a-b-c$ *şi* a.

H. BODNĂRESCU.

Soluţie dată de d-nii MIHAI R. CONSTANTINESCU (Bucureşti) şi PETRE P. TEODORESCU (Bucureşti).

Medianele triunghiului sunt date de formulele

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \quad \text{(şi analoagele).}$$

Trebue să calculăm laturile triunghiului BI_aC; fie T proiecţia lui I_a pe BC avem;

$$\overline{BI}_a^2 = \overline{BT}^2 + \overline{TI}_a^2 = (p-c)^2 + r_a^2 = (p-c)^2 + \frac{p(p-b)(p-c)}{p-a} = \frac{ac(p-c)}{p-a}$$

şi analog

$$\overline{CI}_a^2 = \frac{ab(p-b)}{p-a}.$$

Rezultă atunci

$$4m'^2_a = 2\overline{BI}_a^2 + 2\overline{CI}_a^2 - \overline{BC}^2 = \frac{a}{b+c-a}(a^2-2b^2-2c^2+ab+ac+4bc)$$

$$4m'^2_b = 2\overline{BC}^2 + 2\overline{BI}_a^2 - \overline{CI}_a^2 = \frac{a}{b+c-a}(-2a^2+b^2-2c^2+ab+bc+4ac).$$

Relaţiile care trebue verificate, devin

$$(2a^2+2b^2+2c^2-3ab-3ac)(b+c-a)=$$
$$(a^2-2b^2-2c^2+ab+ac+4bc)(2a-b-c)$$
$$(5a^2-b^2+2c^2-6ac)(b+c-a)=$$
$$(-2a^2+b^2-2c^2+ab+bc+4ac)(2a-b-c)$$

şi încă una, analoagă ultimei, obţinută permutând pe b cu c. Desvoltând şi reducând, toate relaţiile devin

$$a^3-a^2b-a^2c-bc^2-b^2c+3abc=0$$

care caracterizează triunghiul pseudo-isoscel.

Observare. Expresia lui m'_b se putea obţine mai simplu, observând că triunghiurile BI_aC şi CI_aB sunt asemenea, în raportul $a:b$, vârfurile B, I_b fiind omoloage; mediana din I_b are o expresie analoagă cu m'_a, obţinută permutând pe a cu b.

PROBLEMA 6252. *Să se găsească un patrat perfect de 2m cifre, astfel ca numărul format de primele m cifre să întreacă cu o unitate pe cel format de ultimele m cifre.*

M. GHERMĂNESCU.

Fie N^2 patratul căutat, A, B numerele formate de primele şi ultimele m cifre. După enunţ, avem

$$N^2=10^m A+B \quad , \quad A=B+1, \tag{1}$$
$$\therefore \quad N^2+1=(10^m+1)A. \tag{2}$$

N^2+1 fiind o sumă de două patrate, de aceeaşi proprietate se bucură orice divizor al său, în baza unei teoreme a lui LAGRANGE [1]. Dar 10^m+1 nu este sumă de două patrate decât dacă m este par, $m=2p$, deci: *Problema nu are soluţii pentru m impar.*

Dacă punem $A=a^2+b^2$, (2) devine cu $m=2p$.

$$N^2+1=(10^{2p}+1^2)(a^2+b^2)=(10^p a\pm b)^2+(10^p b\mp a)^2, \tag{2'}$$

care arată că putem lua, căci a şi b se pot permuta,

$$N=10^p a+b \quad , \quad 10^p b-a=\varepsilon \quad , \quad \varepsilon=\pm 1.$$

Deducem $a=10^p b-\varepsilon$. Insă A având $m=2p$ cifre, a şi b au cel mult p cifre, deci $b=1$, $\varepsilon=1$, $a=10^p-1$, apoi

$$A=10^{2p}-2.10^p+2 \quad , \quad N=10^{2p}-10^p+1. \tag{3}$$

---

1) LAGRANGE. Oeuvres I, 3, pag. 707.

Avem, în adevăr,

$N^2 = 10^{2p}(10^{2p} - 2.10^p + 2) + 10^{2p} - 2.10^p + 1 = (10^{2p} - 10^p + 1)^2$.

deci (3) dă *soluția generală* a problemei.

Ca aplicație, pentru $p = 1, 2, 3$ etc., găsim soluțiile 91^2, 9901^2, 990.001^2, etc.

Notă. 1°. La această problemă, s'au primit trei soluții mai ingrijite, ale d-lor VIRGIL G. CONSTANTINESCU, DUMITRU I. CRĂCEA și MIHAI R. CONSTANTINESCU.

D-l VIRGIL G. CONSTANTINESCU este singurul care a *demonstrat* că problema nu are soluție pentru m impar; în locul egalității (2), obține egalitatea echivalentă

$$B = \frac{N^2 + 1}{10^m + 1} - 1 = \frac{N^2 - 10^m}{10^m + 1}. \qquad (2'')$$

Pentru m impar, d-sa observă că $10^m + 1$ este divizibil prin 11, iar $N^2 + 1$ nu este, deci (2'') este imposibilă, demonstrație extrem de elementară și de frumoasă!

Pentru m par, face $m = 2p$ și conchide, ca și d-l D. I. CRĂCEA, că soluția generală trebue să fie

$$N = 99\ldots 9000..01,$$

evident, fără demonstrație riguroasă.

2°. Relația (2') arată că soluțiile problemei conduc la identitatea remarcabilă

$$N^2 + 1 = (10^{2p} - 10^p + 1)^2 + 1 = (10^{2p} - 10^p - 1)^2 + (2.10^p - 1)^2.$$

M. G.

PROBLEME PROPUSE

6601. Să se determine 10 numere întregi și pozitive, în progresie aritmetică, astfel încât suma cifrelor unităților acestor numere și suma numerelor ce se obțin din acestea, după ce li se șterg cifrele unităților, să fie egale.

I. B. FLORESCU.

6602. Dacă p este un număr prim diferit de 2, 3 și 7, să se arate că:

$$p^6 - 1 = \mathcal{M}\,504.$$

GR. ZAPAN.

6603. Să se traseze dreapta care unește două puncte date foarte apropiate unul de altul.

GH. BUICLIU.

6604. Fie M_1 şi M_2 două puncte reciproce în triunghiul fundamental T şi T_2 triunghiul format de punctele în care cevienele punctului M_2 întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului median. Să se arate că triunghiul pedal al punctului M_1 este omotetic cu triunghiul T_2, centrul de omotetie fiind centrul de greutate al triunghiului T.

CONSTANTIN IONESCU-BUJOR.

6605. Se consideră patru puncte A_1, A_2, A_3, A_4 în acelaşi plan. Fie (H) hiperbola circumscrisă, iar A_1', punctul diametral opus de pe (H) lui A_1. Să se arate că isogonalul φ_1 al lui A_1' în raport cu triunghiul $A_2A_3A_4$ ca şi celelalte trei puncte analoage, coincid cu punctul din care sunt văzute sub acelaşi unghiu cercurile circumscrise celor patru triunghiuri determinate de câte trei din vârfurile patrupunctului (Problema 3944, G. M., vol. XLVII, p. 467).

In particular, dacă patrupunctul considerat este ortocentric, iar (H) o hiperbolă echilateră circumscrisă, arbitrară, punctele φ_1 şi analoagele sale sunt la infinit în aceeaşi direcţie.

ŞERBAN GHEORGHIU.

6606. Dacă $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\delta$ sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^4 + px + q = 0,$$

se cere ecuaţia de gradul IV, care admite rădăcinile:

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}\ ,\ \operatorname{cotg}^2\frac{\beta}{2}\ ,\ \operatorname{cotg}^2\frac{\gamma}{2}\ ,\ \operatorname{cotg}^2\frac{\delta}{2}\ .$$

EUGEN ŞT. IACOB.

6607. Să se studieze sistemul de ecuaţii:

$$x^3 + 3yz(y+z) + 2xyz = a\ ,\quad y^3 + 3zx(z+x) + 2xyz = b,$$
$$z^3 + 3xy(x+y) + 2xyz = c.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6608. Suma inverselor semiaxelor elipselor circumscrise triunghiurilor circumscrise unui cerc şi concentrice cu acest cerc, este constantă.

AUREL PÂRVU.

6609. Să se indice un procedeu pentru calcularea sumei

$$S = C_m^1 + 2^k C_m^2 + 3^k C_m^3 + \ldots + p^k C_m^p + \ldots + m^k C_m^m,$$

k fiind întreg şi pozitiv. Să se calculeze efectiv această sumă pentru $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

ANTON I. VARGĂ.

6610. Pe o parabolă, având vârful O, se iau trei puncte A, B, C şi se notează prin A', B', C' punctele în care normalele duse la parabolă în punctele A, B, C retaie parabola, iar prin $A_1'B_1'C_1'$ triunghiul format de tangentele la parabolă în punctele A, B, C. Să se demonstreze că dacă normalele în puncte A', B', C la parabolă sunt concurente, atunci puterea punctului C în raport cu cercul ABC, este îndoitul puterii aceluiaşi punct în raport cu cercul $A_1'B_1'C_1'$.

CEZAR COŞNIŢĂ.

6611. Fie $\{y\} = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\cdot\frac{y''^2}{y'^2}$ schwarzianul funcţiei y, derivatele fiind luate în raport cu variabila independentă x. Făcând o schimbare de variabilă independentă, să se arate că

$$\{y\}_x = \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \{y\}_t + \{t\}_x.$$

Să se arate deasemenea că

$$\left\{\frac{y_1}{y_2}\right\} = \frac{|yy'''|}{|yy'|} - \frac{3}{2}\cdot\frac{|yy''|}{|yy'|^2} + 3\frac{|y'y''|}{|yy'|},$$

unde $|yy'''| = \begin{vmatrix} y_1 & y_1''' \\ y_2 & y_2''' \end{vmatrix}$, etc.

N. N. MIHĂILEANU.

6612. Fie a, b, c trei puncte la distanţă finită, situate în planul variabilei complexe z, astfel ca $\sphericalangle aOc$ ori opusul său la vârf să admită semidreapta Ob ca bisectoare şi C_r un cerc de centru O şi de rază r.

Se consideră funcţia

$$f(z) = az^2 + bz + c$$

şi maximum $|f(z)|$, atins când z e pe circonferinţa C_r.

Să se arate că acest maximum este atins într'un singur punct Z_r care descrie o semidreaptă când r variază.

B. BARBĂLAT.

6613. Dacă r este ordinul unui subgrup veritabil al grupului altern de permutări de gradul $n > 4$, atunci numărul

$$\left(\frac{n!}{r}\right)!$$

este divizibil cu $2r$.

RĂDUCANU GEORGESCU.

6614. Un preparat radioactiv emite raze α având o viteză de 2.10^9 cm/sec şi un parcurs în aer de 7 cm. Un contor de particule situat la o distanţă D de preparat, înregistrează sosirea unor protoni. Care este valoarea minimă ce se poate da lui D pentru a avea siguranţa că protonii nu provin din ciocnirea particulelor α cu atomii de hidrogen ai vaporilor de apă conţinuţi în aer, ci numai din dezintegrarea azotului (reacţia lui RUTHERFORD). Se va admite că particulele α şi protonii de viteze egale au parcursuri egale şi că parcursurile cresc proporţional cu puterea a treia a vitezei.

ŞERBAN ŢIŢEICA.

6615. Un con omogen circular drept de înălţime h, de rază r şi de massă M, fixat în vârful său O, se rostogoleşte *fără să alunece* pe un cerc C orizontal de rază a cu centrul în O astfel încât iuţeala centrului cercului bazei conului este constantă şi egală cu V.

1) Să se determine iuţeala unghiulară de rotaţie a conului. 2) Să se descompună mişcarea conului în două mişcări de rotaţie, una în jurul axei sale şi cealaltă în jurul verticalei şi să se determine iuţelile unghiulare respective. 3) Să se sumeze forţele de inerţie ce acţionează conul în mişcarea sa. 4) Să se calculeze reacţiunea cercului C asupra conului în punctul său de rezemare în timpul mişcării.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. La problema 6566 punctul 4) se înlocueşte prin:

Scria $(-1)^{[\log n]} \frac{z^n(1-z)}{n}$ este uniform convergentă pentru $|z| \leqslant 1$.

Până la sfârșitul lunii precedente, s'au primit și s'au reținut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), probleme propuse (P), și probleme rezolvate, dela:

Bedrosian C. Bedros (6574, 94); *Berdan C.* (2004, 3535, 4256, 303, 698, 5123, A, P); *Crăcea I. D.* (6380); *Droussent Lucien* (A); *Manta D. Apostol* (6501, 74); *Meriu C. Gh.* (6485, 503, 532, 65); *Popovici D. Dan* (6343, 86, 503, 4, 76); *Sager I. A.* (A, N.); *Soare V. M.* (6380); *Stănciulescu S. Florin* (6513, 36, 74); *Stănilă D. B.* (6349, 446, 513, 4, 22, 531, 6, 9, 46, 65); *Tălmaciu T. Marioara* (6271, 310, 69, 412, 6, 535, 57, 94); *Teleman A. Kostake* (5733, 65, 6, 852, 81, 928, 45, 57, 60, 85, 99, 6036, 111, 73, 4, 82, 201, 30, 3, 43, 350, 71, 433, 6, 53, 87, 528, 31, 72, 94); *Teleman A. Siviu* (5813, 967, 6039, 40, 105, 11, 34, 45, 74, 5, 230, 3, 314, 33, 80, 416, 36, 53, 80, 587, 91, 3, 4, 8, P); *Teodorescu P. P.* (4647, 6557); *Vasiliu M. Mircea* (6532, 5, 9, 48, P); *Visarion A. Viorel* (4074, 6111, 294, 6415, 6, 46, 505, 87); *Zaidman D. Sami* (6532, 74, 94); *Zănescu A. Liviu* (6594).

Orariul Bibliotecilor „Gazeta Matematică"

Sălile de bibliotecă sunt deschise după următorul orariu:

Localul din Calea Griviței Nr. 158: In fiecare zi de lucru dela 9 la 12, iar Miercurea dela 9 la 12 și dela 16 la 20.

Casa „I. Ionescu" din Str. Răsuri Nr. 25: Luni și Vineri dela 8 la 10, Marți și Miercuri dela 16 la 20.

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus, de geometrie, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerație.

Corespondenții cari cer informații sau diverse lămuriri în scris, sunt rugați a însoți cererea de o carte poștală sau mărci poștale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele și problemele propuse, care se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, XII şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *Gh. I. Liteanu.* . . Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu**, *Mecanica raţională*, Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a raţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a). . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . Lei 230

Pentru trimiterea prin poştă a volumelor de mai sus, se va adăoga câte 40 lei pentru fiecare volum.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 400

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 200

Abonamentele şi ori-ce sume se pot trimite la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa :

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 14.617.

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. 8950

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIV

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1949

SUMARUL

1. Calculul integralelor definite cu ajutorul funcţiunilor primitive . . . . . *Miron Nicolescu*
2. Asupra ecuaţiilor tangenţiale ale cercului şi sferei . . . . . *C. Coşniţă*
3. Raportul comisiunii pentru premiul „Inginer Alexandru Roşu" . . . . . *Gh. I. Dumitrescu, Al. Al. Roşu*
4. Note matematice: 20—21.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 351
8. Diverse
9. Probleme rezolvate: 4647, 5290, 5574, 6378, 6388, 6407, 6416, 6518, 6537, 6559.
10. Probleme propuse: 6616—6630.

BUCUREŞTI

R. OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALA
1949

9678

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie, compusă în prezent din d-nii: Academician Prof.-Ing. **N. Profiri** (Ministrul Comunicaţiilor); Prof.-Univ. **Valeriu Novacu**; Inginer **Gr. Zapan** (Casier).

Şedinţele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 18 Aprilie ora 17^{30}: Alegerea materiei pentru Nr. 9.

Luni 9 Mai ora 17^{30}: Facerea copertei pentru Nr. 9 şi raportul asupra concursului *« Gazetei Matematice »*.

Luni 23 Mai ora 17^{30}: Alegerea materiei pentru Nr. 10.

Nu se primesc articole, note, cereri, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care fac parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Septembrie 1948 sunt indicate în tabla de materii a volumului LIII.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cursul mediu şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

LUPTA POPOARELOR PENTRU PACE ŞI CULTURĂ

ŞI CONGRESUL DELA PARIS

In ziua de 20 Aprilie crt. s'a deschis la Paris, cu o secțiune la Praga, Congresul mondial al partizanilor păcii.

S'au creat comitete ale partizanilor păcii în treizeci de țări. Iau parte ca delegați la Congres personalități cu faimă universală: savanți, scriitori, artiști, conducători de organizații sociale, culturale, etc.

In fața noilor uneltiri ale imperialismului agresiv, popoarele din lumea întreagă răspund energic prin întărirea luptei pentru pace, libertate, cultură și progres. Pacea este dorința unanimă a muncitorimii și intelectualității progresiste din întreaga lume, fiindcă numai în condiții de pace se poate ridica nivelul material și cultural al popoarelor, numai în condiții de pace se poate asigura progresul.

Trebue susținută mereu lupta contra provocatorilor la război, care în tendința lor de expansiune nu țin seama de nici o normă morală. In toate țările milioane de voci cer stabilirea unei păci trainice, lupta contra blocurilor militare agresive este din ce în ce mai activă, mișcarea pentru pace strânge toate popoarele lumii.

Pentru marea luptă de apărare a civilizației, Congresul dela Paris și Praga este o demonstrație de amploare a tăriei forțelor păcii.

Societatea *Gazeta Matematică* salută Congresul Partizanilor Păcii, expresie mondială a forțelor de luptă pentru pace și progres și își însușește întru totul hotărîrile Congresului.

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ.

CALCULUL INTEGRALELOR DEFINITE CU AJUTORUL FUNCȚIUNILOR PRIMITIVE

1. Unul din punctele importante ale programului de activitate al *Gazetei Matematice* în noua ei înfățișare, așa cum a fost schițat de Prof. VALERIU NOVACU, unul din delegații Societății, în cuvântul introductiv, îl constitue articolele cu caracter metodologic, având scopul de-a lămuri pentru unii din cititorii acestei reviste, în special pentru profesorii din învățământul mediu, unele chestiuni care în tratatele curente sunt abia schițate, dacă nu complet neglijate. Consecința unor asemenea stări de lucruri poate fi transmiterea din generație în generație a unor erori, pe care trecerea grăbită prin Universitate a viitorilor profesori, nu va fi avut timpul să le înlăture. In această categorie de erori ar putea, de pildă, să intre problema calculului integralelor definite cu ajutorul funcțiunilor primitive, problemă care face parte azi din programul de Matematici a clasei a XI-a. Problema legăturii dintre noțiunea de integrală (definită, sau indefinită) și funcțiune primitivă este una dintre marile probleme ale analizei matematice; ea s'a pus din momentul în care RIEMANN a extins procedeul operator al lui CAUCHY la o anumită categorie de funcțiuni discontinui, delimitând precis categoria pentru care acest procedeu reușește; astfel de funcțiuni se chiamă astăzi funcțiuni integrabile în sensul lui RIEMANN, sau integrabile (R).

Cercetările lui RIEMANN au fost continuate de DARBOUX, PAUL DU BOIS-RAYMOND, DINI, LEBESGUE, DENJOY, PERRON, pentru a nu cita decât pe cei mai de seamă. Ele au lărgit considerabil cadrul inițial al problemei și au făcut posibilă desvoltarea extraordinară pe care a luat-o astăzi analiza generală sub impulsul unor matematicieni ca FRÉCHET, MOORE, a Școalei Poloneze, în frunte cu STEINHAUS și BANACH și mai ales a Școalei Sovietice, în frunte cu ALEXANDROV, URYSON, TYCHONOV și alții.

2. Problema căutării funcțiilor primitive este problema inversă a calculului derivatelor: Fiind dată o funcțiune $f(x)$, există o altă funcțiune $F(x)$ a cărei derivată să fie $f(x)$? Pusă astfel, problema nu este totdeauna posibilă. Astfel, în mod firesc, cercetările matematicienilor au luat două direcții. Una investigativă: să

se delimiteze categoria funcţiunilor care admit o funcţiune primitivă (pe scurt „funcţiuni derivate"), sau altfel spus: să se recunoască dacă o funcţiune dată este o funcţiune derivată. Alta constructivă: fiind dată o funcţiune derivată, să se găsească primitiva ei.

Procedeul operator prin care CAUCHY ataşează unei funcţiuni *continui* $f(x)$, o altă funcţiune, *integrala sa nedefinită*, este bine cunoscut, aşa încât îl vom descrie aici foarte pe scurt: Dacă $f(x)$ este continuă într'un interval (a, b), vom considera în acest interval un punct X şi vom împărţi intervalul (a, X) într'un număr oarecare de subintervale prin şirul

$$a < a_1 < a_2 < \ldots a_{i-1} < a_i < \ldots < a_n = X,$$

după care vom considera suma

$$S = (a_1 - a) \cdot f(x_1) + (a_2 - a_1) \cdot f(x_2) + \ldots + (X - a_{n-1}) \cdot f(x_n),$$

unde x_i este un număr oarecare, cuprins între a_{i-1} şi a_i. Se demonstrează uşor că această sumă are o limită unică şi finită când cel mai mare din subintervalele precedente tinde către zero. Această limită se chiamă integrala *definită* a funcţiunii $f(x)$ în intervalul (a, X) şi se notează, dela FOURIER încoace, astfel:

$$S(X) = \int_a^X f(x)\, dx.$$

Dacă X variază în intervalul (a, b), atunci $S(X)$ devine o funcţiune de X. Această funcţiune se chiamă integrala *nedefinită* a funcţiunii $f(x)$.

Integrala nedefinită se bucură de o proprietate importantă: este o funcţie derivabilă, iar derivata ei este tocmai funcţia $f(x)$. Adică $S'(X) = f(X)$. Prin urmare, procedeul constructiv al lui CAUCHY constitue, în acelaşi timp, o demonstraţie a teoremei următoare de existenţă: *Orice funcţie continuă admite cel puţin o primitivă, anume integrala sa nedefinită.*

LEBESGUE, în ale sale „*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*", lărgeşte puţin noţiunea de integrală nedefinită, adăugând funcţiunii $S(X)$ o constantă K arbitrară; aceasta, pentru a putea afirma mai departe (pag. 7): „Se vede că, pentru funcţiunile continui, există identitate între funcţiunile primitive şi integralele nedefinite".

De altfel, dacă F (x) este o funcţiune primitivă a funcţiunii $f(x)$ continui, avem, după cum se poate uşor stabili, formula fundamentală

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Nu ne vom ocupa, de altfel, în acest articol, decât de funcţiunile $f(x)$ continui.

3. Afirmaţia identităţii între integralele nedefinite şi funcţiunile primitive, fie chiar numai pentru funcţiunile continui, poate pune la grea încercare puterea de înţelegere a unui începător, în speţă a unui elev de liceu ca şi încrederea sa în virtuţile calculului. Să considerăm, într'adevăr, funcţiunea continuă următoare

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + 2}.$$

Pentru calculul primitivei acesteia, vom proceda aşa cum se arată în toate cursurile de analiză. Anume vom pune $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Un calcul asupra detaliilor căruia trecem, ne va conduce, în cele din urmă, la funcţiunea

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\right] + K.$$

Faptul că în membrul II figurează o constantă arbitrară, ne scuteşte să precizăm despre care determinare a funcţiunii arctg. este vorba. Dar, oricare ar fi această determinare, funcţiunea $\mathfrak{F}(x)$ este *discontinuă* în punctele $(2k+1)\pi$, $(k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots)$, deci nu poate fi o primitivă a funcţiunii date! Iată deci cum calculul elementar, clasic, nu ne poate duce la o primitivă în tot intervalul în care funcţiunea dată este continuă (în cazul nostru, pe toată dreapta). Acest calcul nu este însă inutil. El ne va ajuta să dăm un răspuns corect problemei puse.

Să alegem, pentru funcţiunea care figurează în membrul II al formulei precedente, determinarea principală, şi să punem

$$F_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Avem

$$F_0[(2k+1)\pi - 0] = \lim_{x \to (2k+1)\pi} F_0(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

$$F_0[(2k+1)\pi + 0] = \lim_{(2k+1)\pi \leftarrow x} F_0(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

deci punctele de discontinuitate ale funcţiunii $F_0(x)$ sunt de prima specie. Dacă numim diferenţa

$$\delta_k = F_0[(2k+1)\pi - 0] - F_0[(2k+1)\pi + 0] = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

saltul funcţiunii în punctul considerat, constatăm că saltul acestei funcţiuni este acelaşi în orice punct de discontinuitate. Să considerăm acum funcţiunea $F_1(x)$, definită în modul următor:

$$F_1(x) = \begin{cases} F_0(x) & , \text{ pentru } -\pi < x < \pi \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} & , \text{ pentru } x = \pi \\ F_0(x) + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} & , \text{ pentru } \pi < x < 3\pi. \end{cases}$$

Această funcţiune nu mai este discontinuă în punctul $x = \pi$. Intr'adevăr

$$F_1(\pi - 0) = F_1(\pi) = F_1(\pi + 0) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Dar $F_1(x)$ este şi derivabilă în punctul $x = \pi$. Intr'adevăr, avem

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_1(\pi + h) - F_1(\pi)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F_1(\pi - h) - F_1(\pi)}{-h} = \frac{1}{2}, \quad (h > 0),$$

deci $F_1'(\pi)$ există şi avem $F_1'(\pi) = f(\pi)$. Să punem

$$F_2(x) = \begin{cases} F_1(x) & , \text{ pentru } -\pi < x < 3\pi, \\ F_1(3\pi - 0) & , \text{ pentru } x = 3x, \\ F_1(x) + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} & , \text{ pentru } 3\pi < x < 5\pi. \end{cases}$$

In acelaşi mod se poate arăta că $F_2(x)$ este continuă şi derivabilă în punctul $x = 3\pi$ şi că avem $F_2(3\pi) = f(3\pi)$. Procedeul poate fi urmat indefinit. Răspunsul corect la problema pusă

este, în definitiv, următorul: Primitiva funcțiunii $f(x) = \frac{1}{\sin x + 2}$, este funcțiunea F (x), definită în modul următor:

$$F(x) = \begin{cases} F_0(x) + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}, \text{ pentru } (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi, \\ F_0[(2k+1)\pi - 0] + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}, \text{ pentru } x = (2k+1)\pi. \end{cases}$$

Prin urmare, pentru definirea primitivei funcțiunii date, avem nevoie, nu de o determinare sau alta a funcțiunii $\mathfrak{F}(x)$, ci de toate!

Problema merită puțină atenție, deoarece în practică primitiva este aceea care servește la calculul integralelor definite, iar nu invers, cum ar apărea din teorema de existență enunțată mai sus. De pildă, aplicarea formulei fundamentale (1) la exemplul nostru ne dă

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x + 2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

4. Considerațiile precedente pot fi cu greu înțelese de un elev de forță mijlocie. Pentru aplicațiile care se fac în Școalele Medii (și din care face parte și exercițiul precedent), ele se pot, de altfel, evita în mai multe feluri. Să considerăm, de pildă, cazul următor, care acoperă în mod larg toate aplicațiile care se fac în liceu, al unei funcțiuni continui $f(x)$ în intervalul de integrare (a, b) și pentru care, metodele elementare de calcul al primitivei, duc la o funcțiune $\mathfrak{F}(x)$ cu un număr finit de discontinuități. Este ușor de arătat, pe cale elementară, că aceste discontinuități sunt de prima specie. Fie, într'adevăr, în ordinea crescătoare,

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_p$$

aceste discontinuități. Punând

$$S(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

diferența

$$\mathfrak{F}(x) - S(x)$$

este constantă în interiorul intervalului (a_k, a_{k+1}), oricare ar fi k. Insemnând cu C_k valoarea acestei constante, vom avea, ε fiind un număr pozitiv,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathfrak{F}(a_k + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} S(a_k + \varepsilon) + C_k = S(a_k) + C_k.$$

Găsim, în acelaşi mod,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{F}(a_{k+1} - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} S(a_{k+1} - \varepsilon) + C_k = S(a_{k+1}) + C_k,$$

deci a_k şi a_{k+1} sunt, într'adevăr, puncte de discontinuitate de prima specie (salturi). Diferenţa $\delta_k = \mathcal{F}(a_k - 0) - \mathcal{F}(a_k + 0) = C_{k-1} - C_k$, se chiamă *saltul* funcţiunii în punctul a_k. Să considerăm, acum, funcţiunea $F(x)$, definită în modul următor

$$F(x) = \begin{cases} \mathcal{F}(x), \text{ pentru } a \leqq x < a_1, \\ \mathcal{F}(x) + \sum_{i=1}^{k} \delta_i, \text{ pentru } a_k < x < a_{k+1}, \\ \mathcal{F}(a_k + 0) + \sum_{i=1}^{k} \delta_i, \text{ pentru } x = a_k. \end{cases}$$

Se verifică în acelaşi mod ca şi în cazul particular de mai sus, că această funcţiune este continuă şi derivabilă în tot intervalul (a, b). Aplicând, atunci, formula fundamentală (1), obţinem

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) + \sum_{i=1}^{p} \delta_i. \qquad (2)$$

La acelaşi rezultat se poate ajunge şi în modul următor, care poate fi uşor expus elevilor. Vom scrie:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{p} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx \quad , \quad (a_0 = a \, , \; a_{p+1} = b).$$

Considerând un număr pozitiv ε, convenabil de mic, vom avea, pentru fiecare interval (a_k, a_{k+1}),

$$\int_{a_k + \varepsilon}^{a_{k+1} - \varepsilon} f(x)\,dx = \mathcal{F}(a_{k+1} - \varepsilon) - \mathcal{F}(a_k + \varepsilon),$$

de unde, pentru $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = \mathcal{F}(a_{k+1} - 0) - \mathcal{F}(a_k + 0).$$

Adunând toate aceste integrale, cădem peste formula (2). Dacă $\mathcal{F}(x)$ este discontinuă şi în punctele a şi b, formula (2) trebue înlocuită prin următoarea

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{F}(b - 0) - \mathcal{F}(a + 0) + \sum_{i=1}^{p} \delta_i. \qquad (2')$$

In rezumat: Pentru predarea acestei chestiuni, vom *lărgi* puţin noţiunea de primitivă pentru funcţiunile continui, numind funcţiune primitivă a unei funcţiuni continui, funcţiunea obţinută *ca atare* prin *metodele elementare de calcul.* Pentru calculul integralelor definite cu ajutorul primitivei astfel definite, vom întrebuinţa formula (1) sau (2), resp. (2'), după cum în intervalul de integrare primitiva este continuă sau nu.

5. Dacă trecem în revistă categoriile de funcţiuni elementare ale căror primitive se pot exprima tot prin funcţiuni elementare, categorii care figurează în toate manualele de analiză, vom putea distinge următoarele categorii uzuale (în afară de integralele binome, care nu figurează în programul de liceu), pentru care procedeele clasice de calcul pot duce la primitive discontinui:

a) funcţiunile raţionale de x şi de $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$;

b) funcţiunile raţionale de $\cos x$ şi de $\sin x$.

Aceste două categorii nu sunt, de altfel, distincte. O substituţie de variabilă, având una din formele

$$x = h + k \sin t \quad , \quad x = h + k \operatorname{tg} t \quad , \quad x = h + k \sec t,$$

reduce totdeauna cazul *a)* la cazul *b).* Suntem astfel conduşi, în mod natural, să ne ocupăm de integralele definite de forma

$$\int_a^b R(\cos x, \ \sin x)\, dx \tag{3}$$

unde $R(\cos x, \sin x)$ este o funcţiune raţională de cele două argumente.

Aceasta ne va conduce la o altă metodă de calcul, mai elementară decât metoda precedentă. Intr'adevăr, prin substituţia $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, obţinem

$$\int R(\cos x, \ \sin x)\, dx = \int \frac{2}{1+t^2} \cdot R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \int \mathfrak{R}(t)\, dt,$$

$\mathfrak{R}(t)$ fiind o funcţiune raţională. Din $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ deducem $x = 2 \operatorname{arctg} t$.

Dar, oricare ar fi determinarea funcţiunii $\operatorname{arctg} t$ şi oricare ar fi intervalul de variaţie al nouii variabile t, acesta va da pentru x un interval *mai mic* decât 2π şi anume un interval cuprins într'unul din intervalele

$$[(2k-1)\pi, \ (2k+1)\pi] \quad , \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

după determinarea aleasă pentru arctg t. Să presupunem că alegem pentru această funcţiune determinarea principală. Atunci, dacă t variază în intervalul $(-\infty, +\infty)$, x variază în intervalul $(-\pi, +\pi)$.

Prin urmare, dacă voim să calculăm integrala definită (3), va trebui să facem următoarele operaţiuni preliminare:

1. Să aducem limita inferioară a integralei în punctul $-\pi$, prin substituţia lineară $x = a + \pi + X$. Integrala devine

$$\int_a^b R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{-\pi}^{b-a-\pi} R[-\cos(x+a), -\sin(x+a)]\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{b-a-\pi} R_1(\cos x, \sin x)\, dx.$$

2. In cazul în care $b - a > 2\pi$, să descompunem integrala potrivit formulei

$$\int_{-\pi}^{b-a-\pi} = \int_{-\pi}^{+\pi} + \int_{\pi}^{3\pi} + \dots$$

apoi, în fiecare din integralele din membrul II, afară de prima, să aducem limita inferioară în punctul $-\pi$, printr'o substituţie lineară analoagă celei precedente, substituţie care nu va schimba forma funcţiunii $R_1(\cos x, \sin x)$, din cauza periodicităţii argumentelor $\cos x$, $\sin x$. In acest fel vom avea

$$\int_a^b R(\cos x, \sin x)\, dx = n\int_{-\pi}^{+\pi} R_1(\cos x, \sin x)\, dx + \int_{-\pi}^{c} R_1(\cos x, \sin x)\, dx,$$

unde n este câtul (întreg) al lui $b - a$ prin 2π iar $-\pi < c < \pi$.

Funcţiunea $R(\cos x, \sin x)$ este presupusă continuă în intervalul (a, b), deci mărginită în acest interval. Dacă $b - a \geqslant 2\pi$, atunci R este continuă *pe toată dreapta*, în baza periodicităţii argumentelor $\cos x$ şi $\sin x$. Deci, şi $R_1(\cos x, \sin x)$ va fi continuă pe toată dreapta. Dacă $b - a < 2\pi$, deci $n = 0$, funcţiunea R_1 va fi continuă în intervalul $(-\pi, c)$, deci mărginită în acest interval.

Să presupunem, în primul rând, $n \neq 0$. Formula (4) ne arată că $\mathfrak{R}(t)$ este continuă pe toată dreapta, deci polinomul dela numitor nu are rădăcini reale. Calculul primitivei ne va duce, deci, la funcţiuni raţionale de t, continui pe toată dreapta, şi la funcţiuni de forma

$$\operatorname{arctg}(\alpha t + \beta) \quad , \quad \log[(t - l)^2 + m^2],$$

cu α, β, l, m constante.

Să presupunem, în al doilea rând, $n=0$, deci $c \neq 0$. In acest caz, dacă numitorul lui $\mathfrak{R}(t)$ are zeruri reale, acestea sunt neapărat exterioare intervalului transformat al intervalului $(-\pi, c)$ adică $\left(-\infty, \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)$. Calculul poate deci, în acest caz, să introducă şi termeni de forma

$$\log(t-\gamma)$$

unde $\gamma > \operatorname{tg}\frac{c}{2}$. Dacă exprimăm atunci primitiva calculată ca funcţiune de t prin intermediul variabilei iniţiale x, vom constata că această primitivă va fi o sumă de trei categorii de funcţiuni elementare:

1) funcţiuni raţionale de x, continui în intervalul $(-\pi, \pi)$, sau $(-\pi, c)$;

2) funcţiuni de forma $\operatorname{arctg}\left(\alpha \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \beta\right)$, continui în orice punct interior intervalului $(-\pi, +\pi)$;

3) funcţiuni de forma $\log\left[\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \quad\right)^2 + m^2\right]$, respectiv $\log\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \gamma\right)$, continui în orice punct interior intervalului $(-\pi, +\pi)$ respectiv $(-\pi, c)$.

Aşadar, în rezumat: Primitiva funcţiunii $R_1(\cos x, \sin x)$ nu mai prezintă salturi în interiorul intervalului de integrare.

Se va putea deci aplica, fie formula (1), fie formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathfrak{F}(b-0) - \mathfrak{F}(a+0).$$

în cazul în care punctele a şi b ar fi, ele însele, punctele de discontinuitate ale primitivei.

Ca aplicaţie, vom relua exerciţiul de mai sus. Vom face deci, în prealabil, substituţia $x=\pi+u$, ceea ce ne va da

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x + 2} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{du}{2 - \sin u} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{2 - \sin x},$$

după care, prin substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, aplicată ultimei integrale, ajungem (neglijând constanta), la primitiva

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right],$$

care în interiorul intervalului $(-\pi + \pi)$ nu mai prezintă salturi.

Cum $\mathfrak{F}(\pi - 0) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ şi $\mathfrak{F}(-\pi + 0) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$,

găsim imediat

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{2 - \sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Pentru calculul integralei

$$I = \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \sin x},$$

vom scrie, potrivit aceleiaşi metode,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x} + \int_{2\pi}^{2\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \sin x},$$

sau

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{2 - \sin x} + \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 - \sin x},$$

de unde, $\mathfrak{F}(x)$ având însemnarea de mai sus,

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \mathfrak{F}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \mathfrak{F}(-\pi + 0)$$

$$= \pi\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctg}\sqrt{3} = \frac{7\pi\sqrt{3}}{9}.$$

MIRON NICOLESCU.

ASUPRA ECUAȚIILOR TANGENȚIALE ALE CERCULUI ȘI SFEREI[1]

1. Dacă se dau cercurile de ecuații punctuale normale:

$$C'(x, y) \equiv (x - a')^2 + (y - b')^2 - R'^2 = 0,$$

$$C''(x, y) \equiv (x - a'')^2 + (y - b'')^2 - R''^2 = 0,$$

se știe că ecuația:

$$C'(x, y) - C''(x, y) = 0$$

reprezintă axul radical al cercurilor.

Dacă acum considerăm ecuațiile tangențiale *normale* ale cercurilor:

$$\Gamma'(u, v, w) \equiv R'^2 (u^2 + v^2) - (a' u + b' v + w)^2 = 0,$$

$$\Gamma''(u, v, w) \equiv R''^2 (u^2 + v^2) - (a'' u + b'' v + w)^2 = 0,$$

e natural să ne întrebăm ce reprezintă ecuația:

$$\Gamma'(u, v, w) - \Gamma''(u, v, w) = 0. \qquad (1)$$

Pentru a răspunde la această întrebare, să considerăm dreapta:

$$ux + vy + w = 0.$$

Lungimea l a coardei (reală sau imaginară) pe care primul cerc o interceptează pe această dreaptă, este dată de formula următoare:

$$l^2 = 4\left[R'^2 - \frac{(a'u + b'v + w)^2}{u^2 + v^2}\right].$$

Dacă scriem că $l = 0$, obținem ecuația tangențială a primului cerc. Scriind acum că lungimile celor două coarde pe cari le intercepteză cercurile date pe dreapta dată sunt egale, obținem tocmai ecuația de mai sus: $\Gamma(u, v, w) - \Gamma(u, v, w) = 0$ dedusă prin scăderea ecuațiilor tangențiale normale ale cercurilor. Această ecuație reprezintă deci *înfășurătoarea dreptelor pe care cele două cercuri interceptează coarde de lungimi egale.*

---

1) Comunicare făcută la Societatea Română de Matematici în ziua de 21 Februarie 1949.

Scriind desvoltată ecuația precedentă, se găsește:

$$(R'^2-R''^2)(u^2+v^2)=2[(a'-a'')u+(b'-b'')v]\left[\frac{1}{2}(a'+a'')u+\frac{1}{2}(b'+b'')v+w\right]$$

E vizibil pe această ecuație că înfășurătoarea este o parabolă (ecuația fiind verificată de coordonatele dreptei dela infinit: $u=v=0$, $w=1$. Coordonatele axului radical:

$$a'-a'',\ b'-b'',\ \frac{1}{2}(a''^2-a'^2+b''^2-b'^2+R'^2-R''^2)$$

deasemenea verifică ecuația, deci axul radical este tangent parabolei. Observăm apoi că ecuațiile tangențiale:

$$u^2+v^2=0,\ (a'-a'')u+(b'-b'')v=0,\ \frac{1}{2}(a'+a'')u+\frac{1}{2}(b'+b'')v+w=0$$

reprezintă respectiv punctele ciclice, punctul dela infinit al liniei centrelor cercurilor și mijlocul distanței centrelor. Rezultă dar că linia centrelor este axa parabolei, axa radicală este tangenta în vârf, iar mijlocul distanței centrelor este focarul parabolei (deoarece tangentele duse din acest punct la parabolă sunt isotrope). In rezumat avem rezultatul următor:

Înfășurătoarea dreptelor pe care două cercuri interceptează coarde egale este o parabolă aparținând fascicolului tangențial format de cele două cercuri (tangentă tangentelor lor comune). Axa parabolei este linia centrelor cercurilor, axa radicală este tangenta în vârf, iar focarul este mijlocul distanței centrelor.

2. Se poate ajunge la acest rezultat și prin considerații de Geometrie elementară, astfel: Fie I', I'' centrele celor două cercuri, F mijlocul distanței centrelor, M un punct variabil pe axa radicală. Perpendiculara dusă în M pe dreapta MF întersectează cercurile în punctele A, B; A', B'. Avem relațiile:

$$\overline{MA}.\overline{MB}=\overline{MA'}.\overline{MB'}\quad,\quad \overline{MN}^2-\frac{1}{4}\overline{AB}^2=\overline{MN'}^2-\frac{1}{4}\overline{A'B'}^2,$$

N și N' fiind mijloacele coardelor $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$. Din trapezul dreptunghic INN'I', avem: $\overline{MN}=\overline{MN'}$, deci relația precedentă ne dă $\overline{AB}=\overline{A'B'}$. Perpendiculara dusă în M pe MF este deci o dreaptă pe care cele două cercuri interceptează coarde egale. *Înfășurătoarea dreptei este deci antipodara axei radicale, față cu polul*

F, *adică este parabola cu focarul* F *şi axa radicală ca tangentă în vârf.*

3. Să considerăm acum un al treilea cerc C‴, şi fie P, P′, P″ parabolele definite în modul de mai sus, corespunzătoare perechilor de cercuri (C′, C″), (C′, C‴), (C″, C‴). Dacă se adună ecuaţiile tangenţiale ale celor trei parabole, parte cu parte se obţine $0 = 0$ *adică parabolele* P, P′, P″ *formează un fascicol tangenţial* (sunt înscrise în acelaşi triunghiu).

Se vede uşor şi geometric această proprietate, astfel: Cele două parabole P, P′ au trei tangente comune la distanţă finită; fie D una din aceste tangente. Dreapta D fiind tangentă parabolei P, ea determină în cercurile C′, C″ coarde egale; deasemenea, această dreaptă, fiind tangentă şi parabolei P′, ea determină coarde egale şi în cercurile C′, C‴, deci determină coarde egale şi în cercurile C″, C‴, adică este tangentă şi parabolei P″.

Fie ABC triunghiul circumscris celor trei parabole; să facem unele precizări în legătură cu acest triunghiu. Cercul circumscris acestui triunghiu, trebuind să treacă deodată prin focarele celor trei parabole, va fi chiar cercul circumscris triunghiului FF′ F″ format din cele trei focare (mijloacele distanţelor centrelor). Dreapta lui SIMSON a punctului F — faţă cu triunghiul ABC — este tocmai tangenta în vârful parabolei P, adică axul radical al cercurilor C′, C″, dreaptă care este perpendiculară pe linia centrelor, deci şi pe F′F″. La fel dreptele lui SIMSON, ale punctelor F′, F″, în raport cu triunghiul ABC, sunt perpendiculare pe laturile opuse FF″, FF′ ale triunghiului FF′F″, deci cele două triunghiuri ABC, FF′F″ sunt două triunghiuri S (triunghiurile lui TRAIAN LALESCU). Se ştie că proprietatea de mai sus este reciprocă, adică şi dreptele lui SIMSON ale punctelor A, B, C faţă cu triunghiul FF′F″ sunt perpendiculare pe laturile opuse BC, CA, AB. (A se vedea „*La Géométrie du triangle*“, par TRAIAN LALESCU, pag. 11).

Una din proprietăţile interesante ale triunghiurilor S este următoarea: Dreptele lui SIMSON ale vârfurilor unuia din cele două triunghiuri, faţă cu celalt, sunt concurente.

In cazul de faţă această proprietate se verifică imediat; în adevăr dreptele lui SIMSON ale punctelor F, F′, F″, faţă cu triunghiul ABC, sunt axele radicale ale celor trei cercuri, deci sunt concurente în centrul lor radical K.

Se ştie deasemenea, că ortocentrele celor două triunghiuri S (ABC şi FF'F") sunt simetric aşezate faţă cu punctul de intersecţie al dreptelor lui SIMSON, adică în cazul nostru punctul K. Rezultă dar că *ortocentrul triunghiului* ABC *este simetricul ortocentrului triunghiului* FF'F" *în raport cu centrul radical* K *al celor trei cercuri.*

In mod direct, acest lucru se vede astfel: Ortocentrul triunghiului ABC trebuind să fie aşezat simultan pe directoarele celor trei parabole, va fi chiar punctul lor de intersecţie. In treacăt am demonstrat deci că *directoarele celor trei parabole sunt concurente.*

Dealtfel cele trei directoare sunt perpendicularele ridicate pe liniile centrelor în simetricile punctelor F, F', F", faţă cu axele radicale, deci aceste directoare sunt concurente în simetricul centrului cercului circumscris triunghiului format de cele trei centre (sau ortocentrul lui FF'F"), în raport cu centrul radical.

4. Să considerăm acum în spaţiul cu trei dimensiuni două sfere S', S", având ca ecuaţii punctuale normale:

$$S'(x, y, z) \equiv (x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2 - R'^2 = 0,$$

$$S''(x, y, z) \equiv (x - a'')^2 + (y - b'')^2 + (z - c'')^2 - R''^2 = 0.$$

Caşi în Geometria plană, pornind dela ideea că ecuaţia punctuală: $S' - S'' = 0$ reprezintă planul radical al sferelor, e firesc să ne întrebăm ce reprezintă ecuaţia:

$$\Sigma'(u, v, w, r) - \Sigma''(u, v, w, r) = 0, \text{ unde}$$

$$\Sigma'(u, v, w, r) = 0, \quad \Sigma''(u, v, w, r) = 0$$

sunt ecuaţiile tangenţiale *normale*, ale celor două sfere.

Dacă se ia planul: $ux + vy + wz + r = 0$, atunci raza ρ a cercului de secţiune făcut de acest plan în prima sferă, e dată de formula următoare:

$$\rho^2 = R'^2 - \frac{(a'u + b'v + c'w + r)^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Scriind că $\rho = 0$, obţinem ecuaţia tangenţială normală a primei sfere. Scăzând ecuaţiile tangenţiale normale ale celor două sfere, avem: $\Sigma'(u, v, w, r) - \Sigma''(u, v, w, r) = 0$, care desvoltată se scrie astfel:

$$(R'^2 - R''^2)(u^2 + v^2 + w^2) = 2[(a' - a'')u + (b' - b'')v + (c' - c'')w]$$

$$\times \left[\frac{1}{2}(a' + a'')u + \frac{1}{2}(b' + b'')v + \frac{1}{2}(c' + c'')w + r\right] = 0.$$

Avem astfel interpretarea cerută pentru ecuația

$$\Sigma'(u, v, w, r) - \Sigma''(u, v, w, r) = 0.$$

Ea reprezintă înfășurătoarea planelor care secționează sferele date după cercuri de raze egale.

Ecuația precedentă fiind verificată de coordonatele planului dela infinit $u = v = w = 0$, $r = 1$, suprafața înfășurătoare este un paraboloid. Deasemenea coordonatele:

$$a' - a'',\ b' - b'',\ c' - c'',\ \frac{1}{2}(a''^2 - a'^2 + b''^2 - b'^2 + c''^2 - c'^2 + R'^2 - R''^2)$$

ale planului radical al sferelor verificând ecuația, rezultă că și planul radical este tangent suprafeței. Observăm apoi că ecuațiile:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0,\ (a' - a'')u + (b' - b'')v + (c' - c'')w = 0,$$

$$\frac{1}{2}(a' + a'')u + \frac{1}{2}(b' + b'')v + \frac{1}{2}(c' + c'')w + r = 0$$

reprezintă respectiv ombilicala (cercul dela infinit), punctul dela infinit al liniei centrelor și mijlocul distanței centrelor. Deci axa paraboloidului este linia centrelor, planul tangent în vârf este planul radical, iar mijlocul distanței centrelor este focar (fiind vârful unui con isotrop circumscris paraboloidului).

In fine, paraboloidul făcând parte din fascicolul tangențial determinat de cele două sfere, este înscris în cele două conuri de rotație circumscrise sferelor, deci planele perpendiculare pe linia centrelor secționează suprafața după cercuri adică paraboloidul este de rotație.

Reunind aceste rezultate, obținem teorema:

Înfășurătoarea planelor care secționează două sfere după cercuri egale este un paraboloid de rotație, având ca focar mijlocul distanței centrelor, ca axă linia centrelor, ca plan tangent în vârf planul radical al sferelor și înscris în cele două conuri de rotație circumscrise sferelor.

Prin considerații simple de Geometrie elementară, se poate arăta ca și în Geometria plană că paraboloidul precedent este antipodara planului radical, în raport cu mijlocul distanței centrelor ca pol.

5. Dacă se mai dă o a 3-a sferă S''', atunci la fiecare pereche de sfere, formată cu 3 sfere, corespunde, un paraboloid din cei studiaţi mai sus; se arată uşor ca şi în plan, — fie prin calcul, fie geometric — că *cei 3 paraboloizi fac parte din acelaşi fascicol tangenţial, adică sunt înscrişi în aceeaşi desfăşurabilă (care este de clasa 4-a şi de ordinul 8).*

Altfel spus, *înfăşurătoarea planului care secţionează trei sfere după cercuri egale este o suprafaţă desfăşurabilă de clasa 4-a şi ordinul 8.*

6. Să considerăm acum o conică C', având ca ecuaţie punctuală:

$$C'(x, y) \equiv a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33}$$

şi dreapta: $$ux + vy + w = 0.$$

Lungimea l a coardei interceptate de conică pe această dreaptă se află uşor că este dată de formula:

$$l^2 = \frac{4(u^2 + v^2) \cdot \Gamma'(u, v, w)}{(a_{11} v^2 - 2a_{12} uv + a_{22} u^2)^2}$$

în care

$$\Gamma'(u, v, w) \equiv A_{11} u^2 + 2A_{12} uv + A_{22} v^2 + 2A_{13} uw + 2A_{23} vw + A_{33} w^2$$

A_{ij} fiind minorul corespunzător elementului a_{ij} din desvoltarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dacă presupunem $l = 0$, avem $\Gamma'(u, v, w) = 0$ şi regăsim ecuaţia cunoscută a conicelor.

Dacă luăm o a doua conică C'', de ecuaţie punctuală:

$$C''(x, y) \equiv b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2 + 2b_{13} x + 2b_{23} y + b_{33} = 0,$$

calculăm în acelaşi fel lungimea coardei interceptate de conică pe dreapta dată. Egalând cele două expresii, obţinem ecuaţia:

$$\frac{\Gamma'(u, v, w)}{(a_{11} v^2 - 2a_{12} uv + a_{22} u^2)^2} = \frac{\Gamma''(u, v, w)}{(b_{11} v^2 - 2b_{12} uv + b_{22} u^2)^2}$$

Această ecuație reprezintă o curbă (Γ) de clasa 6-a, tangentă tangentelor comune celor două conice date. In afară de aceste 4 tangente ale curbei (Γ) mai putem semnala și alte tangente; astfel, cele 6 coarde comune ale celor 2 conice sunt, evident, tangente acestei curbe. Dacă mai observăm că ecuațiile:

$$a_{11}\, v^2 - 2a_{12}\, uv + a_{22}\, u^2 = 0 \quad , \quad b_{11}\, v^2 - 2b_{12}\, uv + b_{22}\, u^2 = 0$$

sunt ecuațiile tangențiale ale punctelor dela infinit ale celor 2 conice, deducem că cele 4 asimptote ale conicelor sunt și ele tangente curbei (Γ).

In fine, scriind ecuația curbei (Γ) sub forma:

$$F(u, v, w) = f_6(u, v) + w \cdot f_5(u, v, w) + w \cdot f_4(u, v, w) = 0,$$

f_6, f_5, f_4 fiind polinoame omogene și de gradele 6, 5, 4 — în raport cu u, v, w — și calculând derivatele parțiale de primele 3 ordine ale polinomului $F(u, v, w)$, în raport cu u, v, w, se vede că acestea se anulează pentru $u = v = 0$, $w = 1$, dar derivatele parțiale de ordinul 4 nu sunt toate nule, deci dreapta dela infinit este o tangentă cuadruplă a curbei (Γ).

In rezumat, avem rezultatul:

Înfășurătoarea dreptei care determină pe două conice date coarde egale este o curbă de clasa 6-a, tangentă tangentelor comune ale celor 2 conice, coardelor lor comune, asimptotelor lor și având dreapta dela infini, ca tangentă multiplă de ordinul 4.

Această înfășurătoare se reduce la o curbă de clasa 4-a dacă cele 2 conice au o direcție asimptotică comună, sau la o conică dacă cele două conice date au ambele direcții asimptotice comune.

Se poate dovedi deasemenea, ca și în cazul cercurilor, că dacă se dau trei conice, cari se pot grupa câte două în trei feluri, atunci curbele (Γ), (Γ_1), (Γ_2) *corespunzătoare fiecărei perechi fac parte din același fascicol tangențial.*

Aceste proprietăți se pot extinde și la Geometria cu 3 dimensiuni.

CEZAR COȘNIȚĂ.

RAPORTUL COMISIUNII PENTRU PREMIUL „INGINER ALEXANDRU ROŞU"

Subsemnaţii membri ai comisiunii pentru decernarea premiului „Inginer ALEXANDRU ROŞU" pentru anul LIII, cuvenit celui mai harnic corespondent, elev de liceu, cercetând volumul LIII al *Gazetei Matematice*, am constatat cele ce urmează:

Şi în cursul volumului LIII, cea mai bogată activitate la *Gazeta Matematică* a avut-o tot d-l P. P. TEODORESCU, pe atunci elev clasa VIII din Bucureşti ca şi în anul precedent.

Pe copertele *Gazetei Matematice*, îl găsim cu cele mai multe probleme rezolvate trimise (72), iar în cuprinsul volumului LIII, îl găsim cu 25 de probleme rezolvate publicate.

In afară de aceasta, în cursul volumului i s'au publicat d-lui P. P. TEODORESCU două note, (8, 29), două probleme propuse (6440, 6465), trei exerciţii (6, 7, 33) şi două răspunsuri la cereri.

Dintre problemele rezolvate publicate se cuvine să menţionăm soluţiile date problemelor 5854, 5951, 6106, 6129 şi 6258.

Faţă de cele de mai sus şi ţinând seama că activitatea celorlalţi elevi de liceu este cu mult inferioară activităţii depuse de d-l P. P. TEODORESCU, propunem ca premiul „Inginer ALEXANDRU ROŞU" să fie acordat pentru volumul LIII d-lui P. P. TEODORESCU, azi student.

Valoarea premiului pentru acest an este de lei 5.000, sumă donată de d-l ALEXANDRU AL. ROŞU.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „INGINER ALEXANDRU ROŞU"

GH. I. DUMITRESCU, ALEXANDRU AL. ROŞU

Acest raport a fost aprobat de Adunarea Generală în şedinţa dela 14 Februarie 1949.

NOTE MATEMATICE

20. *Asupra unor identităţi.* In rândurile care urmează vom rezolvi relaţia de recurenţă liniară şi omogenă, având coeficienţii constanţi [1],

$$u_{n+m} - S_1 u_{n+m-1} + \ldots + (-1)^m S_m u_n = 0, \qquad (1)$$

1) T. ANGHELUŢĂ, Curs de Algebră Superioară, vol. II, pag. 93.

în condițiile inițiale precizate mai jos și vom pune soluția sub trei expresii, diferite. Egalând aceste expresii obținem identitățile la care se referă titlul. $S_1, S_2, \ldots, S_m$ sunt funcțiile simetrice fundamentale [1] ale numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Cu alte cuvinte aceste numere sunt rădăcinile ecuației algebrice.

$$x^m - S_1 x^{m-1} + \ldots + (-1)^m S_m = 0. \qquad (2)$$

Cu ajutorul relației (1) se calculează [2], după NEWTON, funcțiile simetrice

$$a_1^p + a_2^p + \ldots + a_m^p,$$

p fiind întreg și pozitiv.

Ne propunem să dăm soluția relației (1) în condițiile

$$u_0 = u_1 = \ldots = u_{m-2} = 0 \quad u_{m-1} = 1,$$

anunțate mai sus și diferite de acelea necesare pentru calculul funcțiilor simetrice precedente.

Știm că soluția *generală* a relației (1) are expresia

$$u_n = A_1 a_1^n + A_2 a_2^n + \ldots + A_m a_m^n \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, A_1, A_2, \ldots A_m$$

fiind constante oarecare, independente de n.

Pentru determinarea soluției particulare, în condițiile date, avem sistemul de ecuații liniare

$$A_1 a_1^h + A_2 a_2^h + \ldots + A_m a_m^h = \begin{cases} 0, & h = 0, 1, \ldots m-2 \\ 1, & h = m-1 \end{cases}$$

De aici, deducem ușor valorile constantelor

$$A_i = \frac{1}{(a_i - a_2)\ldots(a_i - a_{i-1})\,(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_m)}.$$

Avem astfel soluția căutată

$$u_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i^n}{(a_i - a_1)\ldots(a_i - a_{i-1})\,(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_m)}. \qquad (3)$$

Scriind membrul al 2-lea pentru $n = 0, 1, \ldots, m-1$ și ținând seamă de condițiile inițiale, găsim identitățile lui EULER [3].

1) Idem, pag. 208.
2) Idem, pag. 217.
3) Cursul citat, vol. I, pag. 20.

Putem pune soluţia sub formă de determinant. Pentru aceasta, considerăm sistemul de ecuaţii liniare

$$u_{m-1} = 1$$

$$S_1 u_{m-1} - u_m = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{n+1} u_{m-1} - S_n u_m + \ldots + (-1)^{n+1} u_{m+n} = 0$$

Aici convenim să luăm $S_h = 0$, pentru $h > m$. Deducem din sistem, după regula lui CRAMER,

$$u_{m+n} = \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ S_2 & S_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_n & S_{n-1} & S_{n-2} & \ldots & 1 \\ S_{n+1} & S_n & S_{n-1} & \ldots & S_1 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

o a doua expresie a soluţiei. Pentru simplificarea scrierii am dat expresia lui u_{m+n}.

Pentru a obţine a 3-a expresie a soluţiei, reamintim identitatea [1]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{m-2} & a_2^{m-2} & \ldots & a_m^{m-2} \\ a_1^{m+n} & a_2^{m+n} & \ldots & a_m^{m+n} \end{vmatrix} = V(a_1, a_2, \ldots, a_m) P_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

$V(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ fiind determinantul VANDERMONDE al numerelor indicate, iar $P_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ polinomul al cărui termeni sunt combinările cu repetiţie ale aceloraşi numere, luate câte $n+1$. Urmează egalitatea

$$u_{m+n} = P_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_m). \qquad (5)$$

Egalând expresiile lui u_{m+n} date de (3) şi (5), avem identităţile

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i^{m+n}}{(a_i - a_1)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_m)} = P_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

n fiind întreg pozitiv sau nul. Mai mult, există identitatea şi

1) Idem, Exerc. 19, pag. 90.

pentru $n = -1$. Aceste identităţi generalizează pe acelea ale lui EULER[1].

In mod analog, obţinem identităţile

$$P_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ S_2 & S_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n+1} & S_n & S_{n-1} & \ldots & S_n \end{vmatrix}.$$

Sunt şi identităţi [2] care diferă de cele precedente prin schimbarea rolurilor simboalelor S_i şi P_i între ele.

In cazul particular $a_1 = a_2 = \ldots = a_m$ relaţia de recurenţă ia forma

$$u_{m+n} - C_m^1 u_{m+n-1} + C_m^2 u_{m+n-2} - \ldots + (-1)^m C_m^m u_n = 0.$$

Condiţiile iniţiale fiind acelea din cazul general şi scriind

$$u_{m-1} = C_{m-1}^{m-1} \quad \text{găsim} \quad u_{m+n} = C_{m+n}^{m-1}$$

servindu-ne de expresia (4) şi aplicând identitatea dela sfârşitul exerciţiului citat mai sus. Substituind numerelor u_i valorile aflate, relaţia de recurentă ne dă identitatea [3]

$$C_{m+n}^{m-1} = C_m^1 C_{m+n-1}^{m-1} - C_m^2 C_{m+n-2}^{m-1} + \ldots + (-1)^n C_m^{n+1} C_{m-1}^{m-1}.$$

Scriind această identitate pentru $n = -1, 0, 1, \ldots, m-1$ şi adunând egalităţile obţinute găsim formula

$$\sum_{n=-1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} C_m^i C_{m+n-i}^{m-1} = C_{2m}^m.$$

MIHAI R. CONSTANTINESCU.

21. *Asupra generalizării construcţiei tangentei la o familie de curbe.* In *Gazeta Matematică* vol. XXXIII pag. 401, am publicat un articol asupra construcţiei tangentei la o familie de curbe (Γ) obţinută în felul următor:

Se dau elementele fixe: un punct O, o direcţie Δ şi o curbă (C), toate în acelaşi plan. Se ia un punct M mobil pe curba (C)

1) Idem, Exerc. 31, pag. 92.

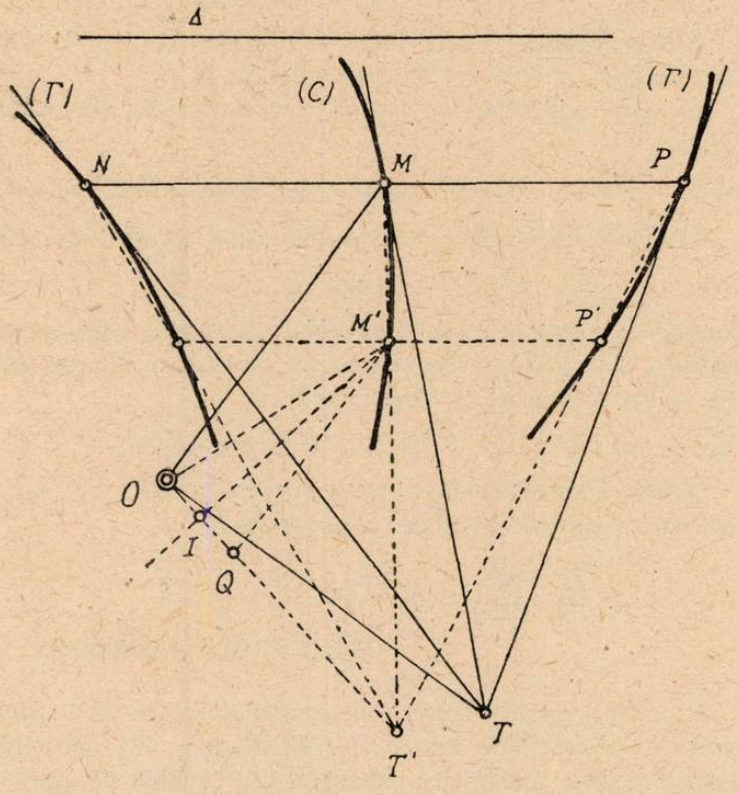
2) Idem, Exerc. 37, pag. 94.

3) Identitatea exprimă că în produsul $(1+x)^m (1+x)^{-m}$ coeficientul lui x^{n+1} este nul. Cursul citat, Exerc. 10, pag. 57.

şi din M se duce o paralelă la dreapta Δ, pe care se iau punctele P şi N astfel ca MP = MN = K.OM.

Punctele P şi N, pentru un K dat, când M se mişcă pe curba (C) formează o curbă (Γ) cu două ramuri.

Tangentele în punctele P şi N la fiecare din cele două ramuri ale curbei (Γ) se obţin ridicând perpendiculara în punctul O, pe raza vectoare OM, până ce întâlneşte în punctul T, tangenta în



M la curba (C). Dreptele PT şi NT sunt tangentele în P şi N la fiecare din cele 2 ramuri ale curbei (Γ).

Vrem să generalizăm acum problema şi pentru cazul când elementele fixe date: punctul O, direcţia Δ şi curba (C) nu sunt cuprinse în acelaşi plan, ci complet independente unele de altele, precum şi pentru cazul şi mai general când curba (C) este o curbă strâmbă în spaţiu.

Dacă urmărim, pas cu pas, raţionamentul făcut în articolul publicat în *Gazeta Matematică* vol. XXXIII pag. 401, cu notaţiunile din figura alăturată, vom constata, mai întâi, că dreptele: MP, MN, M'P', M'N' şi MM' alcătuesc un singur plan π_1', determinat de cele două paralele duse prin M şi M' la dreapta Δ. Pe cale de consecinţă, rezultă că şi dreptele PP' şi NN' sunt tot în planul π_1' şi că deci ele se pot întâlni cu MM'. Aşa dar, există punctul T' de concurenţă a lor.

Pe de altă parte, mai constatăm că şi dreptele OM, OM' şi MT' formează un plan π_2', care în general este distinct de π_1' şi că deci şi dreptele OT', M'Q şi M'I vor fi cuprinse în planul π_2', ca drepte sprijinindu-se pe alte 2 drepte din acel plan.

Trecând la limită, planul π_1' va căpăta o poziţie-limită π_1 determinată de tangenta MT la curba (C) şi de dreapta MP, concurente în M, iar planul π_2' va căpăta o altă poziţie-limită π_2 determinată de tangenta MT şi dreapta MO, concurente tot în M.

Aşa dar, la limită, dreapta OT va rămâne perpendiculară pe OM în planul π_2 sprijinindu-se pe MT în punctul T.

In concluzie, construcţia tangentei la una din ramurile curbei (Γ) astfel generalizată, într'un punct P al ei, revine la a proceda în felul arătat mai jos:

a) Se duce tangenta în M *la curba* (C), *tangentă care se presupune a putea fi trasată.*

b) Se ridică o perpendiculară în punctul O, *pe raza vectoare* OM, *care să se sprijine pe tangenta* MT, *în punctul T.*

c) Se uneşte punctul P *cu* T *şi dreapta astfel obţinută* PT *este tangenta în* P *la curba* (Γ) *generalizată.*

M. NICOLAU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

INSTITUTUL POLITEHNIC DIN BUCUREŞTI

Examenul de Analiza Matematică la Secţia Electro Mecanică
Octombrie 1948

Problema I. Să se calculeze integrala dublă a funcţiei

$$f(x, y) = \frac{2ay - x^2 - y^2}{y}$$

unde a este o constantă pozitivă dată, întinsă la domeniul D din planul xy limitat prin semicercul

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

şi unde

$$0 \leqslant y \leqslant a \quad , \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$

înlocuind integrala dublă printr'o integrală curbilinie echivalentă,

$$\int P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

întinsă la conturul care limitează domeniul D. Se va lua $Q \frac{-x^3}{3y}$ şi se va alege P astfel încât să se anuleze pentru $y = 0$.

2°. Să se calculeze apoi aceeaşi integrală prin schimbarea de variabilă

$$x^2 + y^2 - 2uy = 0 \quad , \quad y = vx$$

u şi v fiind noile variabile.

Problema II. Se consideră funcţiunea $f(x, y)$ definitivă în modul următor:

$$f(x, y) = 0, \text{ dacă } x+y=0 \text{ şi } f(x, y) = xy \sin \frac{\pi (x - y)}{2 (x + y)}$$

pentru oricare alt sistem de valori x, y. Să se arate că:

funcţiunea este derivabilă şi în origine,

cele două derivate parţiale sunt continui în origină.

Să se calculeze $f''_{x,y}(0, 0)$, $f''_{y,x}(0, 0)$ şi să se compare.

Problema III. Fie ecuaţia diferenţială

$$(x + 2x^2 + y^2)\, dx + y(1 - x)\, dy = 0.$$

Să se determine exponentul constant α şi $A(y)$, $B(x)$, astfel încât înmulţind primul membru prin

$$[x A(y) + B(x)]^{\alpha},$$

să avem o diferenţială totală exactă. Să se găsească apoi integrala generală.

BIBLIOGRAFIE

Archives Internationales d'Histoire des Sciences. Tome XXVIII. No. 6, janvier 1949.

Bulletin Bibliographique, des publications périodiques reçues pendant les années 1945, 1946 et 1947. Académie des sciences de l'Institut de France. Paris — Gauthier-Villars.

Revista Matematică din Timişoara. Vol. XXIX. Nr. 1. Martie 1949. Comitetul de colaborare al R.M.T. V. ALACI: Ecuaţiile algebrice ale d-lui Prof. D. POMPEIU. Notă matematică. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

A. GLODEN: Un nouveau procédé de résolution de la sextigrade normale

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 \overset{6}{=} B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$$

(Ext. din « *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège* » 21 Oct. 1948).

CERERI

351. In teoria numerelor lui R. D. CARMICHAEL găsesc citate două lucrări de BACHMANN:

« *Arithmetik der quadratischen Formen* » şi « *Analytische Zahlentheorie* ».

In ce editură sunt apărute şi cum s'ar putea procura, aceste tratate chiar şi dela particulari?

MARIOARA TÂLMACIU — Caravăneţi-Teleorman.

DIVERSE

a) Noui membri la Societatea „Gazeta Matematică"

In ziua de 14 Februarie 1949 au fost aleşi următorii noui membri la « *Gazeta Matematică* »: BALDOVIN DEM. FLAVIU (ing.); BĂLTEANU RUDI (ing.); CROHMĂLNICEANU OVID (ing.); GHEORGHIU C. OCTAVIAN (ing.); GHEORGHIU D. TRAIAN (ing.); GIURGIUMAN TRAIAN (lic. în mat.); HARABAGIU MAXIM (ing.); IACOVACHI N. ION (ing.); IONESCU FULGER M. CORNELIUS (ing.); IONESCU-TULCEA T. C. (lic. în mat.); IORGULESCU N. FLORIN (ing.); MARCOVICI LIONEL (ing.); MAZILU PANAIT (ing.); MOCANU I. CONSTANTIN (căpitan-ing.); NACHMAN MANFRED (lic. în mat.); POŞULESCU ZAMFIRESCU ION (ing.); POPP SIMONA (lic. în mat.); RĂDULESCU GH. OCTAVIAN (căpitan-ing.); STIHI E. E. (dr. în mat.); ŞERBESCU M. DUMITRU (ing.); TEODORESCU DORA (lic. în mat.); TEODORESCU N. (dr. în mat.); TEODOREANU GH. TEODOR (lic. în mat.); TEODORU VICTORIA (lic. în mat.); TURTOIU FĂNICĂ (căpitan-ing.); VOICULESCU IRINA (lic. în mat.); VRACA NICOLAE (ing.); VULPANOVICI BORIS (ing.) şi WEGENER N. EUGEN (ing.).

In ziua de 21 Februarie au fost aleşi ca membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*: DOBRESCU EUGEN (dr. în mat.); HALANAY ARISTIDE (lic. în mat.) şi GRÜNBERG MEYER (ing.).

b) Doctorate recente în matematici

1. D-l E. DOBRESCU, membru al Societăţii *Gazeta Matematică*, a trecut doctoratul în matematici în ziua de 15 Februarie 1949 cu subiectul « *Contribuţiuni la o analiză infinitezimală bidimensională* » în faţa comisiunii compuse din d-nii profesori S. STOILOV, preşedinte, GR. MOISIL şi MIRON NICOLESCU, membri.

2. In ziua de 11 Martie 1949, d-l N. N. MIHĂILEANU membru al Soc. *Gazeta Matematică* a trecut doctoratul în matematici cu subiectul: « *Obiecte geometrice în geometria diferențială* » în fața comisiunii compuse din d-nii profesori G. VRÂNCEANU, președinte, GR. MOISIL și MIRON NICOLESCU, membri.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4647. *Să se determine ecuațiile care dau pe* x *și* y *astfel încât să avem*

$$\cos(x+y) = \cos x + \cos y.$$

Să se arate deasemenea, dacă există valori de x *și* y, *astfel încât să avem*

$$\operatorname{cotg}(x+y) = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y.$$

O. N. ȚINO.

Observăm dela început că relația

$$\cos(x+y) = \cos x + \cos y \quad (I)$$

depinzând de două variabile x și y reale, una din ele poate fi dată arbitrar, ca urmare problema revine la a preciza condițiile în care trebue dată variabila arbitrară pentru ca valorile rezultate pentru cealaltă să fie reale. Mai mult, observând că relația (I) este simetrică în raport cu variabilele x și y, problema poate fi complet rezolvată dacă ne-am fixat de exemplu că variabila y este aceea care ia valori arbitrare, știind că unei soluții $x = a$, $y = b$ îi corespunde soluția simetrică $x = b$, $y = a$, evident exceptând cazul particular când relația (I) are loc pentru $x = y$.

In acest caz particular $y = x$, ecuația devine

$$\cos 2x - 2\cos x = 0 \quad \therefore \quad 2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0 \quad (1)$$

care admite ca singură soluție posibilă

$$\cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Luând pentru $\sqrt{3}$ valoarea apropiată 1,732050, avem

$$\cos x = -0{,}366025 \quad \therefore \quad \cos(180 \mp x) = 0{,}366025$$

$$\therefore \quad \log\cos(180 \mp x) = \bar{1}{,}56351 \quad \therefore \quad y = x = k.360^0 \pm 111^0 28' 15'' \quad (3)$$

In cazul general, în care y nu ia una din valorile care satisfac ecuația (1), vom pune

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u,\ \operatorname{tg}\frac{y}{2}=v \tag{4}$$

pentru care, având

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos y=\frac{1-v^2}{1+v^2},\ \sin y=\frac{2v}{1+v^2},$$

relația (I) devine

$$(3v^2-1)\ u^2-4vu-(1+v^2)=0 \qquad \text{(I')}.$$

Ecuația (I') în u are rădăcinile sale reale numai dacă realizantul R al ecuației satisface condiției $R\geqq 0$; dar

$$R\equiv 3v^4+6v^2-1=$$

$$3\left(v^2+1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(v-\sqrt{-1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}\right)\left(v+\sqrt{-1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}\right),$$

deci ecuația (I') în u are rădăcinile sale reale în cazul când

$$|v|\geqq\sqrt{-1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}, \tag{5}$$

valoarea aproximativă, cu eroare $<\frac{1}{10^5}$, fiind 0,39332.

Să considerăm câteva valori particulare ale lui $v=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$.

a) Dacă $v=+1$ ecuația (I') devine

$$u^2-2u-1=0 \tag{6}$$

și dă pentru u valorile: $u_1=1+\sqrt{2}$ și $u_2=-(\sqrt{2}-1)$. (7)

Să punem $u_2'=\sqrt{2}-1$ și să reprezentăm cele două valori ale tangentelor obținute:

$$\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=u_1=1+\sqrt{2}\ \text{și}\ \operatorname{tg}\left(-\frac{x_2}{2}\right)=u_2'=\sqrt{2}-1.$$

Din $u_2'=\sqrt{2}-1$, avem $\dfrac{u_2'}{1-u_2'}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (8)

Dacă O este centrul cercului trigonometric, A originea arcelor, $\overline{AT}$ segmentul tangentei egal cu $\overline{OA} = +1$ şi $\overline{AP}$ segmentul tangentei egal cu u_2', avem $\overline{OT} = \sqrt{2}$, deci relaţia (8) poate fi scrisă

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OT}},$$

deci OP este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOT = \frac{\pi}{4}$; ca urmare

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{x_2}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} \quad \therefore \quad \frac{x_2}{2} = k\pi - \frac{\pi}{8},$$

deci $$x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots 4). \qquad (9)$$

Luând acum pe tangentă segmentul $\overline{AR} = \overline{AT} + \overline{TR} = 1 + \sqrt{2}$, observăm că triunghiul OTR este isoscel $(\overline{OT} = \overline{TR} = \sqrt{2})$, deci

$$\sphericalangle TOR = \frac{1}{2} \sphericalangle OTA = \frac{\pi}{8},$$

ca urmare avem

$$u_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{x_1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\therefore \quad x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \qquad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots) \qquad (10)$$

b) Dacă în ecuaţia (I') facem $v = -1$, obţinem ecuaţia

$$u^2 + 2u - 1 = 0$$

cu rădăcinile $u_1' = -1 - \sqrt{2} = -u_1$ şi $u_2' = -1 + \sqrt{2} = -u_2$, deci se reduce la cazul precedent.

c) Dacă scriem ecuaţia (I') sub forma

$$\left(3 - \frac{1}{v^2}\right)u^2 - \frac{1}{v}u - \left(\frac{1}{v^2} + 1\right) = 0 \quad (I''),$$

ceea ce revine la a înlocui pe $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ în funcţie de $\operatorname{cotg}\frac{y}{2}$, observăm că dacă $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ tinde către ∞, ecuaţia (I") devine

$$3u^2 - 1 = 0 \quad \therefore \quad u = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dacă punem

$$u_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ şi } u_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \therefore \operatorname{tg}\left(\frac{x_1}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \text{ şi } \operatorname{tg}\left(\frac{x_2}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

deci soluţiile

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad , \quad x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Mai observăm că aceste cazuri particulare, ţinând seamă de valorile lui y corespunzătoare valorilor $v = +1, -1, \infty$ pot fi soluţionate plecând dela relaţia dată sub forma ei iniţială.

II. Presupunând pe y dat în relaţia

$$\operatorname{cotg}(x+y) = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y \quad \text{(II)}$$

şi punând $\operatorname{cotg} x = u$, $\operatorname{cotg} y = v$, avem ecuaţia în u următoare:

$$u^2 + uv + (1 + v^2) = 0 \quad \text{(II')}.$$

Realizantul R al ecuaţiei (II') în u este

$$R = -(4 + 3v^2) < 0,$$

deci oricare ar fi valoarea reală a lui v ecuaţia (II') este imposibilă pentru valori reale ale lui u Observăm însă că în trecerea dela ecuaţia (II) desvoltată la (II') am presupus $(u + v)$ finit şi diferit de zero. Dacă $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}. y = 0$, pentru ca egalitatea (II) să aibă loc trebue să avem şi $\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y = 1$, deci cele două cotangente sunt rădăcinile ecuaţiei $U^2 + 1 = 0$, deci imaginare. Dacă $(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y)$ este infinit, una din cotangente sau amândouă are valoarea ∞. In primul caz ecuaţia (II) nu poate avea loc. In cazul al doilea, dacă ε este un arc foarte mic tinzând către zero, egalitatea (II) are loc pentru $x = k_1\pi + \varepsilon$, $y = k_2\pi + \varepsilon$ (k_1 şi k_2 întregi de aceeaşi paritate, iar ε pozitiv sau negativ).

Au rezolvat problema d-nii PETRE P. TEODORESCU (student inginer Bucureşti) şi KOSTAKE TELEMAN.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5290. *Să se demonstreze că:*

1°. *Dacă în o bază de numerație* B, *primele sau ultimele două cifre ale patratului numărului de două cifre* aa *sunt egale, atunci și ultimele sau primele două cifre ale acelui patrat sunt egale.*

2°. *Dacă în un sistem de numerație* B, *numărul* aabb *este patratul unui număr* cd, *format de două cifre diferite, atunci* $(B+1)$ *nu e niciodată număr prim.*

V. THÉBAULT.

Soluție dată de d-nii CRISTEA D. EFTIMIE și C. BAKONYI (când erau studenți ingineri).

1°. Fie

$$N = bcdd = (aa)^2.$$

Avem succesiv

$$bB^3 + cB^2 + d(B+1) = a^2(B+1)^2$$

$$\therefore\ b(B^3+1) + c(B^2-1) + d(B+1) + c - b = a^2(B+1)^2$$

Rezultă că $B+1$ trebue să dividă pe $\pm(c-b)$. Cum c și b sunt mai mici decât B urmează că

$$\pm(c-b) < B+1$$

se divide prin $B+1$ numai dacă $c = b$.

La fel se demonstrează că dacă

$$bbcd = (aa)^2$$

atunci $c = d$.

2°. Fie, în baza B:

$$aabb = (cd)^2 \quad \therefore \quad (B+1)(aB^2+b) = (cB+d)^2 = [c(B+1) - c + d]^2$$

care arată că numărul $(-c+d)^2$ trebue să fie multiplu al lui $B+1$, adică

$$(-c+d)^2 = k(B+1).$$

Dar $d - c \leqslant B-1$. Pentru ca produsul $k(B+1)$ să fie pătrat perfect, trebue ca întregul k să fie mai mic sau egal cu $B-1$, adică $B+1$ să fie un număr compus căci dacă $B+1$ ar fi prim ar trebui să avem

$$k = B+1.$$

Au dat bune soluții, puțin diferite de precedenta d-nii: IULIAN PETRESCU, STELIAN CETĂȚEANU, MARIN GH. POPESCU și P. P. DRĂGHICESCU.

PROBLEMA 5574. *Se dă un triunghiu* ABC *şi o direcţie* Δ. *Paralelele la* Δ *duse prin vârfurile* A, B, C *întâlnesc laturile opuse respectiv în* A', B', C'. *Fie* M, N, P *mijloacele laturilor triunghiului* A' B' C'.

1°. *Să se arate că triunghiul* MNP *este circumscris triunghiului* ABC *şi omologic cu el.*

2°. *Să se afle locul geometric al centrului de omologie, când direcţia* Δ *variază.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de d-nii: MIRCEA D. POPA (student inginer), P. P. DRĂGHICESCU şi D-TRU GH. VASILIU, (Iaşi).

Fie

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \qquad (1)$$

ecuaţia dreptei Δ în *coordonate baricentrice.* O paralelă la Δ se obţine scriind fascicolul de drepte ce trece prin intersecţia lui Δ cu dreapta de la infinit $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ şi dând parametrului o valoare particulară. Astfel din

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + \lambda (x_1 + x_2 + x_3)$$

obţinem paralelele la Δ ce trec respectiv prin A, B, C determinând pe λ astfel încât punctele A (1, 0, 0), B (0, 1, 0), C (0, 0, 1) să verifice ecuaţia. Găsim ecuaţiile:

(AA') $\quad (b - a)\, x_2 + (c - a)\, x_3 = 0$

(BB') $\quad (a - b)\, x_1 + (c - b)\, x_3 = 0$

(CC') $\quad (a - c)\, x_1 + (b - c)\, x_2 = 0$

Deducem coordonatele punctelor A', B', C', anume:

A' $[0,\ c-a,\ a-b]$; B' $[b-c,\ 0,\ a-b]$; C' $[b-c,\ c-a,\ 0]$.

Pentru a determina coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului A'B'C' reamintim că fiind date două puncte M (y_1, y_2, y_3) şi N (z_1, z_2, z_3), coordonatele mijlocului segmentului MN sunt:

$$x_1 = y_1 + kz_1 \ ; \ x_2 = y_2 + kz_2 \ ; \ x_3 = y_3 + kz_3, \qquad (2)$$

în care

$$k = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{z_1 + z_2 + z_3}.$$

Rezultă că punctele M, N, P, mijloacele laturilor B'C', C'A', A'B', au coordonatele:

$$M[-(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2] \; ; \; N[(b-c)^2, -(c-a)^2, (a-b)^2];$$
$$P[(b-c)^2, (c-a)^2, -(a-b)^2].$$

De aci se vede că M, N, P sunt asociatele punctului

$$Q[(b-c)^2 \; , \; (c-a)^2 \; , \; (a-b)^2]$$

şi prin urmare triunghiul MNP este circumscris şi omologic cu triunghiul ABC, centrul de omologie fiind Q [1].

2°. Din $x_1 = (b-c)^2 \; ; \; x_2 = (c-a)^2 \; ; \; x_3 = (a-b)^2$ se deduce imediat

$$\pm\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2} \pm \sqrt{x_3} = 0$$

sau raţionalizând ecuaţia:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 = 0. \qquad (3)$$

Aceasta arată că atunci când direcţia dată de dreapta Δ variază, centrul de omologie Q descrie a doua elipsă a lui STEINER (3), care este tangentă laturilor triunghiului, punctele de contact fiind mijloacele laturilor triunghiului ABC.

S'a primit o soluţie bună dela d-l AUREL POPA, Iaşi, în axe oblice carteziene. S'a primit şi o soluţie greşită.

Observări. D-l MIRCEA D. POPA arată că proprietatea de la punctul 1° din enunţ se menţine, dacă în loc de trei drepte paralele trecând prin A, B, C se consideră trei drepte ce pornesc din acelaşi punct S şi trec prin A, B, C. Când S este la infinit se obţine cazul din această problemă.

Tot d-l MIRCEA D. POPA demonstrează şi această proprietate:

„Dreptele ce unesc vârfurile triunghiului ABC *cu vârfurile triunghiului median al triunghiului pedal corespunzător punctului lui* STEINER, *sunt paralele cu axul ortic al triunghiului* ABC".

PROBLEMA 6378. *Notaţiile fiind cele obişnuite, să se arate că în orice triunghiu există relaţia*

$$\cos(B-C)(a - b\cos C) = h_a \sin(C-B) + c\cos C.$$

STELIAN C. PANTAZOPOL.

---

1) Vezi « *Coordonnées baricentriques* » par CÉZAR COSNITZA, pag. 13.

Soluția I-a dată de d-nii CEZAR N. I. BOERESCU (București) și SILVIU A. TELEMAN.

Avem succesiv

$$c\cos(B - C - B) = c\cos C$$

$$c\cos(B - C)\cos B + c\sin(B - C)\sin B = c\cos C$$

$$\cos(B - C)(a - b\cos C) + h_a\sin(B - C) = c\cos C$$

deoarece $a = b\cos C + c\cos B$ și $h_a = c\sin B$.

Soluția II-a dată de d-nii MIRCEA V. SOARE, L. M. C. ATHANASIU, PETRE A. CERNESCU, NICOLAE A. CERNESCU, ADR. MIHAI EFTODE, I. C. UDREA.

Avem

$$a - b\cos C = c\cos B \quad \text{și} \quad h_a = c\sin B.$$

Relația de demonstrat devine

$$c\cos B\cos(B - C) = c\sin B\sin(C - B) + c\cos C$$

care e evidentă, dacă o scriem sub forma

$$c[\cos B\cos(B - C) + \sin B\sin(B - C)] = c\cos C$$

sau

$$c\cos[B - B + C] = c\cos C.$$

Notă. 1. D-l P. P. TEODORESCU stabilește relația din enunț servindu-se de formula sinusurilor.

2. Alte diferite soluții s'au primit dela d-nii: LONGIN N. ANDRONESCU, N. AL. BUCUR, VIRGIL G. CONSTANTINESCU, I. I. FILIMON, VAL. A. PETCU, SILVIU PUȘCAȘU, GH. GH. RISTEA, C. ȘERBAN, G. ENESCU, M. R. CONSTANTINESCU, PAUL CONSTANTINESCU, I. N. MĂNCESCU, GH. N. OLTEANU, EMIL C. TUDOR, PAUL N. CIUCESCU, DAN D. POPOVICI, I. T. MUNTEANU, I. I. NOVAC, VALENTIN IONESCU, E. A. DODU, I. N. PISANCA, GH. ST. PĂUNESCU, AL. GH. MORAITE, TH. M. HANGAN, EMERIC G. DEUTSCH, ARISTIDE I. DELEANU, VIOREL A. VISARION.

G. I. L.

PROBLEMA 6388. *Fie* A, B *două puncte pe un diametru* Δ *al cercului* O; *o dreaptă mobilă paralelă cu* Δ *întâlnește cercul în* M *și* N. *Local geometric al intersecției dreptelor* AM, BN *este o conică, trecând prin capetele diametrului perpendicular pe* Δ. *Dacă* B *este simetricul, față de centru, al inversului* C *al punctului* A, *conica se reduce la un cerc.*

Dacă $\overline{OP} = \overline{AC}$ *și* E *este inversul lui* D, *centrul cercului loc geometric este simetricul lui* O *față de* E.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluția I-a. Să considerăm un cerc de centru f *și două puncte* a, b *pe un diametru al său. Un diametru mobil al cercului îl taie pe acesta în* m *și* n. *Locul geometric al punctului de intersecție p (am, bn) este un cerc* (γ).

Într'adevăr paralela prin p la diametrul mn taie pe ab în l. Din triunghiurile asemenea amf și apl, bnf și bpl deducem

$$\frac{la}{fa} = \frac{lp}{fm} = \frac{lp}{fn} = \frac{lb}{fb}.$$

Această relație arată că punctul l este fix și anume este conjugatul lui f față de a și b. Se mai deduce ușor că lp = constant deci locul lui p este un cerc (γ) de centru l [A se vedea și *G. M.* LI, problema 6067 a d-lui GH. BUICLIU, pag. 580. observația 2^0 [1]].

Să notăm cu i, j punctele unde diametrul perpendicular pe ab taie cercul. Se găsește ușor că pentru ca cercul (γ) să treacă prin i, j este necesar ca punctul a și simetricul lui b față de f să fie inverse față de cercul fundamental [2].

Efectuând acum o transformare omografică astfel ca punctele i, j să devină punctele ciclice ale noului figuri transformate obținem enunțul problemei 6388.

M. D. POPA.

Soluția a II-a analitică, dată de D-nii MIHAI R. CONSTANTINESCU, M. D. POPA (Politehnica București) și PETRE P. TEODORESCU (liceul Matei Basarab, București). Alegem pe O ca origine și pe Δ ca axă Ox; fie r raza cercului și a, b abscisele punctelor A și B. Punctele mobile au coordonatele M $(-\alpha, \beta)$, N (α, β) unde

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2. \qquad (1)$$

Avem atunci

$$(AM)\quad y = -\frac{\beta}{\alpha + a}(x - a)\quad,\quad (BN)\quad y = \frac{\beta}{\alpha - b}(x - b)$$

de unde

$$\alpha = \frac{(a-b)x}{a+b-2x}\quad,\quad \beta = \frac{(a+b)y}{a+b-2x}. \qquad (2)$$

Eliminând parametrii α, β între (1) și (2) obținem ecuația locului

$$[(a-b)^2 - 4r^2]\,x^2 + (a+b)^2 y^2 + 4r^2(a+b)x - r^2(a+b)^2 = 0$$

deci o conică, cu axele de simetrie paralele cu axele coordonate.

1) Observația D-lui M. POPA (N. R).

2) *ia, ib* trebue să retaie cercul la capetele unui diametru, adică $\sphericalangle$ *aib* este drept deci $fa \cdot fb = if^2 = r^2$.

Natura ei depinde de semnul coeficientului lui x^2, adică după cum $\overline{AB}$ este mai mare, egal ori mai mic decât diametrul cercului, conica devine elipsă, parabolă ori iperbolă.

Conica este cerc, când

$$(a-b)^2=(a+b)^2+4r^2 \quad \therefore \quad ab+r^2=0$$

Abscisa centrului este

$$-2r^2:(a+b).$$

Aceste determinări corespund precizărilor date în enunț.

Observare. D-l P. P. TEODORESCU, demonstrează direct, geometric, propoziția pentru cerc și o deduce în cazul general, printr'o proecție conică. Din soluția d-sale desprindem încă următoarele observații:

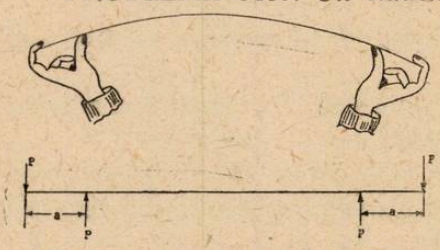
a) Raza cercului din enunț este $\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2}\cdot r$.

b) Fie A, B, L *trei puncte pe un diametru* Δ *al unei conice* (C). *O dreaptă mobilă, dusă prin* L *întâlnește conica în* M *și* N. *Locul geometric al intersecției* P *a dreptelor* AM, BN *este o conică* (Γ), *trecând prin punctele de contact ale tangentelor duse din* L *la conica* (C).

c) Ecuația (1) care servește pentru eliminarea parametrilor ne arată că obținem același loc geometric pentru puncte M $(\alpha, -\beta)$, sau M $(-\alpha, -\beta)$ deci în cazul când dreapta mobilă MN se deplasează perpendicular pe Δ sau trece prin O.

d) O proiecție conică a ultimei figuri arată că proprietatea rămâne valabilă când L este oricare în planul conicei.

PROBLEMA 6407. *Un student dela Politehnică încovoaie o riglă flexibilă rezemând-o cu degetele mari ale ambelor mâini la distanțe egale dela extremități și apăsând la capete cu degetele arătătoare ca în figură. El propune colegilor să se determine curba după care s'a făcut încovoierea, presupunând că forțele cu care se apasă la capete sunt egale și neținând seama de greutatea proprie a riglei. Colegii studiind problema găsesc că încovoierea s'a făcut după o parabolă. Propunătorul le răspunde că se înșeală.*

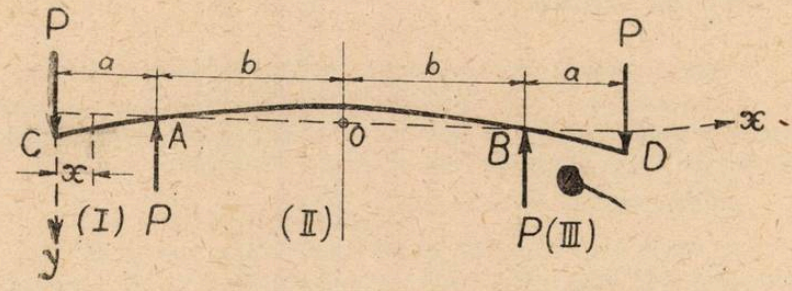


Cine a avut dreptate?

VICTOR ȘERBĂNESCU.

Soluție dată de d-nii M. R. CONSTANTINESCU și MIRCEA V. SOARE (București).

In porțiunea cuprinsă între punctele de reazem A și B (pe figură porțiunea II) momentul încovoietor M este constant și egal cu $-Pa$.



Se cunoaște din rezistența materialelor următoarea relație între *raza de curbură* ρ a fibrei medii deformate, *momentul încovoietor* M, *modulul de elasticitate longitudinală* E *și momentul de inerție* I al piesei:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-M}{EI} \tag{1}$$

$$\therefore \quad \rho = -\frac{EI}{M} = \frac{EI}{Pa} = \text{constant.}$$

Rezultă deci că în porțiunea II încovoierea se face după *un arc de cerc.*

Colegii [1] propunătorului problemei, s'au înșelat deci afirmând că această încovoiere se face după un arc de parabolă.

Această eroare se explică prin faptul că au aplicat acestei probleme, ecuația diferențială *aproximativă* a fibrei medii deformate

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{2}$$

care nu este valabilă decât în cazul *micilor deformații.*

---

1) Intre acești colegi este și d-l M. A. COTARIU, care în soluția trimisă la 2 Februarie 1948 de și bună ca demonstrație găsește totuși o parabolă, din cauza unei erori de integrare.

In adevăr:

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Pentru deformații mici termenul $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ *se neglijează* față de 1 și deci

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

iar formula (1) se transformă în formula (2).

Observație. Este desigur interesant să se studieze deformația riglei și în porțiunile (I) și (III).

Astfel în porțiunea (I) avem:

$$M = -Px \quad \text{și} \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} = \frac{Px}{EI}.$$

De unde:

$$\rho = \frac{EI}{Px} = \frac{k}{x} \qquad \left(k = \frac{EI}{P}\right) \tag{3}$$

Curbele caracterizate de relația (3) sunt cunoscute și denumite *curbe elastice*; ele se pot determina prin integrarea ecuației diferențiale de gradul 2, dată de (3), cu ajutorul *funcțiilor eliptice.*

Pentru studiul acestor curbe recomandăm cartea « *Théorie de l'élasticité* » de H. BOUASSE.

AL. ST.

PROBLEMA 6416. *Să se rezolve ecuația*

$$\sin 3x + \cos 3x = \sin^3 x + \cos^3 x$$

I. ST. TEODORESCU — Ploești.

Inlocuind pe $\sin 3x$ și $\cos 3x$ prin valorile lor se obține

$$(\sin x - \cos x)[3 - 4(1+\sin x \cos x)] = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$$

$$\therefore (\sin x - \cos x)(2\sin 2x + 1) = (\sin x + \cos x)\left(\frac{1}{2}\sin 2x - 1\right) \tag{1}$$

$$\therefore \quad 4(1-\sin 2x)(2\sin 2x+1)^2 = (1+\sin 2x)(\sin 2x - 2)^2$$

$$\therefore \quad \sin 2x(17\sin^2 2x - 3\sin 2x - 12) = 0$$

Rădăcinile ecuației propuse sunt date de:

$$\sin 2x = 0 \qquad \therefore \qquad x_1 = \frac{k\pi}{2}$$

și

$$17 \sin^2 2x - 3 \sin 2x - 12 = 0$$

$$\therefore \quad \sin 2x_2 = \frac{1}{34}(3 + 5\sqrt{33}) \quad \text{și} \quad \sin 2x_3 = \frac{1}{34}(3 - 5\sqrt{33})$$

Se vede imediat că x_1 verifică ecuația din enunț. Pentru celelalte rădăcini înlocuim în (1) pe $\sin 2x$ prin $\sin 2x_2$ și obținem

$$(\sin x - \cos x)\frac{40 + 10\sqrt{33}}{10} = (\sin x + \cos x)\frac{5\sqrt{33} - 65}{68}$$

$$\therefore \quad (145 + 15\sqrt{33}) \sin x = (15 + 25\sqrt{33}) \cos x$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} x = \frac{3 + 5\sqrt{33}}{29 + 3\sqrt{33}} \qquad (2)$$

Această valoare trebue să fie compatibilă cu valoarea $\sin 2x_2$, găsită pentru $\sin 2x$. Exprimând pe $\sin 2x$ în funcție de $\operatorname{tg} x$ și înlocuind pe $\operatorname{tg} x$ prin valoarea (2), obținem

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{291 + 77\sqrt{33}}{17(29 + 3\sqrt{33})} = \frac{3 + 5\sqrt{33}}{34}$$

adică tocmai $\sin 2x_2$. La fel se găsește că și $\sin 2x_3$ verifică ecuația propusă. Limitând arcele la 2π, ecuația propusă are rădăcinile:

$$34^0 26'54'' \; ; \quad 55^0 33'6'' \; ; \quad 114^0 34'36'' \text{ și } 155^0 25'24''$$

Notă. 1°. Soluția precedentă este redijată după soluția primită de la însuși propunătorul problemei.

2°. D-l ANTON I. VARGĂ (student inginer) a generalizat problema și a rezolvat următoarele ecuații:

1. $a \sin 3x + b \cos 3x = c \sin^3 x + b \cos^3 x$
2. $a \sin 3x + b \cos 3x = a \sin^3 x + c \cos^3 x$
3. $a \sin 4x + b \cos 4x = b(\sin^4 x + \cos^4 x)$
4. $a \sin 4x + b \cos 4x = c(\sin^4 x + \cos^4 x)$
5. $a \sin 4x + b \cos 4x = -(b + c) \sin^4 x + \cos^4 x$
6. $\sin 5x + \cos 5x = \sin^5 x + \cos^5 x$

In cele ce urmează publicăm soluția dată de D-l A. I. VARGĂ ecuației 1, după care corespondenții vor putea găsi căi pentru rezolvarea celorlalte ecuații sau a altor ecuații analoage.

Inlocuind în 1. pe $\sin 3x$, $\cos 3x$ prin valorile lor și făcând toate calculele, găsim

$$3a \sin x - 3b \cos x - (4a + c) \sin^3 x + 3b \cos^3 x = 0.$$

In această ecuație înlocuind pe $\cos^3 x$ prin $\cos x (1 - \sin^2 x)$, obținem

$$\sin x [3a - 3b \sin x \cos x - (4a + c) \sin^2 x] = 0 \qquad (1)$$

In paranteză se fac înlocuirile

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \quad \text{și} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

și se obține

$$\sin 2x - \frac{4a + c}{3b} \cos 2x = \frac{2a - c}{3b} \qquad (2)$$

Făcând substituția

$$\frac{4a + c}{3b} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

ecuația (2) devine

$$\sin (2x - \varphi) = \frac{2a - c}{3b} \cos \varphi$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2} \left[\arcsin \left(\frac{2a - c}{3b} \cos \varphi \right) + \varphi \right]$$

Pentru $a = b = c = 1$ se cade peste ecuația din enunț.

3°. Următorii corespondenți au căutat valoarea lui $\operatorname{tg} x$, făcând însă diferite greșeli de calcule: LUCILIU-MIHAIL C. ATHANASIU, N. AL. BUCUR, M. D. COTARIU, E. A. DODU, M. R. CONSTANTINESCU, AL. GH. MORAITE, VIRGIL G. CONSTANTINESCU, LONGIN N. ANDRONESCU, I. N. MĂNCESCU, P. N. CIUCESCU, SOFRONIE ȘTEFĂNESCU, GH. ST. PĂUNESCU, PAUL CONSTANTINESCU, D. I. CRĂCEA, TOMA A. GROSS, I. I. NOVAC, M. I. ȘUTA, GH. C. MERIU, N. I. ȚOPA, N. H. SCHLOMIUK, CR. D. STĂNESCU, GH. I. CONSTANTINESCU, DAN D. POPOVICI, SILVIU A. TELEMAN, VIOREL A. VISARION.

4°. D-l AUREL TIBĂR a stabilit o ecuație bipătrată în $\sin x$, dar a greșit la calcul.

5°. Alte soluții date de D-nii P. P. TEODORESCU, AL. N. PANTEA, M. V. SOARE și d-ra MARIOARA I. TĂLMACIU.

6°. Celelalte soluții anunțate pe copertă conțin erori prea mari pentru a putea fi menționate aici.

7°. Niciun rezolvitor nu a căutat să verifice rădăcinile găsite, ceia ce este de importanță la rezolvarea ecuațiilor.

PROBLEMA 6518. *Să se găsească locul centrelor cercurilor tritangente laturilor triunghiului* ABC, *înscris în cercul* (O), *cunoscând poziția vârfului* A *și un punct fix prin care trece latura* BC.

GH. BUICLIU.

Fie F punctul fix dat, P_1 sau P_2 una din intersecțiile cercului (O) cu bisectoarele unghiului A și I, I_a, I_b, I_c centrele cercurilor tritangente laturilor triunghiului ABC. Luând ca axe de coordonate pe AF și perpendiculara în A pe AF, vom avea: $F(c, 0)$ și

$$(O) \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0 \qquad (1)$$

$$(AP_1 \text{ sau } AP_2) \equiv y - mx = 0. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) se deduce

$$P\left[2\frac{a+bm}{1+m^2}\ ,\ 2\frac{m(a+bm)}{1+m^2}\right].$$

Se observă acum că patrulaterele $IBCI_a$ și $I_b I_c BC$ sunt inscriptibile în cercuri de centru P și că deci punctele I se găsesc la intersecția dreptei AP cu un cerc (P) de centru P și rază $PI = \rho$, iar axa radicală a cercurilor (O) și (P) trece prin punctul fix F.

Ecuația cercurilor (P) este

$$x^2 + y^2 - \frac{4(a+bm)}{1+m^2}x - \frac{4m(a+bm)}{1+m^2}y + \frac{4(a+bm)^2}{1+m^2} = \rho^2. \qquad (3)$$

Din (1) și (3), prin scădere se deduce axa radicală a celor 2 cercuri și i se pune condiția să treacă prin F, ceea ce dă

$$\rho^2 = 2\frac{am^2 - a - 2bm}{1+m^2} + 4\frac{(a+bm)^2}{1+m^2}.$$

Ducând această valoare în (3) și eliminând pe m între rezultat și (2) se găsește că locul punctelor I, I_a, I_b, I_c este cuartica bicirculară

$$(x^2+y^2)^2 - 4(ax+by)(x^2+y^2) - 2(ay^2 - ax^2 - 2bxy)c = 0.$$

Punctul A este punctul dublu al cuarticei, tangentele duble în A fiind punctele ce unesc pe A cu extremitățile diametrului perpendicular pe AF în cercul (O)

MIRCEA D. POPA.

Notă. 1°. D-l R. BOUVAIST (Franţa) a dat o frumoasă soluţie în coordonate polare luând pe OA ca axă polară şi originea în A.

2°. D-l M. D. POPA observă că în particular dacă F este în O cuartica devine un melc PASCAL, iar dacă F este pe cercul (O) atunci locul se descompune în cercurile

$$x^2 + y^2 - 2ax - (b \pm \sqrt{a^2 + b^2})\, y = 0$$

ceea ce se vede şi geometric căci unghiurile AIF, AI_a F, AI_b F, AI_c F sunt constante în acest caz.

GH. B.

PROBLEMA 6537. *Un inventator mi-a descris un aparat al său la care lucra de câţiva ani şi care se compunea dintr'o roată, mobilă într'un plan vertical în jurul unui punct fix* O, *având două spiţe* AOB *şi* COD *perpendiculare una pe alta.*

Pe aceste spiţe, patru cursori identici A, B, C, D *de greutăţi egale puteau aluneca fără frecare. Poziţia acestor cursori pe spiţe era determinată de patru bare* AO_1, BO_1, CO_1, *şi* DO_1 *de aceeaşi lungime, articulate atât la capetele lor mobile* A, B, C, D *în punctele unde erau legate de cursori, cât şi la capătul comun fix* O_1 *situat pe orizontala lui* O.

Inventatorul pretindea, că pentru orice poziţie a sistemului rezultanta greutăţilor celor patru cursori dă un moment constant în mărime şi sens în raport cu O *sub acţiunea căruia roata se va învârti necontenit (perpetuum mobil).*

Să se verifice cele afirmate de inventator şi să se arate eroarea comisă în spusele sale. Greutăţile barelor AO_1, BO_1, CO_1 *şi* DO_1, *frecările şi rezistenţa aerului se vor neglija.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie. Fie m massa *unui cursor* şi G greutatea lui

$$(G = mg \quad ; \quad g = 9{,}81\, {}^{m}/_{sec^2}).$$

Masele cursorilor din A şi B îşi au centrul lor de greutate în E *mijlocul* lui AB; masele cursorilor din C şi D îşi au centrul lor de greutate în F *mijlocul* lui CD. (fig. 1).

Centrul de greutate al masselor celor patru cursori va fi în H *mijlocul* lui EF.

Dar se observă uşor că figura OEO_1F este un *dreptunghiu* şi deci H se află *în mijlocul segmentului* OO_1.

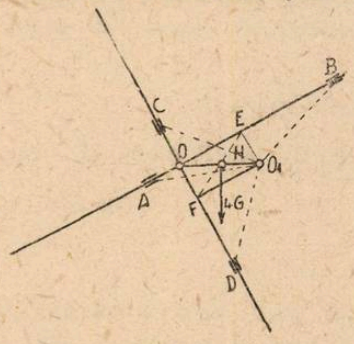


Fig. 1.

Prin urmare rezultanta greutăţilor celor patru cursori, de mărime 4G este aplicată în *punctul fix* H, *indiferent de poziţia cursorilor*, iar suma M a momentelor greutăţilor cursorilor în raport cu O va fi egală cu momentul rezultantei lor adică:

$$M = 4G \times \overline{OH} = 2G \times \overline{OO_1}.$$

Rezultă deci că *suma momentelor greutăţilor cursorilor în raport cu* O *este constant* (independent de poziţia cursorilor) şi în consecinţă *ar urma ca roata sub acţiunea acestui moment constant* M *să se rotească necontenit.*

Unde este *eroarea* acestui raţionament?

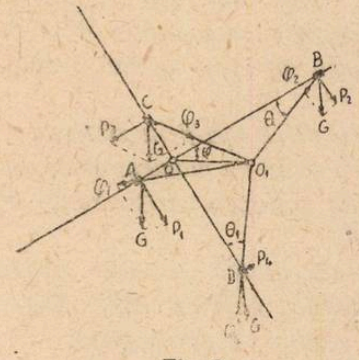


Fig. 2.

Eroarea constă în faptul că *s'au considerat greutăţile* G *ale cursorilor acţionând integral asupra roţii* pe când în realitate *nu acţionează asupra roţii decât componentele* P *ale acestor greutăţi,* componente perpendiculare pe spiţele respective AOB şi COD (fig. 2).

In adevăr, având în vedere că în timpul mişcării, cursorii alunecă *fără frecare* în lungul spiţelor, greutatea G a fiecărui cursor se descompune în două componente: *o componentă* P *perpendiculară pe spiţa corespunzătoare care acţionează asupra roţii şi o componentă* Q *îndreptată după direcţia barei care uneşte cursorul cu punctul fix* O_1 *şi care acţionează asupra punctului fix* O_1.

Ne propunem să aflăm rezultantele R_1 şi R_2 respectiv ale forţelor componente P şi Q.

Notând:

$$OO_1 = a \quad ; \quad O_1A = O_1B = O_1C = O_1D = l$$

$$\sphericalangle BOO_1 = \varphi \; ; \; \sphericalangle ABO_1 = \sphericalangle BAO_1 = \theta \; ; \; \sphericalangle DCO_1 = \sphericalangle BDO_1 = \theta_1$$

cu P_1, P_2, P_3, P_4 şi Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 componentele greutăţilor G a cursorului după direcţiile mai sus specificate respectiv în A, B, C şi D avem:

$$\frac{a}{\sin\theta} = \frac{l}{\sin\varphi} \quad ; \quad \frac{a}{\sin\theta_1} = \frac{l}{\cos\varphi} \tag{1}$$

(din triunghiurile OO_1B şi OO_1C)

$$\frac{G}{\cos\theta} = \frac{P_1}{\cos(\theta-\varphi)} = \frac{Q_1}{\sin\varphi} \quad ; \quad \frac{G}{\cos\theta} = \frac{P_2}{\cos(\theta+\varphi)} = \frac{Q_2}{\sin\varphi}$$

$$\frac{G}{\cos\theta_1} = \frac{P_3}{\sin(\theta_1+\varphi)} = \frac{Q_3}{\cos\varphi} \quad ; \quad \frac{G}{\cos\theta_1} = \frac{P_4}{\sin(\theta_1-\varphi)} = \frac{Q_4}{\cos\varphi}$$

(din paralelogramele construite în A, B, C şi D).

Rezultă:

$$P_1 = G\frac{\cos(\theta-\varphi)}{\cos\theta} \quad ; \quad P_2 = G\frac{\cos(\theta+\varphi)}{\cos\theta} \quad ;$$

$$P_3 = G\frac{\sin(\theta_1+\varphi)}{\cos\theta_1} \quad ; \quad P_4 = G\frac{\sin(\theta_1-\varphi)}{\cos\theta_1}$$

$$Q_1 = G\frac{\sin\varphi}{\cos\theta} \quad ; \quad Q_2 = G\frac{\sin\varphi}{\cos\theta} \quad ; \quad Q_3 = G\frac{\cos\varphi}{\cos\theta_1} \quad ; \quad Q_4 = G\frac{\cos\varphi}{\cos\theta_1}.$$

Proiectând aceste forţe pe orizontală şi verticală şi făcând suma acestor proiecţii obţinem:

$$P_1\sin\varphi + P_2\sin\varphi - P_3\cos\varphi + P_4\cos\varphi =$$

$$= 2G\sin\varphi\cos\varphi - 2G\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$P_1\cos\varphi + P_2\cos\varphi + P_3\sin\varphi - P_4\sin\varphi = 2G\cos^2\varphi + 2G\sin^2\varphi = 2G$$

$$R_1 = 2G$$

$$-Q_1\cos(\varphi-\theta) - Q_2\cos(\varphi+\theta) + Q_3\sin(\varphi+\theta_1) + Q_4\sin(\varphi-\theta_1)$$

$$= -2G\sin\varphi\cos\varphi + 2G\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$Q_1\sin(\varphi-\theta) + Q_2\sin(\varphi+\theta) + Q_3\cos(\varphi+\theta_1) + Q_4\cos(\varphi-\theta_1)$$

$$= 2G\sin^2\varphi + 2G\cos^2\varphi = 2G$$

$$R_2 = 2G.$$

Suma momentelor componentelor P_1, P_2, P_3, P_4 în raport cu centrul O este nulă:

$$-P_1(l\cos\theta - a\cos\varphi) + P_2(l\cos\theta + a\cos\varphi) - P_3(l\cos\theta_1 - a\sin\varphi)$$
$$-P_4(l\cos\theta_1 + a\sin\varphi) = l\cos\theta\,.\,(P_2 - P_1) + a\cos\varphi\,(P_1 + P_2)$$
$$-l\cos\theta_1\,(P_3 + P_4) + a\sin\varphi\,(P_3 - P_4) = 2G\sin\varphi\,(a\sin\varphi - l\sin\theta)$$
$$+2G\cos\varphi\,(a\cos\varphi - l\sin\theta_1) = 0$$

(în virtutea relaţiilor 1).

Suma momentelor componentelor Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 în raport cu O_1 este nulă, aceste componente trecând prin O_1.

In concluzie:

a) *greutăţile celor patru cursori au o rezultantă* 4G *aplicată în mijlocul distanţei* OO_1.

b) *componentele* P_1, P_2, P_3 şi P_4 *ale acestor greutăţi după normalele la spiţe au o rezultantă, verticală* 2G *aplicată în* O.

c) *componentele* Q_1, Q_2, Q_3 şi Q_4 *ale greutăţilor cursorilor după direcţiile barelor de legătură au o rezultantă verticală* 2G *aplicată în* O_1.

d) întrucât asupra roţii nu lucrează *decât componentele* P_1, P_2, P_3 şi P_4 iar *suma momentelor acestor forţe în raport cu centrul* O *al roţii este nulă*, roata nu poate fi pusă în mişcare numai prin greutatea cursorilor.

Inventatorul nu a reuşit deci să construiască un *perpetuum mobil* ci numai o roată în *echilibru indiferent.*

Observaţie. S'a primit o soluţie bună dela d-l SILVIU A. TELEMAN.

AL. ST.

PROBLEMA 6559. *Se construesc două cercuri* (O) *şi* (I) *ortogonale, de raze* R *şi* r $(R > r)$; *apoi diametrul* CD *al cercului* (O) *perpendicular pe dreapta centrelor,* OI. *Segmentele de dreaptă* IC *şi* ID *taie cercul* (I) *respectiv în* E *şi* F. *Pe segmentul* IC *se ia segmentul* $IM = \overline{CE}$, *iar prin punctul* M *se duce în unghiul* ICO *o antiparalelă* MG *la* OE *Să se arate că:* a) *Dreapta* GF *este tangentă cercului* (I); b) *Dacă cercurile* (O) *şi* (I) *sunt egale, coarda* EF *este egală cu latura exagonului regulat circumscris cercului* (I).

O. N. ŢINO.

Cercurile (O) şi (I) fiind ortogonale, avem că $\overline{OI} = \sqrt{R^2 + r^2}$.
Asemenea avem că $\overline{DI} = \overline{CI} = \sqrt{2R^2 + r^2}$.

Dreapta MG în triunghiul COE fiind antiparalelă la latura OE, avem relaţia

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CO}}, \quad \text{dar } \overline{CE} = \overline{CI} - \overline{IE} = \sqrt{2R^2 + r^2} - r, \text{ iar}$$

$$\overline{CM} = \overline{CE} - \overline{EM} = \overline{IM} - \overline{EM} = \overline{IE}, \text{ deci } \overline{CG} = \frac{r}{R}\left[\sqrt{2R^2 + r^2} - r\right]. \quad (1)$$

Cunoscând segmentul CG, deducem imediat pe $\overline{DG}$, anume observând că

$$\overline{DG} = \overline{DC} - \overline{DG} = 2R - \frac{r}{R}\left[\sqrt{2R^2 + r^2} - r\right], \quad \text{sau încă}$$

$$\overline{DG} = \frac{\sqrt{2R^2 + r^2}}{R}\left[\sqrt{2R^2 + r^2} - r\right] = \frac{\overline{DI}}{\overline{DO}} \cdot \overline{DF} \quad \therefore \quad \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{DO}}, \quad (2)$$

deci în unghiul ODI dreapta GF este antiparalelă la OI, ca urmare

$$\sphericalangle DFG = \sphericalangle DOI = \frac{\pi}{2}.$$

Aşadar, DF fiind perpendiculară pe raza IF la extremitatea ei, *este tangentă cercului* (I).

b) Dreapta centrelor OI fiind axă de simetrie pentru ambele cercuri (O), (I) şi asemenea pentru segmentele IC, ID, punctele E şi F sunt simetrice faţă de OI, deci EF || CD. Avem ca urmare

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{IE}}{\overline{IC}} \quad (3), \qquad \text{deci} \qquad \overline{EF} = \frac{2Rr}{\sqrt{2R^2 + r^2}}.$$

Dacă $r = R$, avem $\overline{EF} = \frac{2}{3} R\sqrt{3}$ = latura exagonului regulat circumscris cercului de rază R.

Au rezolvat problema d-nii: SILVIU A. TELEMAN, KOSTAKE TELEMAN.

Observare. Prima parte a problemei de faţă este reciproca generalizată a următoarei proprietăţi: *Fiind date două cercuri* (O) *şi* (I) *egale ortogonale şi diametrul* CD *al cercului* (O) *perpendicular pe dreapta centrelor* OI, *fie* E *şi* F *intersecţiile dreptelor* IC *şi* ID *cu cercul* (I). *Tangenta în* F *la cercul* (I) *taie pe* CD *în* G. *Segmentele* CG *şi* CE *sunt egale.*

Această proprietate a fost propusă de d-l B. BARBĂLAT la o şedinţă a Soc. G. M., *cerându-se o demonstraţie care să nu utilizeze relaţii metrice.*

O. N. Ţ.

PROBLEME PROPUSE

6616. Fie p şi q două numere întregi şi pozitive prime între ele şi fie a_i un număr întreg şi pozitiv astfel încât să nu existe nicio grupă de numere întregi ne-negative x şi y care verifică ecuaţia:

$$px + qy = a_i.$$

Să se determine: *a)* Cea mai mare valoare a lui a_i. *b)* Numărul valorilor distincte ale lui a_i.

I. B. FLORESCU.

6617. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n - k^p y = 0$$

ştiind că soluţia generală a congruenţei

$$(A_0x + A_1)\, x^{n-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod.}k)$$

este $x \equiv A$ (mod. k) şi că între coeficienţii A_1, A_2, ... A_n avem relaţia

$$A_i = A_1 k^{i-1}.$$

I. V. MĂTIEŞ.

6618. In planul triunghiului ABC se ia o dreaptă (Δ), un punct M şi asociatele sale M_a, M_b, M_c. Paralelele la (Δ) prin M_a, M_b, M_c taie laturile respective ale triunghiului ABC în N_a, N_b, N_c.

1°. Dreptele AN_a, BN_b, CN_c sunt concurente într'un punct P. 2°. Când (Δ) se mişcă în plan, P descrie o conică (Q) circumscrisă triunghiului ABC. 3°. Centrul conicei (Q) este punctul M. 4°. Dacă A', B', C' sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC, dreptele $A'N_a$, $B'N_b$, $C'N_c$ concură în punctul lui LEMOINE al conicei (Q). 5°. Caz particular: M centrul de greutate al triunghiului considerat.

CONSTANTIN DIACONU.

6619. Să se găsească locul intersecţiilor bisectoarelor unghiului A cu mediatoarele triunghiului ABC, care are baza BC fixă şi unghiul A constant.

GH. BUICLIU.

6620. Să se arate că ecuația

$$f(x) + C_p^1 af'(x) + C_p^2 a^2 f''(x) + \ldots + C_p^p a^p f^{(p)}(x) = 0$$

are cel puțin atâtea rădăcini reale câte are $f(x) = 0$.

O. N. ȚINO.

6621. Fie șirul

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3}.$$

1°. Să se arate că termenii acestui șir luați din p în p au scara de recurență

$$v_n = av_{n-1} + bv_{n-2} + cv_{n-3}.$$

2°. Să se calculeze a, b, c pentru $p = 5$.

CONST. BERDAN.

6622. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = x, \quad \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = y,$$
$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = z.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6623. Fie trei șiruri de numere pozitive p_n, q_n, r_n așa fel ca seria Σr_n și seria $\Sigma \frac{1}{R_n}$ cu $R_n = \Sigma r_n$, să fie divergente.

Dacă $\frac{P_n}{R_n p_n} \to \alpha$, $\frac{Q_n}{R_n q_n} \to \beta$, cu α și $\beta \neq 0$ când $n \to \infty$, atunci și seria $\Sigma R_n p_n q_n$ este divergentă, $P_n = \Sigma p_n$, $Q_n = \Sigma q_n$.

N. GAIU.

6624. Fie O un punct fix pe cubica (Γ). Dreapta variabilă (Δ) ce trece prin O, întâlnește cubica în alte două puncte M și N. Să se determine cubica cea mai generală astfel ca produsul $\overline{OM} \cdot \overline{ON}$ să păstreze o valoare constantă când (Δ) vaziază.

MIRCEA V. SOARE.

6625. Se dă o dreaptă D, un punct M pe ea, un cerc (C) tangent în N la D și o coardă PQ în (C), paralelă cu D. Să se găsească locul geometric al intersecțiilor (MP, NQ) și (MQ, NP), când coarda PQ se deplasează paralel cu ea însăși.

ALEX. ȘCODRANU.

6626. Se dă cercul definit de ecuaţiile

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad ; \quad z = 0$$

şi două drepte oarecare D_1, D_2, în spaţiu.

1°. Să se stabilească ecuaţia suprafeţei generată de o dreaptă ce se sprijină pe cercul dat şi pe dreptele D_1 şi D_2.

2°. Să se arate că orice plan care trece prin D_1 sau D_2 taie suprafaţa găsită, în afară de D_1 sau D_2, după încă două drepte reale sau imaginare. Ce condiţii trebue să indeplinească D_1 şi D_2 pentru ca aceste două drepte să fie totdeauna reale?

GH. D. SIMIONESCU.

6627. Să se calculeze valoarea integralei

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin x}{(1 - \cos x \sin x)^2} dx.$$

EUGEN WEGENER.

6628. Se dau n sfere metalice tangente două câte două şi încărcate cu cantitatea electrică Q. Fie δ_p densitatea electrică şi r_p raza sferei Σ_p, $p = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Să se arate că există relaţia

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\delta_p} = \frac{4\pi}{Q} \left(\sum_{p=1}^{n} r_p \right)^2.$$

IOSIF HITZIG.

6629. Mai mulţi călători au de parcurs un drum şi dispun de un număr de biciclete inferior numărului lor. Cum vor proceda pentru a ajunge la destinaţie toţi odată şi în acelaşi timp? Care este acest timp? In soluţie să se plece dela un caz simplu şi să se generalizeze, presupunând că toţi călătorii au aceeaşi viteză, fie ca ciclişti, fie ca pietoni.

P. D. COLUMBEANU.

6630. Un pieton traversează o stradă de lăţime l cu viteza v. In lungul trotuarului opus vine un vehicul cu viteza v'. Sub ce unghiu trebue să traverseze pietonul strada pentru a sosi înaintea vehiculului şi a avea maximum de siguranţă.

TH. ONIGA.

ERATĂ. In numărul precedent se schimbă paginele 299 şi 300 între ele.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi s'au reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), probleme propuse (P), şi probleme rezolvate, dela:

Berdan C. (2936, 5085, 6211, 54); *Constantinescu I. Gh.* (6249, 441, 6, 535, 76); *Crăciunescu E.* (P); *Radu N.* (N); *Teleman A. Kostache* (5700, 44, 67, 911, 6097, 304, 41, 65, 462, P); *Teleman A. Silviu* (N, P).

Orariul Bibliotecilor „Gazeta Matematică"

Sălile de bibliotecă sunt deschise după următorul orariu:

Localul din Calea Griviţei Nr. 158: In fiecare zi de lucru dela 9 la 12, iar Miercurea dela 9 la 12 şi dela 16 la 20.

Casa „I. Ionescu" din Str. Răsuri Nr. 25: Luni şi Vineri dela 8 la 10, Marţi şi Miercuri dela 16 la 20.

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele şi problemele propuse, care se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, XII şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. Gazeta Matematică 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăugită de *Gh. I. Liteanu.* . . Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . . Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăugită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . Lei 230

XXIII. Gazeta Matematică 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu**, *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a). . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 230

Pentru trimiterea prin poştă a volumelor de mai sus, se va adăoga câte 40 lei pentru fiecare volum.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 400

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 200

Abonamentele şi ori-ce sume se pot trimite la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa :

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 14.873.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LIV

NUMĂRUL 9. — MAI 1949

SUMARUL

1. Metodica algebrei în învățământul mediu. *Gh. Galbură*
2. O problemă de geometria triunghiului *P. P. Teodorescu*
3. Raport pentru decernarea premiului de algebră pe anul 1947—1948 . . . *G. G. Constantinescu, Haralamb Ionescu, Const. Ionescu-Bujor*
4. Note matematice: 22.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 4496, 4909, 5719, 5779, 6101, 6158, 6195, 6201, 6323, 6420, 6422, 6572.
10. Probleme propuse: 6609; 6631—6645.

BUCUREȘTI

INTREPRINDERE INDUSTRIALĂ DE STAT
IMPRIMERIA NAȚIONALA
1949

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea **„Gazeta Matematică"**, având sediul în București, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviței 158), compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație, compusă în prezent din d-nii: Academician Prof.-Ing. **N. Profiri** (Ministrul Comunicațiilor); Prof.-Univ. **Valeriu Novacu**; Inginer **Gr. Zapan** (Casier).

Ședințele următoare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 23 Mai ora 17^{30}: Alegerea materiei pentru Nr. 11.

Luni 30 Mai ora 17^{30}: Ședință de comunicări.

Luni 6 Iunie ora 17^{30}: Facerea copertei pentru Nr. 11.

Luni 20 Iunie ora 17^{30}: Alegerea materiei pentru Nr. 12, apoi ședință de comunicări.

Nu se primesc articole, note, cereri, probleme rezolvate și propuse decât dela abonații „Gazetei Matematice".

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evita confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, clasa și școala din care fac parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Septembrie 1948 sunt indicate în tabla de materii a volumului LIII.

Enunțurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se dă gratuit, la cerere, abonaților elevi în cursul mediu și studenților.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naționale*, Calea Șerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

METODICA ALGEBREI IN INVĂȚĂMÂNTUL MEDIU

1. Dintre elementele hotărîtoare în învățământ, cele mai importante sunt *programa analitică* și *profesorul.*

In programa analitică, materia este aleasă și eșalonată în timp. După cum programa este de judicios alcătuită, conform cu posibilitățile elevilor și cu sarcinile învățământului, sau este încărcată cu lucruri inutile, în dauna celor necesare, așa și învățământul: este un învățământ bun, corespunzător necesităților reale ale societății, sau este un învățământ superficial, necorespunzător.

Progresul neîncetat al științei, al tehnicei și al societății, impune învățământului, dacă nu o continuă adaptare, cel puțin o revizuire cât mai frecventă.

Prin aceasta, programa analitică se modifică: unele materii vin suprimate, altele introduse. In aceeași materie, se suprimă capitole care s'au dovedit a nu fi atât de importante cum se crezuse o vreme, altele se modifică, altele se introduc.

Prin reforma radicală a învățământului, înfăptuită la noi anul acesta, programa analitică s'a schimbat.

Profesorii constată cu satisfacție că numărul orelor de predare a matematicilor s'a mărit.

In manualele unice apărute, se observă introduse lucruri utile și lesne de învățat, cum sunt fracțiile continue, ecuații diofantiene lineare; altele care au mai puțină valoare practică și științifică decât s'a crezut multă vreme, au fost scoase, cum sunt determinanții.

2. *Profesorul*, ajutat de manuale, este factorul viu, care traduce în fapt programa analitică.

El urmărește în deaproape schimbările programei și, dacă nu se poate ține la curent cu starea contemporană a științei și a tehnicei, pentru care pregătește elevii la materia respectivă, cum e cazul profesorilor de matematici, trebue totuși să știe tot timpul, cu preciziune, cari sunt lucrurile esențiale de predat și cum trebuesc predate.

Prin predare, el trebue să adapteze puterii de asimilare a elevului materialul științific, de cele mai multe ori abstract.

Cunoscând înlănțuirea riguros logică a faptelor din geometrie, de exemplu, el trebue să știe să le predea elevilor pe înțelesul lor, în mod sugestiv și folositor.

Prin programa analitică, profesorului i se prescrie materia de predat și i se dă timpul necesar.

Acest timp trebue întrebuințat cu mare economie și cu chibzuință.

Fiecare lecție trebue pregătită dinainte, cel puțin până va fi fost predată de câteva ori, ceea ce cere un timp, uneori egal cu întreitul celui necesar pentru predare.

Profesorului îi trebuesc sugestii de modul în care trebuesc prezentate teoremele; ce aplicații pot avea ele; care este calea cea mai potrivită pe care se poate ajunge ca elevii să rezolve singuri problemele, etc...

Reforma învățământului superior, acționează și asupra profesorului, prin pregătirea pe care i-o dă.

Dar oricâtă grije s'ar pune la universitate și la seminarul pedagogic pentru pregătirea profesorului, lui tot îi trebuește în permanență o sursă de sugestii, acolo la fața locului, când își pregătește lecțiile.

Ceea ce este suficient pentru un profesor cu aptitudini speciale, care îndemnat de aptitudinile lui își și procură câte o carte de specialitate, din cele câteva streine intrate în țară, pentru majoritatea profesorilor nu este suficient. Majoritatea profesorilor trebue să aibă la îndemână câte o carte cu *metodica fiecărui obiect.*

Pentru învățământul elementar, asemenea cărți se mai găsesc, la noi. Dar pentru învățământul mediu, este o gravă lipsă.

O carte de metodică a algebrei, de exemplu, o carte care într'adevăr să servească profesorilor noștri, ar fi un util complement la înoirea învățământului.

O astfel de carte ar trebui să iasă din experiența profesorilor cu elevii; ea ar trebui să arate practic cum să fie prezentată elevilor materia, sugestiv și clar: celor care se pregătesc pentru fabrici, să le servească în fabrici; pentru cei care se duc la școlile superioare și la universitate, să le fie o bază solidă și cât mai completă, care să le înlesnească însușirea cunoștințelor noui; iar pentru toți să fie un antrenament stăruitor de disciplinare al gândului, al calculului și al scrisului.

Gazeta Matematică își propune să prezinte în paginile sale o sumă de articole de metodologie a diferitelor ramuri din matematică.

La bibliografie, vom da ce a apărut în materie de metodică în diferite țări și în special în U.R.S.S., unde s'a scris cel mai mult în această privință și unde învățământul este făcut într'adevăr cu grijă și corespunzător vieții.

3. Ne vom ocupa de *sistemele de ecuații lineare.* Mulți studenți din primul an, la Facultatea de Matematică și Fizică, nu știu să rezolve un sistem de ecuații de gradul I-iu. Unii își amintesc vag de regula lui CRAMER, care dă automat soluția, după ce se scriu și se calculează niște determinanți. Dar cum se scriu determinanții, nu-și mai aduc exact aminte.

Și chiar cei care cunosc regula, încă au multe ezitări: în privința semnului, la calculul efectiv al determinanților etc.., încât chiar la o lucrare scrisă, un sistem de patru ecuații cu 4 necunoscute, rezolvat corect, nu se întâlnește decât foarte rar.

Când li-se recomandă să rezolve fără determinanți, studenții ezită din nou: prin *substituție*, sau prin *reducere?*

Dacă numărul ecuațiilor este diferit de al necunoscutelor, toți nu știu ce e de făcut cu sistemul.

Și rezolvarea sistemelor lineare, se întâlnește la tot pasul, în știință ca și în tehnică.

In rândurile care urmează, vreau să arăt că nu este de făcut deosebire între metoda *reducerii* și a *substituției* și că elevii trebue să învețe o *singură* metodă, fără determinanți.

Determinantul este un număr asociat unui tablou patrat de numere, care pot fi coeficienții unui sistem de ecuații lineare. Dar rezolvarea sistemelor lineare este mai mult încurcată, decât ajutată de determinanți, dacă-i folosim unde nu trebue.

A) Elevul trebue mai întâi să știe bine ce este ecuația (de gradul I-iu), cu *o singură necunoscută* și cu *mai multe* necunoscute; și ce înseamnă *soluțiile* unei ecuații: un sistem de numere, care introduse în locul necunoscutelor, verifică ecuația.

Lui îi sunt familiare ecuații cu o necunoscută, din care cea mai de seamă este ecuația împărțirii $ax = b$ (b deîmpărțit, a împărțitor), a cărei soluție este câtul $x = \frac{b}{a}$.

Deasemenea, îi sunt familiare multe ecuaţii de gradul I-iu cu mai multe necunoscute.

Exemple: a) $x+y=90$, *b)* $x+y=180$; *c)* $x+y+z=180$, *d)* $2x=3y$ etc...

El înţelege bine ce înseamnă o soluţie pentru fiecare din aceste ecuaţii.

Pentru *a)*, două unghiuri complementare. de ex.; pentru *b)*, două unghiuri suplimentare; pentru *c)*, unghiurile unui triunghiu; pentru *d)*, două mărimi proporţionale cu 3 şi 2 etc...

Trebue să i se precizeze bine că soluţia unei ecuaţii se găseşte cu ajutorul a două operaţii:

I. Inmulţirea (sau împărţirea) de o parte şi de alta a semnului = cu un acelaşi număr oarecare, diferit de zero;

II. Trecerea unui termen dintr'o parte în alta a semnului = cu semnul schimbat.

Aceste lucruri, completate cu exerciţii de calcul, cum există în manuale, sunt suficiente ca să se poată trece la sisteme de ecuaţii.

B) Elevul trebue să înţeleagă că un sistem de ecuaţii de gradul I-iu (de acestea ne ocupăm) e format, pur şi simplu din *nişte ecuaţii* luate împreună: nu numai decât un sistem de *două* ecuaţii cu *două* necunoscute, sau de trei ecuaţii cu 3 necunoscute. Faptul că numărul ecuaţiilor este egal cu al necunoscutelor poate fi întâmplător, caşi faptul de a fi incompatibil.

Ecuaţiile pot fi toate cu o necunoscută sau, în totalitatea lor, cu diverse necunoscute.

Exemple:

a) $\begin{matrix}2x-5=0\\2x+5=0\end{matrix}$; *b)* $\begin{matrix}2x-5=0\\4x-10=0\end{matrix}$; *c)* $\begin{matrix}x+y=90\\x+y+z=180\end{matrix}$; *d)* $\begin{matrix}x+y=90\\x+y=180\\x+y+z=180\end{matrix}$ etc...

C) Apoi, va trebui lămurit ce înseamnă soluţie a unui sistem de ecuaţii: *un sistem de numere care, introduse în locul necunoscutelor, verifică toate ecuaţiile sistemului.*

Această noţiune se va întipări bine în minte prin exemple simple, dar numeroase. Se vor da exemple de sisteme care admit mai multe soluţii (sisteme nedeterminate); de sisteme care admit o singură soluţie; de sisteme care nu admit nici-o soluţie (incompatibile).

Sistemul *a)* este incompatibil, sistemul *b)* admite soluția $x = \frac{5}{2}$; sistemul *c)* admite soluțiile (45, 45, 90), (30, 60, 90), (0, 90, 90) etc., sistemul *d)* nu admite nici-o soluție.

Problema principală este de a se decide dacă un sistem dat de ecuații are soluții și în caz că le are, de a găsi acele soluții. In vederea rezolvării acestei probleme, se va observa, ca și la secțiunea *A)*, că:

I. Inmulțind ambii membri ai unei ecuații cu același număr, se obține o ecuație care admite aceeași soluție.

II. Adunând parte cu parte două ecuații care au aceeași soluție, obținem o ecuație care admite și ea acea soluție.

Operațiile I și II se numesc *operații elementare.*

Două sisteme de ecuații cari se pot deduce unul din altul printr'un număr limitat de operații elementare și prin schimbarea ordinei ecuațiilor (care se poate reduce tot la operațiile elementare I și II) se numesc echivalente.

Două sisteme echivalente au aceleași soluții.

D) Pentru a verifica dacă un sistem de ecuații de gradul I-iu admite soluții și a găsi soluții, *se caută succesiv sisteme echivalente tot mai simple, până se ajunge la o formă canonică*, astfel:

1. Se înlocuește sistemul cu unul echivalent, în care numai una din ecuații să cuprindă prima necunoscută. Pentru aceasta, aplicăm operațiile elementare I și II și schimbăm la nevoie și ordinea ecuațiilor, pentruca prima ecuație din sistemul obținut să fie cât mai simplă.

Exemplu. Fie sistemul

$$\begin{aligned}
&E_1: \quad x - 2y + z + 3t = 0\\
&E_2: \quad x + y + z + t = 0\\
&E_3: \quad x - 26y + z + 19t = 0\\
&E_4: \quad 2x + 35y + 2z - 20t = 0\\
&E_5: \quad 10x + y + 10z + 16t = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Il înlocuim cu sistemul echivalent:

$$\begin{aligned}
&E_1' = E_2: \quad x + y + z + t = 0\\
&E_2' = E_2 - E_1: \quad 3y - 2t = 0\\
&E_3' = E_2 - E_3: \quad 27y - 18t = 0\\
&E_4' = E_4 - 2E_2: \quad 33y - 22t = 0\\
&E_5' = E_5 - 10E_2: \quad -9y + 6t = 0
\end{aligned} \tag{1'}$$

2. Sistemul astfel obținut se compune din prima ecuație și dintr'un sistem căruia îi aplicăm, din nou, același procedeu. Astfel, din (1'), deducem sistemul

$$\begin{aligned}
E_1'' = E_1' &: \quad x + y + z + t = 0 \\
E_2'' = E_2' &: \quad 3y \quad -2t = 0 \\
E_3'' = E_3' - 9E_2' &: \quad 0 = 0 \\
E_4'' = E_4' - 11E_2' &: \quad 0 = 0 \\
E_5'' = E_5' + 4E_2' &: \quad 0 = 0
\end{aligned} \tag{1''}$$

3. Sistemul obținut este format din primele 2 ecuații și dintr'un alt sistem care, dacă nu se reduce la identitățile $0 = 0$, ca în exemplul de mai sus, sau la o incomptabilitate evidentă, va fi înlocuit cu un sistem echivalent, după aceeași normă ș. a. m. d. Se ajunge astfel la un sistem în care prima necunoscută, din fiecare ecuație, nu mai figurează în următoarele.

In exemplul dat, s'a ajuns la sistemul:

$$\begin{aligned}
x + y + z + t &= 0 \\
3y - 2t &= 0.
\end{aligned} \tag{1'''}$$

4. Sistemul astfel căpătat se rezolvă, de jos în sus: se rezolvă ultima ecuație în raport cu prima necunoscută care figurează în ea; se introduce expresia acestei necunoscute în ecuațiile anterioare și sistemul obținut se tratează la fel.

In exemplul nostru găsim:

$$y = \frac{2}{3}t \quad , \quad x = -z - \frac{5}{3}t.$$

Astfel *am rezolvat sistemul dat în raport cu* x *și* y.

A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a exprima o parte din necunoscute în funcție de celelalte și de coeficienții sistemului astfel încât introducând în locul necunoscutelor expresiile lor, sistemul să fie verificat, adică să se reducă la identități de forma $0 = 0$.

Elevii vor fi puși să rezolve diferite sisteme de ecuații, să scrie soluțiile lor și să verifice aceste soluții.

Soluţia sistemului (1) se poate scrie aşa:

$$\begin{array}{rcl|r}
x = & -z - & \frac{5}{3}t & 1 \\
y = & & \frac{2}{3}t & -26 \\
z = & z & & 1 \\
t = & & t & 19 \\
\hline
 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Pentru verificare, scriem pentru fiecare ecuaţie coeficienţii in dreptul necunoscutelor respective, inmulţim şi adunăm pe coloane. In exemplu, am verificat soluţia pentru ecuaţia E_3 din (1).

Să considerăm şi exemplul următor:

$$\begin{array}{lrl}
E_1: & x - 2y + z + 3t = & 1 \\
E_2: & x + y + z + t = & a \\
E_3: & x - 26y + z + 19t = & -1 \\
E_4: & 2x + 35y + 2z - 20t = & b \\
E_5: & 10x + y + 10z + 16t = & c
\end{array} \qquad (2)$$

El este echivalent cu următoarele:

$$\begin{array}{lrl}
E_1' = E_2: & x + y + z + t = & a \\
E_2' = E_2 - E_1: & 3y - 2t = & a - 1 \\
E_3' = E_2 - E_3: & 27y - 18t = & a + 1 \\
E_4' = E_4 - 2E_2: & 33y - 22t = & b - 2a \\
E_5' = E_5 - 10E_2: & -9y + 6t = & c - 10a;
\end{array} \qquad (2')$$

$$\begin{array}{lrl}
E_1'' = E_1': & x + y + z + t = & a \\
E_2'' = E_2': & 3y - 2t = & a - 1 \\
E_3'' = E_3' - 9E_2': & 0 = & a + 1 - 9(a+1) \\
E_4'' = E_4' - 11E_2'': & 0 = & b - 2a - 11(a-1) \\
E_5'' = E_5' + 3E_2': & 0 = & c - 10a + 3(a-1).
\end{array} \qquad (2'')$$

Acest sistem este compatibil numai dacă

$$8a - 10 = 0$$

$$13a - b - 11 = 0$$

$$7a - c + 3 = 0;$$

deci numai dacă $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{21}{4}$, $c = \frac{47}{4}$.

In acest caz, avem : $x = -z - \frac{5}{3}t + \frac{7}{6}$, $y = \frac{2}{3}t + \frac{1}{12}$.

Observaţii. I. Trebue să atragem atenţia elevilor ca fiecare din sistemele intermediare să fie într'adevăr echivalent cu cel anterior, altfel pot fi pierdute ecuaţii. Pentru aceasta, e bine ca în sistemul echivalent pe care-l scriem fiecare ecuaţie să fie o combinaţie lineară a ecuaţiei cu acelaşi indice din sistemul anterior şi a ecuaţiei lăsată neschimbată, cum s'a făcut în exemple.

II. Metoda *substituţiei* nu diferă de aceasta: noi facem acelaşi lucru când „rezolvăm prima ecuaţie în raport cu x şi introducem expresia lui în celelalte etc...". Deosebirea este că „prin substituţie" elevii nu-şi dau seama că înlocuim sistemul dat cu unul *echivalent*, ceea ce este important din două puncte de vedere: *a)* din punct de vedere pedagogic, elevul are, cu metoda de mai sus, mereu prezent tot sistemul de ecuaţii, pe când cu metoda „substituţiei" ecuaţiile sunt lăsate pe rând în urmă şi la sfârşit, el, dacă nu este din cei dotaţi, nici nu-şi dă seama bine ce problemă a rezolvat; *b)* noţiunea de sistem echivalent şi reducerea la forma canonică sunt exemple elementare de concepte fundamentale şi de procese caracteristice în ştiinţă.

III. Dat un sistem de ecuaţii lineare, aplicând metoda de mai sus, într'un număr finit de etape, ne putem da seama dacă sistemul este compatibil şi în caz afirmativ, să-i scriem şi soluţia.

Teorema lui ROUCHÉ, care leagă compatibilitatea sistemului de rangul matricii coeficienţilor, este mai mult formală; calculele pe care ar trebui să le facă cineva spre a decide pe calea indicată de această teoremă dacă sistemul este compatibil sau nu, sunt mult mai lungi, în general.

IV. Metoda indicată este cu folos aplicabilă când sistemul cuprinde mai multe necunoscute, cum se întâmplă în diferite probleme tehnice.

Dar interesul său este şi profund teoretic: ea este folosită la reducerea matricilor la forma canonică; în teoria grupurilor de transformări lineare etc... Cel care a sistematizat-o şi a aplicat-o la sisteme de ecuaţii lineare cu infinite necunoscute, a fost TOEPLITZ, în 1909 *(Rendiconti di Palermo)*.

Aceeaşi metodă se foloseşte când, dat un sistem de vectori sau de forme lineare, vrem să ştim care dintre ei depind linear

de ceilalţi. Multe probleme se pot rezolva în diferite feluri, dar e bine cum spune C. BOURLET, să preferăm, artificiilor elegante, procedeele naturale, inteligibile, generale şi fecunde.

GH. GALBURĂ.

BIBLIOGRAFIE

1. BESKIN N., Metodica geometriei (în limba rusă), Moscova 1947.
2. BOURLET C., La pénétration réciproque des mathématiques pures et des math. appliquées dans l'enseignement secondaire. Einsegnement Mathématique 1910.
3. BEREZANSKAIA E. S., Metodica aritmeticei. Moscova 1947.
4. LIETZMANN W., Metodik des Mathematisches Unterichts.
5. ONICESCU O. şi GALBURĂ GH., Algebră. Bucureşti 1948.
6. SIMON M., Didactica şi metodica aritmeticei în şcolile medii (în limba rusă).
7. SNIGIER V. I. şi CEKMAREV., Metodica aritmeticei (în limba rusă), Moscova 1947.

O PROBLEMĂ DE GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Imi propun să rezolv următoarea problemă [1]. *„Proiectăm punctul* P *pe laturile* BC, CA, AB *ale triunghiului* ABC, *proiectantele fiind paralele cu* CA, AB, BC *sau cu* AB, BC, CA; *fie* A', B', C', A", B", C" *aceste proiecţii.*

1°. *Să se găsească locul lui* P, *astfel ca punctele* A' B' C' *să fie*

a) *situate pe o aceiaşi dreaptă* Δ'.

b) *picioarele a trei ceviene concurente în* M.

2°. *In cazul* a) *punctele* A", B", C" *se vor găsi* [2] *pe o dreaptă* Δ". *Să se afle înfăşurătoarele dreptelor* Δ' *şi* Δ".

In cazul b) *punctele* A", B", C" *vor fi* [3] *picioarele a trei ceviene concurente în* M". *Să se găsească locurile punctelor* M' *şi* M".

Soluţie. Fie P $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ în coordonate baricentrice. Obţinem

$A'(0, \beta_0, \gamma_0 + \alpha_0)$; $B'(\alpha_0 + \beta_0, 0, \gamma_0)$; $C'(\alpha_0, \beta_0 + \gamma_0, 0)$,

$A''(0, \alpha_0 + \beta_0, \gamma_0)$; $B''(\alpha_0, 0, \beta_0 + \gamma_0)$; $C''(\gamma_0 + \alpha_0, \beta_0, 0)$.

1) A se vedea şi complectarea din nota dela pag. 405 din acest număr.
2) Se aplică teorema lui MENELAUS.
3) Se aplică teorema lui CEVA.

a) [1], Punând condiția ca punctele A', B', C' să fie colineare, găsim

$$(\alpha+\beta)\,(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)+\alpha\beta\gamma\equiv(\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0. \quad (1)$$

Deci P descrie *prima elipsă a lui* STEINER (excluzând dreapta dela infinit). Când triunghiul ABC este echilateral elipsa lui STEINER e chiar *cercul circumscris* și obținem propoziția: „Proiecțiile, sub un unghiu de 60°, ale unui punct de pe cercul circumscris pe laturile triunghiului echilateral, sunt colineare", — un caz particular al teoremei WALLACE-SIMSON. Dacă efectuăm o proiecție cilindrică, triunghiul devine oarecare, centrul cercului devine baricentrul acestui triunghiu, precum și centrul elipsei în care se transformă cercul [2]. Aceasta constitue o demonstrație geometrică a chestiunii.

b) Ecuațiile dreptelor AA', BB', CC' sunt

$$(\gamma_0+\alpha_0)\,\beta-\beta_0\,\gamma=0\;;\quad -\gamma_0\,\alpha+(\alpha_0+\beta_0)\,\gamma=0\;;\quad (\beta_0+\gamma_0)\,\alpha-\alpha_0\,\beta=0$$

Punând condiția ca aceste drepte să fie concurente, găsim locul lui P

$$(\alpha+\beta)\,(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)-\alpha\beta\gamma\equiv\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2\,(\gamma+\alpha)+\gamma^2\,(\alpha+\beta)+\alpha\beta\gamma=0 \quad (2)$$

cubica (Γ) *circumscrisă triunghiului* ABC.

Tangentele în A, B, C sunt

$$\beta+\gamma=0\;,\quad \gamma+\alpha=0\;,\quad \alpha+\beta=0.$$

Deci cubica (Γ) e *înscrisă în triunghiul anticomplementar*, punctele de contact fiind vârfurile triunghiului de referință. E interesant de observat că e *tritangentă elipsei lui* STEINER, considerate mai sus. Dreptele

$$-\alpha+\beta+\gamma=0\;,\quad \alpha-\beta+\gamma=0\;,\quad \alpha+\beta-\gamma=0$$

taie cubica în câte trei puncte confundate la infinit. Deci *laturile triunghiului complementar sunt asimptotele cubicei* (Γ). Punctele dela infinit sunt puncte de inflexiune ale cubicei [C. C.].

Suprafața triunghiului pedal al punctului P (α, β, γ) este

$$S'=2S\,\alpha\beta\gamma:(\alpha+\beta)\,(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)$$
$$=2S\,\alpha\beta\gamma:[(\alpha+\beta+\gamma)\,(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)-\alpha\beta\gamma].$$

---

1) Acest punct al problemei a fost propus de d-l Prof. C. COȘNIȚĂ în „*Coordonnées barycentriques*", 6-me chapitre, ex. 6, page 168.

2) Paralelismul și raportul se mențin într'o proiecție cilindrică.

Deci cubica (Γ) e *locul punctelor pentru care triunghiurile pedale au o suprafață constantă,* egală cu dublul suprafeței triunghiului de referință. Din acest loc mai fac parte prima elipsă a lui STEINER și dreapta dela infinit [1].

Se observă deasemenea că (Γ) e *o cubică invariantă* în transformarea prin *puncte reciproce.*

2'. *a)* Fie $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$ ecuația dreptei Δ'. Ea taie laturile BC, CA, AB în

$$A'(0,\ 1/v,\ -1/w)\ ;\quad B'(-1/u,\ 0,\ 1/w)\ ;\quad C'(1/u,\ -1/v,\ 0).$$

Paralelele duse din aceste puncte la laturile CA, AB, BC ale triunghiului sunt

$$w\alpha + v\beta + w\gamma = 0\ ,\quad u\alpha + u\beta + w\gamma = 0\ ,\quad u\alpha + v\beta + v\gamma = 0.$$

Punând condiția ca ele să fie concurente, găsim ecuația tangențială a înfășurătoarei căutate.

$$f(u,\ v,\ w) \equiv uv^2 + vw^2 + wu^2 - 3uvw = 0$$

adică *o cubică* (C') *de a treia clasă.* Avem

$$f(1.\ 0,\ 0) = f(0,\ 1,\ 0) = f(0,\ 0,\ 1) = 0$$

deci curba (C') e tangentă laturilor triunghiului ABC. Ecuațiile punctelor de contact vor fi

$$uf'_u(1,\ 0,\ 0) + vf'_v(1,\ 0,\ 0) = wf'_w(1,\ 0,\ 0) = w = 0$$

și analoagele.

Deci curba (C') e *tangentă laturilor* BC, CA, AB *în punctele* C, A, B. Avem

$$f(1,\ 1,\ 1) = f_u(1,\ 1,\ 1) = f_v(1,\ 1,\ 1) = f_w(1,\ 1,\ 1) = 0$$

deci curba (C') e *bitangentă dreptei dela infinit.* Ecuația punctelor de contact este

$$u^2 f''_{u^2}(1,\ 1,\ 1) + \ldots + 2uvf''_{uv}(1,\ 1,\ 1) + \ldots = 0$$

$$\therefore\qquad u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu = 0$$

Punctele de contact vor avea coordonatele $1,\ \alpha,\ \alpha^2$; $1,\ \alpha^2\alpha$ unde α e rădăcina cubică complexă a unității.

Deci *punctele de contact sunt imaginar conjugate.*

---

1) C. COȘNIȚĂ: op. cit. pages 52 et 134.

In cazul *triunghiului echilateral*, acestea sunt *punctele ciclice ale planului*

Curba (C') va fi *o cuartică*, după cum rezultă din aplicarea formulei a treia [1] a lui PLÜCKER

$$n = m\,(m-1) - 2\tau - 3i.$$

Celelalte formule ale lui PLÜCKER ne arată că are *trei puncte de întoarcere.*

Procedând analog, găsim înfășurătoarea dreptei Δ''

$$g(u, v, w) \equiv u^2 v + v^2 w + w^2 u - 3uvw = 0 \qquad (4)$$

o cuartică (C'') cu trei puncte de întoarcere, bitangentă dreptei dela infinit [2] și *tangentă laturilor* BC, CA, AB *în punctele* B, C, A.

Se observă ușor că *reciproca* unei tangente la curba $f(u, v, w) = 0$ e tangentă [3] la curba $g(u, v, w) = 0$.

Coordonatele polului trilinear al dreptei Δ' sunt $1/u$, $1/v$, $1/w$, deci acest punct descrie curba

$$\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha - 3\alpha\beta\gamma = 0 \qquad (5)$$

o *cubică* (Γ'), tangentă laturilor BC, CA, AB în punctele C, A, B.

Curba polar reciprocă a cuarticei (C'') e *cubica* (Γ'')

$$\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 - 3\alpha\beta\gamma = 0 \qquad (6)$$

tangentă laturilor BC, CA, AB în punctele B, C, A.

Cele două cubice au câte *trei puncte de inflexiune* [4], iar baricentrul G drept *punct dublu* [5]. Ele sunt una transformată prin *puncte reciproce* a celeilalte,

Fie N un punct în planul triunghiului ABC; dreptele AN, BN, CN taie medianele luate în ordinea BG, CG, AG, apoi în ordinea CG, AG, BG în punctele A_1, B_1, C_1, respectiv în punctele A_2, B_2, C_2.

---

1) GH. VRÂNCEANU: „Curs de geometrie analitică și proiectivă", vol. I, pag. 282.

2) In aceleași puncte ca și cuartica (C').

3) Fără ca dreptele Δ' și Δ'' să fie reciproce.

4) Se folosesc formulele lui PLÜCKER.

5) Dreptele $\beta - \gamma = 0$, $\gamma - \alpha = 0$, $\alpha - \beta = 0$ taie cubica în G, în câte două puncte confundate.

Locul punctului N astfel ca *punctele* A_1, B_1, C_1 *să fie colineare*[1] *e cubica* (Γ''); iar locul punctului N astfel ca punctele A_2, B_2, C_2 *să fie colineare e cubica* (Γ').

b) Fie $M'(\alpha', \beta', \gamma')$. Vom avea

$$A'(0, \beta', \gamma') \; ; \; B'(\alpha', 0, \gamma') \; ; \; C'(\alpha', \beta', 0).$$

Punând condiția ca paralelele

$$\beta'\alpha - \gamma'\beta + \beta'\gamma = 0, \; \gamma'\alpha + \gamma'\beta - \alpha'\gamma = 0, \; -\beta'\alpha + \alpha'\beta + \alpha'\gamma = 0$$

duse din aceste puncte la laturile CA, AB, BC să fie concurente, găsim că M' descrie cubica (Γ_1)

$$\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha\beta\gamma = 0 \qquad (7)$$

Analog, locul lui M'' va ii cubica (Γ_2)

$$\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma = 0 \qquad (8)$$

transformata prin *puncte reciproce*[2] a cubicei (T_1).

Cele două cubice sunt *tangente laturilor* BC, CA, AB, prima în C, A, B, a doua în B, C, A. Amândouă sunt *tangente medianelor* în vârfurile triunghiului anticomplementar.

Problema se poate pune în spațiul cu trei dimensiuni, în cadrul *geometriei tetraedrului* și rezolva analog.

PETRE P. TEODORESCU.

Notă. Ca o completare a studiului de față, voi trata încă următoarele două probleme:

1. *Locul punctului* X, *intersecția dreptelor* Δ', Δ''.
2. *Înfășurătoarea dreptei* M' M''.

De altfel, primul punct este propus spre rezolvare chiar în locul indicat de d-l PETRE P. TEODORESCU.

Punctul P descriind prima elipsă a lui STEINER, coordonatele sale sunt de forma:

$$1 : k_1, \; 1 : k_2, \; 1 : k_3,$$

k_1, k_2, k_3 fiind trei numere variabile, a căror sumă este O.

Ecuațiile dreptelor Δ', Δ'', se află ușor, folosind coordonatele punctelor A', ... A'', ... Se găsesc ecuațiile:

$$\frac{k_1}{k_3}\alpha + \frac{k_2}{k_1}\beta + \frac{k_2}{k_2}\gamma = 0 \qquad \frac{k_1}{k_1}\alpha + \frac{k_2}{k_3}\beta + \frac{k_3}{k_1}\gamma = 0.$$

---

1) Se folosește aceiași metodă ca la 1° *a)*.

2) Fără ca punctele M' M'' să fie reciproce.

Locul punctului X se află, eliminând parametrii k_1, k_2, k_3 între ecuaţiile (1) şi $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Această eliminare este un exercitiu interesant. Din cele două ecuaţii (1), care sunt liniare şi omogene în raport cu α, β, γ, deducem pentru acestea valori proporţionale cu:

$$\frac{k_2 k_3 - k_1^2}{k_1^2} \quad , \quad \frac{k_3 k_1 - k_2^2}{k_2^2} \quad , \quad \frac{k_1 k_2 - k_3^2}{k_3^2}.$$

Dar din cauza relaţiei care leagă parametrii k_1, k_2, k_3, deducem imediat relaţiile următoare:

$$k_2 k_3 + k_3 k_1 + k_1 k_3 = k_2 k_3 - k_1^2 = k_3 k_1 - k_2^2 = k_1 k_2 - k_3^2$$

Deci coordonatele α, β, γ ale punctului X sunt invers proporţionale cu k_1^2, k_2^2, k_3^2, şi, invers, k_1, k_2, k_3 sunt invers proporţionale cu $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$. Prin urmare, locul punctului X este

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = 0, \quad \text{sau:} \quad \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\gamma\alpha} + \sqrt{\alpha\beta} = 0.$$

Raţionalizând această ecuaţie, obţinem:

$$\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Locul punctului X *este deci o cuartică, având vârfurile triunghiului* ABC *ca puncte de rebrusment, tangentele de rebrusment fiind medianele triunghiului.*

Dacă triunghiul ABC devine echilateral, aceasta curbă devine o ipocicloidă cu trei puncte de rebrusment.

Să trecem la problema 2-a. Coordonatele punctului P verifică de data aceasta următoarea ecuaţie:

$$(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta) = \alpha\beta\gamma. \qquad (2)$$

Considerând punctele M', M'' ca intersecţii ale perechilor de drepte AA', BB' şi AA'', BB'', găsim coordonatele acestor puncte sub forma:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \alpha) \ , \ \beta\gamma, \ \gamma(\gamma + \alpha) \quad ; \quad \gamma\alpha \ , \ (\alpha + \beta)(\beta + \gamma) \ , \ \gamma(\beta + \gamma).$$

Coordonatele u, v, w ale dreptei M' M'', având în vedere relaţia (2), se pot scrie astfel:

$$ku = \frac{1}{\alpha}(-\alpha + \beta + \gamma) \quad , \quad kv = \frac{1}{\beta}(\alpha - \beta + \gamma) \quad , \quad kw = \frac{1}{\gamma}(\alpha + \beta - \gamma), \qquad (3)$$

k fiind un coeficient de proporţionalitate.

Înfăşurătoarea dreptei M' M'' se află acum eliminând parametrii k, α, β, γ, între relaţiile (2), (3).

Iată o cale elegantă pentru a face această eliminare:

Sriem relaţiile (3) sub forma:

$$ku + 1 = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \quad , \quad kv + 1 = \frac{\gamma + \alpha}{\beta} \quad , \quad kw + 1 = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}, \qquad (3')$$

apoi înmulţim aceste trei ecuaţii şi avem:

$$(ku + 1)(kv + 1)(kw + 1) = 1$$

(am ţinut seama de (2)).

Adunând relaţiile (3'), avem):

$$k(u+v+w)+3=\frac{\sum \beta\gamma(\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}=\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)-2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-1,$$

$$k(u+v+w)=-4. \qquad (5)$$

Eliminând, în fine, pe k între (4), (5), găsim ca înfăşurătoare curba de clasa 3-a:

$$(u+v+w)^3=(-3u+v+w)(u-3v+w)(u+v-3w).$$

Această curbă este tangentă medianelor triunghiului şi laturilor triunghiului anticomplementar.

Propunem corespondenţilor noştri studiul mai amănunţit al acestei curbe.

C. C.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ PE ANUL 1947—1948

Din cercetarea activităţii corespondenţilor *Gazetei Matematice* în domeniul Algebrei, am constatat că nici-un corespondent nu satisface condiţiilor regulamentului „Premiului de Algebră".

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI

G. G. CONSTANTINESCU, HARALAMB IONESCU, CONST. IONESCU-BUJOR.

Acest raport a fost aprobat de Adunarea Generală la 14 Februarie 1949.

NOTE MATEMATICE

22. *Notă asupra problemelor 168, 169, 172, vol. I, cap. I, pag. 30 din „Aufgaben und Lehrsätze..." de* G. POLYA *şi* G. SZEGÖ.

D-l prof. TIBERIU POPOVICIU, în problema 5028, propune câteva generalizări ale chestiunilor de mai sus şi anume.

„Să se determine numerele pozitive x *şi* y *aşa fel ca şirul*

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots \qquad (I)$$

unde

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x}\left(1+\frac{y}{n}\right) \qquad (1)$$

să fie descrescător.

Aceeaşi chestiune pentru

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{y}{n}\right)^n. \qquad (2)$$

In nota aceasta, noi ne propunem să găsim numerele pozitive x şi y, aşa fel ca şirul (1) cu

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^y \qquad (3)$$

să fie tot descrescător.

Aceeaşi chestiune pentru şirul.

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+y}. \qquad (4)$$

1. Pentru aceasta ne vom folosi de metoda indicată de I. SCHUR, şi vom arăta că pentru fiecare din şirurile (1), (2), (3), (4) se pot găsi condiţii necesare şi suficiente de descreştere.

Scriem prima expresie astfel

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(1+\frac{y}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-x}}$$

primul factor e descrescător conform problemei 168 din volumul citat. Factorul al 2-lea va fi descrescător odată cu patratul său. Ori expresia

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x-1} = \left(1+\frac{2y}{n}+\frac{y^2}{n^2}\right) \cdot \left(1+\frac{2x-1}{n}+\frac{2x-2}{2n^2}+\ldots\right)$$

e descrescătoare cu n când

$$x+y-\frac{1}{2} \to 0$$

care e o condiţie suficientă pentru descreştere.

Această condiţie e şi necesară căci aplicând logaritmul şi făcând diferenţa $\lg a_n - \lg a_{n+1}$, această diferenţă va fi pozitivă când $a_n \geqslant a_{n+1}$.

Or

$$\lg a_n = 2(n+x)\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\ldots\right]$$

$$+2\left[\frac{y}{2n+y}+\frac{y^3}{3(2n+y)^3}+\ldots\right]=\frac{2(n+x)}{2n+1}+\frac{2y}{2n+y}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

de unde

$$\lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{2(n+x)}{2n+y}+\frac{2y}{2n+y}-\frac{2(n+x+1)}{2n+3}-\frac{2y}{2n+y+2}$$

$$+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{4x+4y-2}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Pentru a avea $a_n \geqslant a_{n+1}$, e necesar să avem

$$x+y \geqslant \frac{1}{2}.$$

2. Şirul (2) va fi descrescător când vom avea exact aceleaşi condiţii suficiente şi necesare ca la şirul (1), adică

$$x+y \geqslant \frac{1}{2}.$$

Aceasta, pentrucă la valori mari ale lui n, expresiile

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = 1+\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{şi} \quad 1+\frac{x}{n}$$

sunt asimptotic egale.

3. Şirul $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^y$ va fi descrescător când $yx \geqslant \frac{1}{2}$, căci scriind expresia sub forma

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^y}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

se vede că primul factor e descrescător; al 2-lea factor va fi descrescător odată cu pătratul său, deci cu

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{2y}}{1+\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{2xy}{n}+\frac{2y\,(2y-1)\,x^2}{2n^2}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$$

$$= \frac{2xy-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Deci pentru n destul de mare, expresia e descrescătoare când $2xy-1 \geqslant 0$, condiţie ce se vede, că e suficientă descreşterii şirului.

Condiţia e necesară căci

$$\lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{2xy-1}{2n\,(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

4. In sfârşit şirul (4) va fi descrescător când $x \leqslant 2p$ căci

$$\lg a_n = (n+p)\,.\,\lg\frac{1+\frac{x}{2n+x}}{1-\frac{x}{2n+y}} = (2n+2p)\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{2y-1}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^{2y-1}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{2y-1}\cdot\frac{x^{2y-1}}{(2n+x)^{2y-2}}+(2p-x)\cdot\sum_{y=1}^{\infty}\frac{x^{2y-1}}{2y-1}\cdot\frac{1}{(2n+x)^{2y-1}}.$$

Apoi cum

$$\lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{(2p-x)\,.\,x}{(2n+x)\,(2n+x+2)}+0\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

se vede că condiţia necesară şi suficientă de decreştere e

$$x \leqslant 2p.$$

Pentru $p=1$, găsim exemplul din „*Aufgaben und Lehrsätze*“.

N. GAIU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Universitatea din Bucureşti. Facultatea de Ştiinţe. Secţia Matematici

Anul II. Examene de fine de an. Sesiunea Iunie 1948

Geometria analitică. I. Se dă cuartica

(C) $\qquad (x^2+y^2)^2-2ax(x^2+y^2)-a^2y^2=0,$

a) Să se arate că (C) este o curbă unicursală.

b) Să se determine x şi y ca funcţii raţionale de un parametru.

c) Să se construiască curba.

II. Să se găsească ecuaţia cilindrului ale cărui generatoare au parametrii directori l, m, n şi care este circumscris suprafeţei

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=a^3.$$

III. Planul osculator al unei curbe strâmbe rămâne tangent la sfera fixă de centru O. Să se arate că:

a) planul rectificant trece prin O;

b) raportul dintre raza de curbură şi raza de torsiune este o funcţie lineară de arc.

Analiză. 1. Principiul general al alegerii.

2. Să se calculeze

$$I=\iint (2x^2+xy+2y^2)\,dxdy$$

extinsă la exteriorul unui cerc de rază 1 şi cu centrul în punctul de coordonate (u, v),

a) Să se arate că această integrală este întotdeauna pozitivă. oricare ar fi centrul cercului.

b) Valoarea minimă a integralei.

c) Locul centrelor, pentru care integrala este constantă.

3. Se consideră ecuaţia diferenţială

$$p(D)\,y=xy''\sin x+xy'\cos x-y\cos x=0;$$

să se integreze, descompunându-se într'un produs de operatori lineari

$$p(D)=u(D^1+\alpha D^0)\,(w D^1+t D^0).$$

Făcând substituţia $\frac{1}{u}=U$, să se arate că U trebue să verifice o ecuaţie diferenţială lineară de ordinul 2.

Să se caute o soluţie particulară: *a)* când $\alpha=0$; *b)* când coeficientul lui U se anulează.

Teoria funcţiilor. 1. Se dă

$$\int \frac{f(z)\,dz}{(1-e^{2\pi iz})^2}.$$

Să se calculeze valoarea ei, luată pe un cerc cu centrul în origine şi de rază $n+\frac{1}{2}$, ştiind că $f(x)$ este o funcţie periodică, cu perioada 1 şi că

$$f(O) = A \quad , \quad f'(O) = B.$$

2. Se dau două funcţii $f(z)$ şi $g(z)$, care coincid pe o mulţime dei puncte, având un punct de acumulare comun a. Punctul a este punct critic algebric de acelaşi ordin. Să se arate că funcţiile sunt identice.

Axiomatică. 1. Să se rezolve prin metoda perioadelor lui GAUSS, ecuaţia

$$x^{31} - 1 = 0$$

peste corpul prim, de caracteristică $p = 0$.

2. Pentru ce valori ale caracteristicei $p < 31$, rezolvarea rămâne valabilă? Pentru care din aceste caracteristici, rezolvarea se face sigur prin radicali?

3. Să se arate că, dacă în planul coordonatelor carteziene avem trasată curba $y = x^3$, înscrierea poligonului de 41 laturi se poate face cu rigla şi compasul.

Mecanică. Un paralelipiped dreptunghic, material, omogen, de dimensiuni a, b, c este solicitat de greutatea sa proprie G şi de o forţă atractivă, proporţională cu distanţa, aplicată în unul din vârfuri B, centrul atractiv fiind situat în punctul fix P din spaţiu. Presupunând că solidul este mobil în jurul muchei sale OA (fixe) să se determine:

1. Poziţi sa de echilibru.

2. Reacţiunile în punctele O şi A ale axei fixe, O şi A fiind deasemeni vârfuri ale paralelipipedului.

BIBLIOGRAFIE

Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky. Ročnik 73. Sešit 4. Praha 1949. E. BUNICKIY: Etude des fractions continues suivant un module entier $m > 1$. L. GODEAUX: Sur un procédé de construction de transformations birationnelles hyperspatiales. V. JARNIK: On ESTERMONN'S proof of a theorem of MINKOWSKI. VL. VAND: Theory of viscousity of suspensions and solutions. J. BILEK: O jedné kubické involuci v prostoru a jejim použiti k stanoveni počtu na obecné kubické ploše. M. HLAVÁCEK: Ještě k řešeni rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ celými čisky. FR. KADERÁVEK: Přispěvek k normálám kuželosečcek a ploch druhého stupné. J. MÁRIK: Odhod prosté hodnoty integrálu a kriteria pro konvergenci nevlastnich integřalu. VL. KYSÁVÝ: Dvě eliptické kubatury. V. VÝSIN: Poznámka k určeni or rovinněko rězu na kvadratické kuželové plŏn.

ENDEAVOUR. Vol. VIII. Nr. 29. 1949.

A. BLOCH et G. GUILLAUMIN. La géometrie integrale au contour gauche. Paris. Gautier-Villars. 1949.

A. DENJOY. Leçons sur le calcul des coefficients. Quatrième partie. Premier et deuxième fascicule. Paris. Gauthier-Villars. 1949.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 120 (G. M., Vol. XXX, 261). Se întreabă dacă există vre-un studiu asupra monedelor întrebuinţate în Muntenia şi Moldova în decursul veacurilor.

Răspunsul la această cerere este cuprins în răspunsul dat în Vol. LI, p. 634 la cererea 201.

E. ST. IACOB.

DIVERSE

Şedinţele Societăţii de Matematici

Societatea Română de Matematici a ţinut şedinţă de comunicări, cu caracter elementar, la 31 Ianuarie 1949, sub preşedinţia d-lui Prof. G. DEMETRESCU, cu următoarea ordine de zi:

MIHAIL FOCŞENEANU: Despre curbele inverse.

VIRGIL CLAUDIAN: Asupra unor sisteme diofantice multigrade.

La 21 Februarie 1949, s'a ţinut şedinţă sub preşedinţia d-lui Prof. GR. MOISIL; au avut loc comunicările:

D. POMPEIU: Observaţii asupra transformării fracţiilor ordinare, în expresii periodice.

C. COŞNIŢĂ: Despre ecuaţiile tangenţiale ale cercului şi sferei.

G. GALBURĂ: Despre reprezentarea torului pe sferă.

De asemenea la 28 Martie a vorbit d-l E. CARAMAN în legătură cu o teoremă a d-lui Prof. D. POMPEIU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4496. *Se dă ecuaţia*

$$z^3 + px + q = 0,$$

coeficienţii p *şi* q *fiind reali. Ştiind că această ecuaţie are rădăcinile reale, să se arate că patratele rădăcinilor ei sunt inferioare lui* $-\frac{4p}{3}$.

TH. ANGHELUŢĂ.

Soluţie dată de d-nii G. G. VRÂNCEANU şi E. N. WEGENER.

Insemnăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei propuse şi considerăm relaţiile

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad , \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p.$$

Eliminând una dintre rădăcini, de exemplu x_3 găsim egalitatea

$$x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + p = 0$$

din care urmează

$$x_2 = \frac{-x_1 \pm \sqrt{-(3x_1^2 + 4p)}}{2}.$$

Rădăcinile au fost presupuse reale deci $x_1^2 \leqq -\frac{4p}{3}$. Problema este rezolvată, x_1 fiind una oricare din cele trei rădăcini.

Se poate da o altă soluție plecând dela ecuația ale cărei rădăcini sunt patratele rădăcinilor ecuației propuse. Pentru aceasta, facem transformarea $x^2 = y$ și găsim ecuația

$$y(y+p)^2 - q^2 = 0.$$

Pentru $y = -\frac{4p}{3}$, primul membru devine $-\frac{4p^3}{27} - q^2 > 0$ și rămâne pozitiv pentru $y > -\frac{4p}{3}$, căci produsul $y(y+p)^2$ ia valori și mai mari.

Credem nimerit să verificăm pe problema propusă o frumoasă teoremă datorită lui SCHUR [1]. Considerăm ecuația algebrică $f(x) = 0$ *cu rădăcinile reale* și fie α cea mai mare dintre aceste rădăcini. Rădăcinile cele mai mari ale ecuațiilor $f'(x) = 0$ și $f''(x) = 0$ le notăm respectiv cu β și γ. *Teorema afirmă existența condiției* $\alpha - \beta \leqq \beta - \gamma$.

Vom aplica teorema ecuației în y de mai sus. In acest caz avem

$$\beta = -\frac{p}{3}, \quad \gamma = -\frac{4p}{3},$$

prin urmare $\alpha < -\frac{4p}{3}$, adică rezultatul enunțat în problemă.

PROBLEMA 4909. *Să se elimine* λ *și* μ *între relațiunile*

$$m(x-a)\mu - y(m\lambda + a) = 0$$
$$(x-\lambda)\mu + (a-2\lambda)(y-\mu) = 0$$
$$(x^2 + y^2 - ax)\mu - y\mu^2 + \lambda y(a-\lambda) = 0$$

unde m *și* a *sunt niște constante date.*

GH. BUICLIU.

---

1) *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 144, 1914, s. 75.

Din prima relaţie scoatem valoarea

$$\mu = \frac{y(m\lambda + a)}{m(x - a)}$$

pe care ducând-o în celelalte două şi făcând toate calculele şi reducerile găsim

$$m\lambda^2 + (a + am - mx)\lambda + a(m + 1)(x - a) = 0$$

$$m^2[(x-a)^2 + y^2]\lambda^2 - m[m(x-a)(x^2 + y^2 - a^2) - 2ay^2]\lambda + a^2y^2$$

$$- am(x-a)(x^2 + y^2 - ax) = 0.$$

Problema s'a redus la rezolvarea acestui sistem în λ^2 şi λ. Odată găsit λ se ridică la patrat, se egalează cu valoarea lui λ^2 şi obţine rezultatul eliminării.

S'au primit, la data propunerii problemei, soluţii bune dela d-nii GH. M. DUMITRESCU (Bucureşti), care a pus rezultatul sub formă de determinant şi dela d-l M. S. ROSENBLATT (Iaşi).

Recent s'au primit soluţii bune, cu rezultatul exact, dela d-nii AL. N. PANTEA (Lic. Beiuş) şi E. N. WEGENER.

PROBLEMA 5719. *Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei*

$$x^4 + 2x^3 - 2mx^2 - 18mx - 27m + m^2 = 0$$

în care m *este un parametru variabil.*

G. CĂLUGĂREANU.

Pentru discuţia ecuaţiei vom aplica metoda reprezentării grafice. Rezolvind în raport cu m avem, dacă punem $y = 2m$,

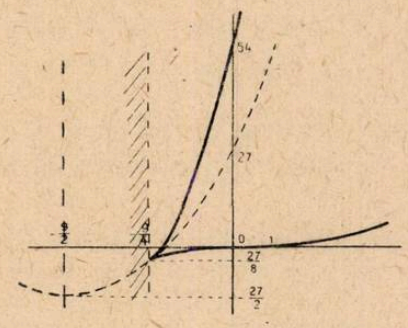
$$y = 2x^2 + 18x + 27 \pm (4x + 9)^{\frac{3}{2}}$$

şi vom construi această curbă. Găsim

$$y' = 2(2x + 9 \pm 3\sqrt{4x + 9}) \quad ; \quad y'' = 4\left(1 \pm \frac{3}{\sqrt{4x + 9}}\right).$$

Avem $y' = 0$ pentru $x = 0$, luând semnul — înaintea radicalului; atunci avem şi $y'' = 0$. Pentru $x < -\frac{9}{4}$ curba e imaginară

Tăiem cu dreapta $y = 2m$. Numărul punctelor de intersecție fiind egal cu numărul rădăcinilor reale, se vede că pentru $m < -\frac{27}{16}$ ecuația dată are toate rădăcinile imaginare. Pentru $m = -\frac{27}{16}$ avem o rădăcină dublă $x = -\frac{9}{4}$ și 2 imag. Pentru $-\frac{27}{16} < m < 0$



avem 2 rădăcini reale negative și 2 imaginare. Pentru $m = 0$ avem o rădăcină triplă $x = 0$ și una simplă $x = -2$. Pentru $0 < m < 27$ avem 2 rădăcini reale de semne contrare și 2 imaginare. Pentru $m > 27$ avem 2 rădăcini reale pozitive și 2 imaginare.

Avem 4 rădăcini reale numai pentru $m = 0$.

Ecuația se întâlnește în determinarea cubicelor nodale osculatoare la o curbă plană într'un punct al său.

Au rezolvat astfel problema d-nii: BAKONIY (student Timișoara) și MIRCEA V. SOARE (student București).

G. C.

PROBLEMA 5779. *Dacă numărul real a satisface relației* $4a - 1 > 0$, *ecuația de variabilă reală:*

$$x^6 - 2x^5 + (6a-1)x^4 - 2(2a-1)x^3 + a(9a-4)x^2 - 2a^2x + 4a^3 = 0$$

are rădăcinile situate pe două drepte trecând prin origine și simetrice în raport cu axa reală.

MIHAIL I. FOCȘENEANU.

Soluție și generalizare dată de d-l M. D. POPA (Institutul Politehnic București).

Să determinăm ecuațiile de gradul $2n$, de *variabilă reală* care au rădăcinile situate pe *două drepte simetrice față de axa reală*, în planul complex și *care trec prin origine*.

Este necesar ca rădăcinile să fie câte două, imaginar conjugate, iar argumentele în valoare absolută, egale.

Aceste rădăcini sunt de forma

$$\overline{x}_k = \alpha_k(1 + i\lambda) \quad \text{şi} \quad \overline{x}_k = \alpha_k(1 - i\lambda)$$

şi sunt rădăcinile ecuaţiilor de gradul 2

$$x^2 - 2\alpha_k x + \alpha_k^2)(1 + \lambda^2) = 0 \qquad (\lambda \text{ real}).$$

Ecuaţiile căutate au deci forma

$$\prod_{k=1}^{k=n} (x^2 - 2\alpha_k x + \alpha\alpha_k^2) = 0 \qquad (\alpha - 1) > 0). \tag{1}$$

Particularizând pentru $n = 3$, forma generală a ecuaţiei de gradul 6 care are condiţiile date între rădăcinile sale, este următoarea:

$$\begin{aligned} &x^6 - 2\Sigma\alpha_1 x^5 + [\alpha\Sigma\alpha_1^2 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2]\, x^4 \\ &- 2[\alpha\Sigma\alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3]\, x^3 + \ldots + \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha^3 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

în care, dacă notăm $\Sigma\alpha_1 = u$, $\Sigma\alpha_1\alpha_2 = v$ şi $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = w$ funcţiunile simetrice din ecuaţia (2) se scriu

$$\Sigma\alpha_1^2 = u^2 - 2v \quad , \quad \Sigma\alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) = uv - 3w$$

$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2 = v^2 - 2uw.$$

Atunci ecuaţia (2) devine:

$$\begin{aligned} &x^6 - 2ux^5 + [\alpha(u^2 - 2v) + 4v]\, x^4 - 2[\alpha(uv - 3w) + 4w]\, x^3 \\ &+ \alpha[\alpha(v^2 - 2uw) + 4uw]\, x^2 - 2\alpha^2 vwx + w^2\alpha^3 = 0 \qquad (\alpha > 1). \end{aligned} \tag{3}$$

Aceasta este ecuaţia de gradul 6 cea mai generală, care are rădăcinile situate pe 2 drepte simetrice faţă de axa reală, *u, v, w fiind parametri reali.*

Observăm însă că α_1, α_2, α_3 sunt numere reale, rădăcini ale ecuaţiei de gradul 3

$$y^3 - uy^2 + vy - w = 0. \tag{4}$$

Deducem de aici o legătură între rădăcinile *ecuaţiei rezolvante* (4) şi rădăcinile ecuaţiei (3): *dacă ecuaţia* (4) *are toate rădăcinile reale, atunci ecuaţia* (3) *are toate rădăcinile imaginare şi situate pe 2 drepte ce trec prin origine şi sunt simetrice faţă de axa reală.*

Identificând (3) cu ecuaţia din enunţ, obţinem un sistem de 6 ecuaţii cu 4 necunoscute u, v, w, α (considerând că vrem să determinăm şi pe α).

Aceste ecuaţii sunt:

$$u = 1 \quad , \quad 6a - 1 = \alpha(u^2 - 2v) + 4v$$

$$2a - 1 = \alpha(uv - 3w) + 4w, \; a(9a - 4) = \alpha[\alpha(v^2 - 2uw) + 4uw] \quad (5)$$

$$a^2 = \alpha^2 vw \quad , \quad 4a^3 = w^2\alpha^3$$

din care scoatem

$$u = 1 \quad , \quad v = -\frac{1}{4} \quad , \quad w = -\frac{1}{4} \quad , \quad \alpha = 4a.$$

In cazul de faţă sistemul (5) admite o *soluţie unică*, ceea ce arată că în adevăr ecuaţia din enunţ este o ecuaţie (3) şi are rădăcinile pe 2 drepte ce trec prin origine şi sunt simetrice faţă de axa reală.

Ecuaţia rezolvantă este $4y^3 - 4y^2 - y + 1 = 0$ şi admite ca rădăcini

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad \alpha_3 = -\frac{1}{2}.$$

Rădăcinile ecuaţiei din enunţ rezultă din anularea trinoamelor în care se descompune membrul 1

$$x^2 - 2\alpha_k x + \alpha_k^2 \alpha = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

adică

$$x^2 - 2x + 4a = 0 \quad , \quad x^2 - x + a = 0 \quad , \quad x^2 + x + a = 0$$

ceea ce ne dă:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 4a} \; , \; x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2} \; , \; x_{5,6} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2} \cdot \quad (6)$$

Notă. 1. Ecuaţia generală (1) se desvoltă

$$x^{2n} + U_1 x^{2n-1} + U_2 x^{2n-2} + \ldots + U_{2n-1} x + U_{2n} = 0 \qquad (7)$$

unde $$U_i = \varphi_i(\alpha_k).$$

Dacă punem

$$s_1 = \sum \alpha_k \quad , \quad s_2 = \sum \alpha_k \alpha_{k-1} \ldots s_i = \sum \alpha_k \alpha_{k-1} \ldots \alpha_{k-i-1}$$

funcţiunile simetrice $U_i = \varphi_i(s_k)$ şi ecuaţia

$$y^n - s_1 y^{n-1} + s_2 y^{n-2} - \ldots + (-1)^i s_i y^{n-i} + \ldots + (-1)^n s_n = 0 \quad (8)$$

permit să găsim în unele cazuri α_k şi α, care conduc la rezolvarea ecuaţii (7).

Sistemul de ecuaţii

$$U_i = \varphi_i(s_k) \qquad (i = 1, \ldots 2n)$$

cuprinde $2n$ ecuaţii cu $n+1$ necunoscute, însă este compatibil numai când ecuaţia (6) are rădăcinile pe 2 drepte ce trec prin origine şi sunt simetrice faţă de axa reală.

In acest caz determinantul principal Δ_{2n} şi minorii corespunzători diagonalei principale până la ordinul $n+2$ inclusiv sunt nuli, fapt care ar permite recunoaşterea proprietăţii de mai sus în cazul ecuaţiei date.

2. Legătura între (7) şi (8) se menţine în cazul general, în ceea ce priveşte natura rădăcinilor. Ecuaţia rezolvantă (8) are totdeauna rădăcinile reale.

3. *Proprietatea de mai sus este valabilă pentru orice ecuaţie de variabilă reală care are toate rădăcinile imaginare.*

O ecuaţie de variabilă reală x şi coeficienţi reali, se pune totdeauna sub forma:

$$\prod_1^n [(x-\alpha_k)^2 + \beta_k^2] = 0 \quad \text{sau} \quad x^{2n} + V_1 x^{2n-1} + \ldots + V_{n-1} x + V_n = 0$$

în care $$V_i = \varphi_i(\alpha_k, \beta_k).$$

Dacă notăm cu σ_i, θ_i funcţiile simetrice clasice, sume de produse câte i ale cantităţilor α_k, respectiv β_k, ecuaţiile

$$y^n - \sigma_1 y^{n-1} + \sigma_2 y^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} y + (-1)^n \sigma_n = 0$$

şi $$y^n - \theta_1 y^{n-1} + \theta_2 y^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \theta_{n-1} y + (-1)^n \theta_n = 0$$

au toate rădăcinile reale.

Determinarea funcţiunilor din sistemul de $2n$ ecuaţii cu $2n$ necunoscute $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ dat de

$$V_i = \psi_i(\sigma_k, \theta_k)$$

este în general unică

M. I. F.

PROBLEMA 6101. *In indicatoarele de mers al trenurilor se notează de obicei cu* H^{ab}, *ora H şi minutele* ab, *la care pleacă sau soseşte un tren în gară. Cineva citeşte pe* H^{ab} *ca pe un număr zecimal şi ajunge la gară cu 20 minute înaintea trenului. Se întreabă:*

1°. *Care este numărul de minute* ab.

2°. *Dacă ar continua să facă această confuzie de citire, care este maximum de minute în care ar aştepta în gară sosirea unui tren.*

GH. BUICLIU.

Soluție, dată de d-nii I. N. GLIGOR, M. R. CONSTANTINESCU, I. S. CHIRALEU, M. BARBAIANI, M. V. SOARE, GEORGE ENESCU, ANTON I. VARGĂ, AL. IEȘAN, VALERIU CONSTANTINESCU, I. A. BARBU, P. P. TEODORESCU, CONST. C. DIACONU, AL. BĂRBULESCU, G. G. VRÂNCEANU, SOFRONIE ȘTEFĂNESCU, VAL. STANCIU, V. BAGHINĂ și AL. V. PANTEA.

1°. O oră are 100 minute centezimale sau 60 minute sexagesimale, deci ab minute centezimale fac

$$\frac{60}{100} \cdot ab = \frac{3}{5} ab \text{ minute sexagesimale}$$

Conform enunțului avem

$$ab - \frac{3}{5} ab = 20 \quad \therefore \quad ab = 50 \text{ minute.}$$

2°. Valoarea maximă a lui *ab minute întregi*, fiind 59 minute, maximum cerut este

$$59 - \frac{3}{5} 59 = 23^m \text{ și } 36^{sec}.$$

sau rotund 24 minute maximum.

Au rezolvat bine problema prin algebră, d-nii: VIRGIL G. CONSTANTINESCU, I. FL. FILIMON, GH. A. GRIGORE, MIRCEA GRUMĂZESCU, R. SP. HARET, EM. MITROI, V. D. PĂLUCEANU, P. A. STANCIU și MIRCEA M. VASILIU.

PROBLEMA 6158. *Se consideră o elipsă de centru* O *și fie* OM_1, OM_2 *doi semidiametri perpendiculari variabili ai elipsei. Se cere:*

1°. *Locul intersecției tangentelor în punctele* M_1 *și* M_2.

2°. *Locul mijlocului segmentului* M_1M_2.

3°. *Locul intersecției normalelor la elipsă în* M_1 *și* M_2.

4°. *Locul proecției punctului* O *pe dreapta* M_1M_2.

5°. *Înfășurătoarea dreptei* M_1M_2.

VIRGIL CLAUDIAN.

Soluție. 1°. *Primul procedeu.* Fie elipsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

$y = \lambda x$ ecuația diametrului OM_1 și $y = -\frac{1}{\lambda} x$ ecuația diametrului OM_2.

Deducem

$$M_1\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2}}\ ,\ \frac{ab\lambda}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2}}\right)$$

$$M_2\left(\frac{-ab\lambda}{\sqrt{b^2\lambda^2+a^2}}\ ,\ \frac{ab}{\sqrt{b^2\lambda^2+a^2}}\right).$$

Tangentele în M_1 şi M_2 sunt respectiv

$$\begin{cases} b^2x+a^2y\lambda=ab\sqrt{a^2\lambda^2+b^2} \\ -b^2\lambda x+a^2y=ab\sqrt{b^2\lambda^2+a^2} \end{cases}$$

Pentru eliminarea lui λ ridicăm la pătrat ambele ecuaţii şi adunăm; suprimăm factorul λ^2+1 şi găsim că locul este elipsa

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}-1=0.$$

Alt procedeu. Fie $M_1(a\cos\varphi_1, b\sin\varphi_1)$, $M_2(a\cos\varphi_2, b\sin\varphi_2)$. Condiţia de perpendicularitate a dreptelor OM_1, OM_2 este

$$\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2=-\frac{a^2}{b^2} \qquad (1)$$

sau forma

$$b^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2=0. \qquad (2)$$

Tangentele în M_1 şi M_2 sunt respectiv

$$bx\cos\varphi_1+ay\sin\varphi_1-ab=0 \qquad (3)$$

$$bx\cos\varphi_2+ay\sin\varphi_2-ab=0. \qquad (4)$$

Trebue să eliminăm parametrii φ_1, φ_2 între ecuaţiile (2), (3) şi (4). Ecuaţiile (3) şi (4) ne spun că φ_1, φ_2 sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$bx\cos\varphi+ay\sin\varphi-ab=0$$

Facem în această ecuaţie să avem numai sinus sau numai cosinus. Deducem:

$$(b^2x^2+a^2y^2)\sin^2\varphi-2a^2by\sin\varphi+a^2b^2-b^2x^2=0 \qquad (5)$$

$$(b^2x^2+a^2y^2)\cos^2\varphi-2ab^2x\cos\varphi+a^2b^2-a^2y^2=0. \qquad (6)$$

Din aceste ecuații deducem

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{b^2x^2 + a^2y^2} \quad , \quad \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2x^2 + a^2y^2}$$

și punând în (2) deducem că locul este

$$b^2(a^2b^2 - b^2x^2) + a^2(a^2b^2 - a^2y^2) = 0$$

$$\therefore \quad b^4x^2 + a^4y^2 = a^2b^2(a^2 + b^2)$$

care este elipsa găsită mai sus.

2'. Trebue să eliminăm pe φ_1, φ_2 între ecuațiile

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \\ y = \frac{b}{2}(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) \\ \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{a^2}{b^2}. \end{cases}$$

A treia ecuație se scrie

$$\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2} = \frac{-b^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \qquad (7)$$

Din primele două ecuații prin ridicare la pătrat și adunare deducem

$$\frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2} = 2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} - 1 \qquad (8)$$

Tot din primele două ecuații reese

$$\frac{2x}{a} = 2\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

$$\frac{2y}{b} = 2\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Prin diviziunea lor rezultă

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\frac{ay}{bx}.$$

Insă avem

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_1+\varphi^2}{2}}=\frac{b^2x^2-a^2y^2}{b^2x^2+a^2y^2} \tag{9}$$

Inlocuind în (7) deducem că locul căutat este curba de gr. IV

$$(b^2x^2+a^2y^2)\left(b^2x^2+a^2y^2-\frac{a^2b^2}{2}\right)+\frac{a^2b^2c}{2(a^2+b^2)}\,(b^2x^2-a^2y^2)=0.$$

3°. Pentru găsirea locului intersecției normalelor în M_1 și M_2 procedăm tot prin reprezentarea parametrică utilizată la 2°).

Normalele în M_1 și M_2 au ecuațiile

$$\left.\begin{aligned}\frac{ax}{\cos\varphi_1}-\frac{by}{\sin\varphi_1}&=c^2\\ \frac{ax}{\cos\varphi_2}-\frac{by}{\sin\varphi_2}&=c^2.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Pentru a găsi locul intersecției lor, va trebui să eliminăm φ_1, φ_2 între ecuațiile (7) și (10). Scăzând ecuațiile (10) vom avea:

$$\frac{ax}{by}=\frac{\frac{1}{\sin\varphi_1}-\frac{1}{\sin\varphi_2}}{\frac{1}{\cos\varphi_1}-\frac{1}{\cos\varphi_2}}=\left(\frac{\sin\varphi_1-\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1-\cos\varphi_2}\right)\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}$$

$$\therefore\qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\frac{b^3y}{a^3x}. \tag{11}$$

Adunând ecuațiile (10) va rezulta:

$$ax\left(\frac{\cos\varphi_1+\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}\right)-by\left(\frac{\sin\varphi_1+\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}\right)=2c^2$$

$$\therefore\quad ax\left(\frac{\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}\right)-by\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}\right)=c^2. \tag{12}$$

Vom utiliza fomulele cunoscute

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ , \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\alpha &= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\ . \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Ţinând seama de (11) vom avea

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{a^6x^2 - b^6y^2}{a^6x^2 + b^6y^2}\ .$$

Ţinând seama de (7) rezultă

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\cdot\frac{a^6x^2 - b^6y^2}{a^6x^2 + b^6y^2}\ .$$

Considerând formulele (13) căpătăm astfel:

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} &= \frac{a^3x}{\sqrt{a^6x^2+b^6y^2}} \\ \sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} &= \frac{b^3y}{\sqrt{a^6x^2+b^6y^2}} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{a^4x^2+b^4y^2}{a^6x+b^6y^2}} \quad (15)$$

Plecăm acum dela relaţia (1) scrisă astfel

$$\frac{\cos\varphi_1\ \cos\varphi_2}{\sin\varphi_1\ \sin\varphi_2} = \frac{-b^2}{a^2}\ .$$

De aici deducem, utilizând proprietăţile proporţiilor

$$\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin\varphi_1\ \sin\varphi_2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \frac{a^2}{c^2}\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b^6y^2-a^6x^2}{b^6y^2+a^6x^2}\ . \quad (15)$$

$$\therefore \quad \cos\varphi_1\cos\varphi_2 = -\frac{b^2}{a^2}\sin\varphi_1\ \sin\varphi_2 = -\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b^6y^2-a^6x^2}{b^6y^2+a^6x^2}\ . \quad (16)$$

Ducând valorile (14), (15), (16) în ecuația (12) deducem că locul căutat este curba de gr. VI

$$(a^2+b^2)\ (a^4x^2+b^4y^2)\ (a^6x^2+b^6y^2)^2 = a^2b^2c^4\,(a^6x^2-b^6y^2)^2. \quad (17)$$

Alt procedeu. Ecuațiile (10) ne spun că φ_1, φ_2 sunt rădăcinile ecuației

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2.$$

sau $$ax\sin\varphi - by\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Exprimăm totul în funcție de $\operatorname{tg}\varphi$, după formulele următoare, destul de cunoscute

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$$

și ridicând apoi la patrat deducem ecuația de gr. IV

$$a^2x^2\operatorname{tg}^4\varphi - 2abxy\ \operatorname{tg}^3\varphi + (a^2x^2+b^2y^2-c^4)\operatorname{tg}^2\varphi - 2abxy\ \operatorname{tg}\varphi + b^2y^2 = 0$$

ale cărei rădăcini satisfac relația (1).

Pornim deci dela o ecuație de gr. IV

$$Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E = 0$$

și găsim relația de condiție când

$$u_1 u_2 = k.$$

Aplicând mai sus găsim același loc geometric (17).

4°. Să considerăm cercurile descrise pe OM_1 și OM_2 ca diametre; ele se mai taie în punctul P a doua oară; se vede lesne că P este tocmai proecția lui O pe dreapta M_1M_2.

Ecuațiile cercurilor descrise pe dreptele OM_1, OM_2 ca diametre sunt respectiv

$$x^2 + y^2 - ax\cos\varphi_1 - by\sin\varphi_1 = 0 \quad (18)$$

$$x^2 + y^2 - ax\cos\varphi_2 - by\sin\varphi_2 = 0 \quad (19)$$

Pentru a găsi locul lui P trebue să eliminăm φ_1, φ_2 între ecuațiile (18), (19) și (2). Se vede că φ_1, φ_2 sunt rădăcinile ecuației

$$x^2 + y^2 - ax\cos\varphi - by\sin\varphi = 0$$

care scrisă în funcție numai de $\sin\varphi$ și $\cos\varphi$ devine:

$$(a^2x^2+b^2y^2)\sin^2\varphi - 2by\,(x^2+y^2)\sin\varphi + (x^2+y^2)^2 - a^2x^2 = 0$$

$$(a^2x^2+b^3y^2)\cos^2\varphi - 2ax\,(x^2+y^2)\cos\varphi + (x^2+y^2) - b^2y^2 = 0.$$

De aici deducem:

$$\begin{cases} \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \dfrac{(x^2+y^2)^2 - a^2x^2}{a^2x^2+b^2y^2} \\ \cos\varphi_1\cos\varphi_2 = \dfrac{(x^2+y^2)^2 - b^2y^2}{a^2x^2+b^2y^2}. \end{cases}$$

Inlocuind în relaţiunea (2), găsim că locul punctului P este curba

$$b^2(x^2+y^2)^2 - a^2b^2x^2 + a^2(x^2+y^2)^2 - a^2b^2y^2 = 0$$

$$\therefore \quad (a^2+b^2)(x^2+y^2)^2 - a^2b^2(x^2+y^2) = 0$$

$$\therefore \quad x^2+y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \tag{20}$$

care e un cerc concentric cu elipsa dată.

5°. Fie $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$,

iar $$ux + vy + w = 0$$

ecuaţia dreptei $M_1 M_2$.

Relaţia (1) devine acum

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0. \tag{21}$$

Ecuaţiile cari dau abscisele şi ordonatele punctelor M_1, M_2 sunt următoarele:

$$(a^2u^2 + b^2v^2)x^2 + 2a^2uwx + a^2(w^2 - b^2v^2) = 0$$
$$(a^2u^2 + b^2v^2)y^2 + 2b^2vwy + b^2(w^2 - a^2u^2) = 0.$$

Din aceste ecuaţiuni deducem

$$\begin{cases} x_1x_2 = \dfrac{a^2(w^2 - b^2v^2)}{a^2u^2 + b^2v^2} \\ y_1y_2 = \dfrac{b^2(w^2 - a^2u^2)}{a^2u^2 + b^2v^2} \end{cases}$$

şi mergând cu ele în (21) avem ecuaţia tangenţială a înfăşurătoarei dreptei $M_1 M_2$, care este curba

$$a^2b^2(u^2+v^2) - (a^2+b^2)w^2 = 0$$

care este cercul

$$x^2+y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

adică tocmai cercul (20).

Notă. Soluție bună dată de d-l ANTON I. VARGĂ student inginer București. D-sa a utilizat, pentru un punct M al elipsei, reprezentarea parametrică rațională

$$M\left[\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}\ ,\ \frac{2bt}{1+t^2}\right].$$

Au mai rezolvat problema, făcând unele erori, d-nii MARCEL C. V. POPA (pe când era elev la liceul Mihai Viteazul București) și EUGEN N. WEGENER (București).

VIRGIL CLAUDIAN.

PROBLEMA 6195. *Să se determine intervalele de valori ale lui x în care avem iden ităţile:*

$$\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2a} \qquad (1)$$

$$\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}-\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2a} \qquad (2)$$

a fiind real, pozitiv și inferior lui 2x. *Să se arate că pentru o anumită valoare a lui* x *din intervalele găsite,* a *poate avea o infinitate de valori. Aceleași chestiuni se cer pentru cazul când* $\sqrt{2a}$ *din membrul al doilea se înlocuește cu* $\sqrt{2(2x-a)}$.

Discuție

C. IONESCU-ȚIU.

Soluție. Considerăm radicalii aritmetici și observăm că

$$x \pm \sqrt{2ax-a^2} = \left(\sqrt{x-\frac{a}{2}} \pm \sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2$$

cu condiția din enunț $0 \leqslant a \leqslant 2x$ avem

$$\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}} = \sqrt{x-\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Deasemenea

$$\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}} = \sqrt{x-\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{a}{2}}$$

dacă $x-\frac{a}{2} \geqslant \frac{a}{2} \geqslant 0$ sau $0 \leqslant a \leqslant x$.

In această ipoteză avem ecuațiile

$$\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2a}$$

și $\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}-\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2(2x-a)}$

verificate, pentru $x=a$.

Deasemenea, avem identitățile în a și x.

$$\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}-\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2a}$$

și $\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2(2x-a)}.$

In ipoteza că

$$\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{x-\frac{a}{2}},$$

adică $$\frac{a}{2}\geqslant x-\frac{a}{2},$$

deci $$0\leqslant x\leqslant a\leqslant 2x,$$

avem ecuațiile:

$$\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}-\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2a}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2(2x-a)}$$

verificate pentru $x=a$, precum și identitățile în a și x:

$$\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2a}$$

și $\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}-\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2(2x-a)}.$

Observarea I-a. Ținem seama că

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}},\quad \text{unde } C=\sqrt{A^2-B},$$

avem $$C=\sqrt{x^2-2ax+a^2}=|x-a|\ ,$$

deci se pot face transformările radicalilor suprapuși și apoi discuția și ajungem la aceleași rezultate.

Soluții bune au trimis: d-ra MARIANA F. NEDELCU (București), și d-nii ARISTIDE I. DELEANU (clasa X, liceul 7 București) și P. P. TEODORESCU (București). S'a primit și o soluție incompletă.

Observarea 2-a. Dacă facem transformarea $a = 2x\cos^2 t$ avem

$$\sqrt{x \pm \sqrt{2ax - a^2}} = \sqrt{x \pm \sqrt{4x^2\cos^2 t - 4x^2\cos^4 t}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 \pm \sin 2t}$$

şi dacă ţinem seama de formulele

$$2\sin t = \pm\left(\sqrt{1 + \sin 2t} \pm \sqrt{1 - \sin 2t}\right)$$

$$2\cos t = \pm\left(\sqrt{1 + \sin 2t} \mp \sqrt{1 - \sin 2t}\right),$$

egalităţile din enunţ devin identităţile şi ecuaţiile rezultate din soluţia precedentă, în urma ipotezelor respective.

Aceleaşi rezultate se obţin cu transformarea $a = 2x\sin^2 t$.

C. I. Ţ.

PROBLEMA 6201. *Să se construiască un patrat cunoscând poziţia unui vârf şi ştiind că două din celelalte vârfuri se află: unul pe un cerc dat, iar altul pe o dreaptă dată.*

GH. BAZACOV.

I. *Soluţie* dată de d-l MIRCEA D. POPA.

Consider cazul mai general al unui patrulater ABCD care are vârful A fix, două vârfuri în condiţiile enunţului şi este asemenea cu un patrulater dat.

Presupun că vârfurile B şi D, adiacente lui A, se află unul B pe o dreaptă Δ, celalt D pe un cerc O. Triunghiul ABC fiind asemeni cu un triunghiu dat, vârful C descrie două drepte Δ_1, Δ_2. Triunghiul ACD rămâne asemeni cu el, are vârful A fix şi vârful C mobil pe o dreaptă Δ_1 sau Δ_2. Vârful D va descrie dreptele Δ_1', Δ_1'' sau Δ_2', Δ_2''. Cum D se află şi pe cercul O, el se va găsi la intersecţia acestui cerc cu dreptele Δ_1', Δ_1'', Δ_2', Δ_2'', deci vom avea 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sau 8 soluţii după numărul intersecţiilor cercului O cu aceste drepte.

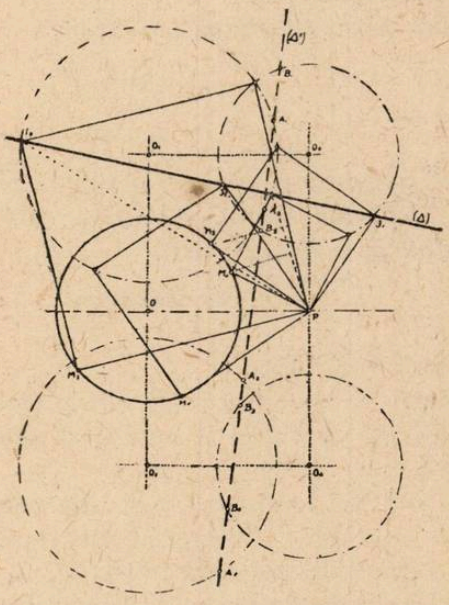
Dacă vârfurile B şi C sunt mobile pe un cerc O şi o dreaptă Δ, triunghiul ABC, asemeni cu el, va avea un vârf B sau C mobil pe două drepte Δ', Δ'' ale căror intersecţii cu cercul O dau vârful C sau B. In acest caz problema poate avea 0, 1, 2, 3 sau 4 soluţii.

Notă. 1°. Au dat foarte bune soluţii pe această cale, în cazul patratului d-şoara SANDA M. HANGAN şi d-nii: P. A. CERNESCU, P. P. TEODORESCU, M. A. LEON, C. N. I. BOERESCU, GH. A. GRIGORE, M. MIHĂLCIOIU, DAN E. VASILIU, I. C. UDREA, VASILE N. BĂGHINĂ, IUL. CĂPRARU, VALERIU M. STANCIU, SILVIU M. PUŞCAŞU, AL. GH. MORAITE, TH. M. HANGAN.

In special D-l P. A. CERNESCU a examinat toate cazurile de figură posibile şi a reuşit să construiască o figură pe care a desenat în culori diferite 8 patrate răspunzând enunţului. Regretăm că lipsa de mijloace ne împiedică a-i reproduce figura în culori, aşa cum a construit-o d-sa.

2°. Soluţie parţială dela d-l K. A. TELEMAN.

3°. Problema se poate rezolva independent de cunoaşterea locului unui vârf al unui triunghiu care rămâne asemenea cu el însuşi şi are un vârf fix şi unul mobil pe o dreaptă.



Fie PM_1IJ patratul care are un vârf P fix şi unul M_1, mobil pe un cerc O. Construim patratul OPO_2O_1 şi observăm că triunghiurile OPM_1, PO_2J sunt egale ca având OP PO_2, $PM_1 = PJ$ prin construcţie şi $\sphericalangle OPM_1 = \sphericalangle O_2PJ$ ca având laturile perpenticulare. Deci $O_2J = OM_1 = R$. Punctul J descrie un cerc O_2 egal cu O. La fel punctul I descrie un cerc O_1 cu raza $R\sqrt{2}$. In adevăr triunghiurile dreptunghice isoscele POO_1, PM_1I fiind asemeni dau:

$$\frac{O_1P}{OP} = \frac{IP}{M_1P} = \sqrt{2} \qquad (1)$$

Observăm că în triunghiurile OPM_1, O_1PI unghiurile OPM_1 şi O_1PI sunt egale ca diferenţe de laturi egale. Având şi relaţia (1), aceste triunghiuri sunt asemeni şi avem

$$\frac{OP}{OM_1} = \frac{O_1P}{O_1I} \quad \therefore \quad O_1I = \frac{O_1P}{OP} OM_1 = R\sqrt{2}.$$

Deci I descrie un cerc cu centrul în O_1 şi cu raza $R\sqrt{2}$.

Dacă se construeşte patratul OPO_4O_3 se găseşte că punctele I şi J descriu încă două cercuri O_3 şi O_4. Acum construcţia cerută urmează imediat:

Se ia intersecţia J_1 a dreptei Δ cu cercul O_2 şi se construesc patratele de latură PJ_1. Unul din aceste patrate are vârful M_2 pe cercul dat O. Se complectează patratul care are pe M_2J_1 ca diagonală. Acest patrat răspunde problemei. Aceleaşi construcţii se fac luând intersecţia dreptei Δ cu cercul O_1.

Dacă dreapta dată este (Δ') din figură, problema va avea 8 soluţii. Numărul soluţiilor depinde de numărul intersecţiilor dreptei Δ cu cercurile O_1 şi O_2.

4°. Un caz particular al acestei probleme este problema 4631, propusă la pag. 359, Vol. XLI şi nerezolvată încă.

GH. B.

PROBLEMA 6323. *Pe o dreaptă fixă se dau două puncte fixe* A, B *şi se consideră perechi de puncte* M, N *conjugate armonic faţă de* A, B.

Să se demonstreze relaţia:

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} + \vec{BM} \cdot \vec{BN} = \text{constantă}$$

Se cere şi o soluţie vectorială.

CEZAR COŞNIŢĂ.

1. *Soluţie analitică.* Transformăm dreapta dată într'o axă; fie O origina iar a, b, m, n abscisele punctelor A, B, M, N. Se ştie că aceste patru numere sunt legate prin relaţia armonică:

$$(a + b)(m + n) = 2(ab + mn) \qquad (1)$$

Expresia E din enunţul problemei se poate scrie astfel:

$$E = (m - a)(n - a) + (m - b)\, n - b) =$$

$$= 2mn + a^2 + b^2 - a(m + n) - b(m + n),$$

$$E = 2mn - (a + b)(m + n) + a^2 + b^2.$$

Ţinând seama de (1), deducem:

$$E = -2ab + a^2 + b^2 = (a - b)^2 = \overline{AB}^2 = \text{constantă}.$$

2. *Soluţie vectorială.* Prin definiţie, avem:

$$\frac{\vec{AM}}{\vec{AN}} + \frac{\vec{BM}}{\vec{BN}} = 0.$$

Inlocuind aici:

$$\vec{BN} = \vec{AN} - \vec{AB} \quad , \quad \vec{AN} = \vec{BN} + \vec{AB},$$

apoi alungând numitorii, avem:

$$\vec{AM}(\vec{AN} - \vec{AB}) + \vec{BM}(\vec{BN} + \vec{AB}) = \vec{AM} \cdot \vec{AN} + \vec{BM} \cdot \vec{BN} +$$

$$+ \vec{AB}(\vec{BM} - \vec{AM}) = \vec{AM} \cdot \vec{AN} + \vec{BM} \cdot \vec{BN} - \overline{AB}^2 = 0,$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} + \vec{BM} \cdot \vec{BN} = \overline{AB}^2 = \text{constantă}.$$

Cu mici variaţii, soluţiile de mai sus au fost date de d-nii: CEZAR BOERESCU, PETRE D. COLUMBEANU, MIHAI CONSTANTINESCU (Bucureşti); VIRGIL CONSTANTINESCU (Liceul Slatina); MIHAI VLAD DĂSCĂLESCU, EUGEN DODU, ŞTEFAN I. GHEORGHIŢA, MĂNCESCU N. ION, M. MIHĂLCIOIU, ION MUNTEANU, ALEXANDRU PANTEA (liceul Beiuş); VALERIU PETCU (Bucureşti); CONSTANTIN ROŞU, DAN E. VASILIU, MIRCEA VASILIU, IOAN KINSKY (Timişoara); VIOREL VISARION (Bucureşti); EUGEN N. WEGENER şi P. P. TEODORESCU.

Observaţii diverse. a) Se dă un triunghiu oarecare ABC, şi se iau pe latura BC două puncte variabile M, N, conjugate armonic faţă de B, C. Cercul AMN taie laturile AC, AB, a doua oară, în punctele B', C'.

Expresia:

$$\overrightarrow{BC'} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB'} \cdot \overrightarrow{CA}$$

este o constantă, fiind egală cu expresia:

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN} = \overline{BC}^2$$

In particular, dacă triunghiul ABC este isoscel ($\overline{AB} = \overline{AC}$), atunci suma:

$$\overline{BC'} + \overline{CB'}$$

este o constantă.

b) Relaţia propusă poate fi interpretată şi astfel:

Se dau două puncte fixe A, B *pe o dreaptă fixă, precum şi două puncte variabile* M, N *conjugate armonic faţă de primele. Se duce un cerc arbitrar prin punctele* M, N; *rădăcinile patrate ale puterilor punctelor* A, B, *faţă de acest cerc — luate în valoare absolută — sunt ipotenuza şi una din catetele unui triunghiu dreptunghic care are a doua catetă egală cu* AB.

c) Dacă pe o dreaptă se iau patru puncte A, B, M, N *astfel ca:*

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = \overline{AB}^2$$

atunci cele patru puncte formează o diviziune armonică.

Demonstraţia se face imediat, reluând în sens invers, una din demonstraţiile date.

d) Rezultatul precedent se poate prezenta şi aşa:

Se dau două puncte fixe A, B *precum şi un cerc variabil care taie dreapta* AB *în punctele* M, N. *Dacă suma puterilor punctelor* A, B *faţă cu acest cerc este constantă şi egală cu* AB, *atunci punctele* M, N *sunt conjugate armonic faţă de* A, B.

e) Considerăm un fascicol punctual de cercuri şi fie A, B punctele duble ale involuţiei determinate de cercurile fascicolului pe o dreaptă dată (punctele de tangenţă, cu acea dreaptă, ale celor două cercuri din fascicol, care sunt tangente dreptei).

Suma puterilor punctelor A, B, *faţă de oricare cerc din fascicol, este constantă şi egală cu* $\overline{AB}^2$.

f) Reciproc, să considerăm într'un plan un cerc variabil oarecare două puncte fixe A, B.

Dacă suma puterilor punctelor A, B, *față de acest cerc este constantă, sau dacă mai general, puterile celor două puncte sunt legate printr'o relație liniară, atunci cercul aparține unei rețele (este ortogonalul unui cerc fix).*

In adevăr, fie (x_1, y_1), (x_2, y_2) coordonatele punctelor A, B, iar:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \qquad (1)$$

ecuația cercului. Prin ipotenuză, avem:

$$l(x_1^2 + y_1^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1 + \gamma) + m(x_2^2 + y_2^2 - 2\alpha x_2 - 2\beta y_2 + \gamma) + n = 0, \qquad (2)$$

l, m, n fiind constante date.

Pe de altă parte, condiția de ortogonalitate dintre cercul (1) și cercul:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \qquad (3)$$

este următoare:

$$2a\alpha + 2b\beta = c + \gamma. \qquad (4)$$

Identificând (2) cu (4), deducem:

$$a = \frac{lx_1 + mx_2}{l+m}, \quad b = \frac{ly_1 + my_2}{l+m}, \quad c = \frac{l(x_1^2 + y_1^2) + m(x_2^2 + y_2^2) + n}{l+m}. \qquad (5)$$

Așadar, cercul (1) rămâne ortogonal unui cerc fix determinat de relațiile (5).

Centrul, acestui cerc este punctul ω care împarte segmentul $\overline{AB}$ în raportul $-\frac{m}{l}$; când $l = m$, acest punct este mijlocul segmentului $\overline{AB}$.

Să considerăm acum alte două puncte C, D fixe și să presupunem că cercul variabil este astfel încât și puterile punctelor C, D față de el sunt legate printr'o altă relație liniară; în acest caz, cercul variabil este ortogonal unui al 2-lea cerc, cu centrul ω' pe CD. In definitiv, avem rezultatul următor;

Se dau în același plan patru puncte fixe A, B, C, D *și un cerc variabil* (γ), *astfel ca puterile punctelor* A, B, *cât puterile punctelor* C, D, *față de* (γ), *să fie legate prin câte o relație liniară. Cercul* (γ) *aparține unui fascicol liniar, al cărui ax radical este determinat așa cum am arătat mai sus.*

In particular, dacă cele două relații liniare sunt de tipul $l = m$, adică dacă suma puterilor punctelor A, B este o constantă k_1, iar suma puterilor punctelor C, D este o altă constantă k_2, atunci punctele ω, ω' sunt mijloacele segmentelor AB, CD, iar axa radicală este dreapta ce unește aceste mijloace.

Dacă avem: $k_1 = \overline{AB}^2$, $k_2 = \overline{CD}^2$, cercurile fixe cărora le rămâne ortogonal cercul (γ) sunt cercurile de diametri $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, iar punctele unde cercul (γ) taie dreptele AB, CD sunt conjugate armonic față de A, B; C, D.

In acest caz, teorema generală se poate enunța și astfel:

Dacă un cerc variabil determină pe două drepte fixe câte o involuție, atunci el aparține unui fascicol punctual.

g) In încheere, voi considera un caz cu totul particular; presupun că cercul (γ) trece printr'un punct fix A (este ortogonal cercului punct A) și determină pe o dreaptă fixă o involuție. In acest caz, *cercul* (γ) *trece printr'un al 2-lea punct fix.*

Acest caz particular, care decurge din teorema noastră generală, este un exerciţiu interesant care poate fi rezolvat şi direct, după cum urmează; Fie B, C punctele duble ale involuţiei, iar M, N punctele unde cercul variabil taie dreapta fixă. Dacă O este mijlocul lui BC, se ştie că avem:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \overline{OB}^2 = \text{constant}.$$

Notăm prin P punctul în care cercul (γ) retaie mediana AO, şi avem:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overline{OB}^2,$$

deci

$$\overrightarrow{OP} = \overline{OB}^2 : \overrightarrow{OA} = \text{constant},$$

adică punctul P este punctul fix.

Se poate dovedi că:

Punctul P *este proiecţia ortogonală a ortocentrului triunghiului* ABC *pe mediana* AO.

Prin punctul P *trec şi cercurile duse prin* (A, B), (A, C) *şi care sunt tangente la* BC.

Aplicaţiile se pot multiplica la nesfârşit; am dat o desvoltare aşa de mare comentariilor în legătură cu problema 6323, pentru a arăta tinerilor corespondenţi splendida înlănţuire care există între probleme de Matematici, aparent izolate.

C. C.

PROBLEMA 6420. *Să se calculeze integralele*:

$$I_{1,2} = \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 \pm \sin 2x}},$$

$$I_{3,4} = \int \frac{dx}{\cos x \sqrt{1 \pm \sin 2x}}.$$

A. I. VARGĂ.

Soluţie. Exprimând în funcţie de tg$x$ avem:

$$I_{1,2} = \int \frac{dx}{\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \cdot \sqrt{1 \pm \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}}}.$$

$$I_{1,2} = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x \pm 1)}\, dx.$$

Analog:

$$I_{3,4} = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x \pm 1}\, dx.$$

Punând

$$\operatorname{tg} x = u \quad , \quad x = \operatorname{arctg} u \quad , \quad dx = \frac{du}{1+u^2}$$

integralele devin:

$$I_{1,2} = \int \frac{1+u^2}{u(u\pm 1)} \cdot \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{du}{u(u\pm 1)}$$

$$I_1 = \int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1} = Lu - L(u+1).$$

$$I_2 = \int \frac{du}{u(u-1)} = \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u} = L(u-1) - Lu.$$

iar:

$$I_{3,4} = \int \frac{du}{u\pm 1} = L(u\pm 1)$$

Revenind la $u = \operatorname{tg} x$.

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1+\sin 2x}} = L \operatorname{tg} x - L(\operatorname{tg} x + 1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= L \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} + C \\ I_2 &= L \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x} + C \\ I_{3,4} &= L(\operatorname{tg} x \pm 1) + C \end{aligned}}$$

L fiind simbolul logaritmilor neperieni.

MIHAI R. CONSTANTINESCU (Bucureşti).

Soluţii bune, diferind ca formă finală a integralei, au dat D-nii: ION ARMEAN, MARCEL COLARIU, N. BUJOR-BUCUR, GEORGE ENESCU, AL. GH. MORAITE, LUCILIU M. C. ATHANASIU, M. S. POPA (Bucureşti), EMERIC DEUTSCH, G. B. STĂNILĂ, MIRCEA V. SOARE, P. P. TEODORESCU şi SILVIU A. TELEMAN.

PROBLEMA 6422. *Intr'un cerc se consideră o coardă de lungime dată, care se împarte în* n *părţi egale. Se notează cu* S *suma puterilor punctelor de împărţire, faţă de cerc şi se cere să se demonstreze că raportul* $\frac{S}{n}$ *tinde către o limită finită când* n *creşte nemărginit.*

GH. BUICLIU.

Soluție, dată de d-nii: GEORGE G. ENESCU, MARCEL D. COTARIU, N. AL. BUCUR (Politehnica București); I. I. NOVAC (Politehnica Timișoara); SOFRONIE I. ȘTEFĂNESCU (Craiova), VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Slatina), EUGEN A. DODU (București), T. M. HANGAN (liceul teoretic de băeți Nr. 7, București); K. A. TELEMAN, SILVIU A. TELEMAN și FL. V. STĂNCIULESCU.

Fie l lungimea coardei date și $i = 1, 2, \ldots n$ rangul punctelor de împărțire P_i. Puterea punctului P_i față de cercul dat este

$$p_i = \frac{l^2 i(n-i)}{n^2}$$

$$\therefore \quad S = \frac{l^2}{n^2} \Sigma\, i(n-i) = \frac{l^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)\, n\, (n+1)}{6}$$

$$\therefore \quad \lim \frac{S}{n} = \frac{l^2}{6} \lim \frac{(n-1)\ (n+1)}{n^2} = \frac{l^2}{6}.$$

Notă. 1°. Considerând semnele segmentelor și urmând aceiași cale, au găsit că limita este $-\frac{l^2}{6}$ d-nii: P. P. TEODORESCU, M. R. CONSTANTINESCU.

2°. Au dat soluții bune, în o redijare mai puțin concentrată, d-nii: AL. N. PANTEA, LONGIN N. ANDRONESCU, D. I. CRĂCEA, TOMA A. GROS, ARISTIDE I. DELEANU.

3°. D-l A. I. VARGĂ a folosit geometria analitică.

PROBLEMA 6572. *Să se determine numerele întregi* a, b, c *astfel ca numărul*

$$N = \frac{ab}{c(a+b)}$$

să fie deasemenea număr întreg.

O. N. ȚINO.

Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, adică $a = d\alpha$, $b = d\beta$, α și β fiind prime între ele. Expresia lui N devine astfel

$$N = \frac{d\alpha\beta}{c(\alpha+\beta)}. \qquad (1)$$

Cum α sau β divide pe unul din termenii sumei $(\alpha+\beta)$ fiind prim cu celălalt, numărul $(\alpha+\beta)$ este prim cu fiecare din numerele α, β, deci el este prim cu produsul lor, cu $\alpha\beta$; urmează

că, pentru ca N să poată fi număr întreg, trebue ca d să fie divizibil cu numărul $(\alpha + \beta)$. Fie

$$d = k(\alpha + \beta); \qquad (2)$$

expresia lui N devine

$$N = \frac{k\alpha\beta}{c}. \qquad (3)$$

Fie acum δ cel mai mare divizor comun al numerelor c şi k, adică $k = \delta . l$, $c = \delta c_1$, unde l şi c_1 sunt numere prime între ele; avem astfel $N = \frac{l\alpha\beta}{c_1}$; fie apoi r cel mai mare divizor comun al numerelor α şi c_1, adică $\alpha = r . m$, $c_1 = r . n$, numerele m şi n fiind prime între ele. Expresia lui N fiind acum $N = \frac{lm\beta}{n}$, iar n divizorul lui c_1 fiind prim cu l şi cu m, pentru ca N să fie număr întreg *trebue* şi *este de ajuns* ca n să fie un divizor al lui β, adică să avem $\beta = n . p$ şi ca urmare $N = lmp$. Aşadar, cele mai generale expresii ale numerelor întregi a, b, c, pentru care N este întreg, sunt următoarele

$$a = \delta lmr(mr + np) \quad ; \quad b = \delta lnp(mr + np) \quad ; \quad c = \delta rn.$$

A rezolvat problema d-l KOSTACHE A. TELEMAN.

O. N. Ţ.

PROBLEME PROPUSE

6609 [1] Să se calculeze următoarele integrale nedefinite:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 \pm \sin 2x \pm \cos 2x + \sin 2x \cos 2x}},$$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{1 \pm \sin 2x \mp \cos 2x - \sin 2x \cos 2x}}.$$

A. I. VARGĂ.

1) Problema 6609 dela pag. 343 din acest volum, mai făcând obiectul unor cercetări în *Gazeta Matematică*, se anulează şi se înlocueşte cu prezenta. A se vedea nota matematică a d-lui GH. D. SIMONESCU, publicată la pag. 83, Vol. XLIII, nota d-lui M. GHERMĂNESCU dela pag. 190 acelaşi volum, articolul şi nota d-lui E. VIŞA, respectiv din Vol. XLIV, p. 517 şi Vol. LI, p. 565.

6631. Să se găsească două numere de câte 3 cifre divizibile respectiv prin 7 şi 11, astfel ca suma divizorilor fiecăruia din cele două numere, să fie egală cu acelaşi patrat perfect.

CORNELIU N. POPESCU.

6632. Să se determine forma generală a numerelor a şi b, aşa încât fracţia

$$E=\frac{ax^2+2by^2}{8bx^2+ay^2}.$$

să fie ireductibilă atunci când x şi y sunt numere coprime.

I. B. FLORESCU.

6633. Să se construiască cercul care trece prin trei puncte date, foarte apropiate unul de altul.

GH. BUICLIU.

6634. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC se iau respectiv punctele D, M, N. Dreptele DM, DN taie respectiv în P şi Q o secantă oarecare ce trece prin vârful A. Să se arate că dreptele MN, CQ şi BP sunt concurente.

SILVIU A. TELEMAN.

6635. In triunghiul ABC, A' este diametralul lui A faţă de cercul (ABC), iar C_a, B_a punctele în care mediatoarele laturilor AC, AB taie laturile AB, AC. Fie apoi A_c, A_b simetricele lui A faţă de aceste puncte (A_c faţă de C_a şi A_b faţă de B_a). Să se demonstreze că cercurile tangente cercurilor $(CA'A_b)$, $(BA'A_c)$ şi tangente dreptei A_bA_c, sunt tangente şi dreptei BC.

KOSTAKE A. TELEMAN.

6636. Să se descompună în factori determinantul:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2} & 1+\frac{a}{c}+\frac{a^2}{c^2} & 1+\frac{b}{c}+\frac{b^2}{c^2} \\ 1+\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2} & 1+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2} & 1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2} \\ 1+\frac{c}{b}+\frac{c^2}{b^2} & 1+\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2} & 1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2} \end{vmatrix}.$$

PETRE P. TEODORESCU.

6637. Să se demonstreze indentitatea

$$(s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4+(s-d)^4 - 12(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = a^4+b^4+c^4+d^4-12abcd,$$

în care $2s = a+b+c+d$.

MIRCEA ADAM.

6638. Dacă polinomul real $f(x)$ de gradul m are p rădăcini reale, ecuația

$$f(x)+ax^{2n+1}f'(x)=0,$$

(unde a este un număr real dat, iar n un număr întreg pozitiv), are cel puțin p rădăcini reale.

O. N. ȚINO.

6639. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\begin{vmatrix} \cos^2 A \sin(B-C) & \sin A[1-\sin A \sin(B-C)] & -\sin A[1+\sin A(B-C)] \\ -\sin B[1+\sin B \sin(C-A)] & \cos^2 B \sin(C-A) & \sin B[1-\sin B \sin(C-A)] \\ \sin C[1-\sin C \sin(A-B)] & -\sin C[1+\sin C \sin(A-B)] & \cos^2 C \sin(A-B) \end{vmatrix}$$

GH. D. SIMIONESCU.

6640. Fie funcțiile

$$u_1 = x(1+y^2), \quad u_2 = y(1+x^2),$$
$$u_3 = (x+y)(1-xy), \quad v_1 = x(x+y), \quad v_2 = y(x+y),$$
$$v_3 = 1-xy, \quad w_1 = \frac{2y(x+y)(1-xy)}{1+y^2},$$
$$w_2 = \frac{2x(x+y)(1-xy)}{1+x^2}, \quad w_3 = 2xy.$$

Dacă x și y variază în domeniul cuprins între semiaxele dreptunghiulare Ox și Oy și iperbola $xy=1$, să se arate că:

1°. Funcțiile $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ reprezintă respectiv laturile, razele cercurilor exînscrise și înălțimile unui aceluiași triunghiu.

2°. Dacă x și y sunt numere raționale, produsul bisectoarelor interioare și produsul bisectoarelor exterioare se exprimă rațional.

C. IONESCU-ȚIU.

6641. Să se găsească patratele sau cuburile perfecte de patru cifre, semisuma a două numere prime consecutive.

CONST. BERDAN.

6642. Dacă

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

este un determinant simetric nul, iar $\bar{a}_{ik}$ elementele reciprocului lui, atunci avem o relație de forma

$$(a_{23} \pm \sqrt{\bar{a}_{11}})(a_{13} \pm \sqrt{\bar{a}_{22}})(a_{12} \mp \sqrt{\bar{a}_{33}}) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

6643. Să se calculeze integralele:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad I_2 = \int \frac{dx}{(x^4+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6644. Să se arate cu cât se micșorează oblicitatea maximă a bielei și presiunea laterală maximă exercitată asupra peretelui cilindrului unui motor, dacă se consideră axul cilindrului desaxat de a mm?

GR. ZAPAN.

6645. Pe o maxă dreptunghiulară de lemn, având picioarele așezate la cele patru colțuri, se așează o greutate G într'un punct oarecare M. Masa fiind considerată fără greutate, fața mesei fiind considerată rigidă, iar picioarele deformabile, proporțional cu reacțiunile ce le rèvin, se cere să se determine zona în care se poate găsi M pentru ca toate picioarele mesei să fie încărcate. Dacă înălțimea picioarelor este h și scurtarea unui picior, în care acționează o forță F, este $s = khF$, să se calculeze cu cât se coboară greutatea G din cauza scurtării picioarelor (punctul M dat, în interiorul zonei cerute mai sus).

ULPIU FLORESCU.

ERATĂ. In articolul *« Identități și analiză diofantică »* se rectifică următoarele erori de imprimare:

p. 296, rândul 11 de sus: se va citi $y = 3\beta^2 q^2 r$.

p. 299, va fi numerotată *300*, iar p. 300 va fi numerotată *299*.

p. 300, rândul 7 de sus, se va citi

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2.$$

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi s'au reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), probleme propuse (P), şi probleme rezolvate, dela:

Crăciunescu E. (N, P); *Deleanu I. Aristide* (6245, 417, 85); *Ionescu-Bujor C. Claudiu* (6574); *Lumânare V. Fl.* (6594); *Sager I.* (P); *Soare V. M.* (P); *StănciulescuS. Florin* (6412, 22, 530, 94); *Teleman A. Kostache* (2264, 5743, 941, 74, 92, 6186, 604); *Zaidman D. Sami* (6531, 6, 61).

Orariul Bibliotecilor „Gazeta Matematică"

Sălile de bibliotecă sunt deschise după următorul orariu:

Localul din Calea Griviţei Nr. 158: In fiecare zi de lucru dela 9 la 12, iar Miercurea dela 9 la 12 şi dela 16 la 20.

Casa „I. Ionescu", din Str. Răsuri Nr. 25: Luni şi Vineri dela 8 la 10, Marţi şi Miercuri dela 16 la 20.

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele şi problemele propuse, care se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—III, V—X, XII şi XIV—XVIII sunt epuizate.

IV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică*. Ediţia a III-a. Revăzută şi adăugită de GABRIELA ŢIŢEICA . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte*. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de probleme de Aritmetică*. Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie*. Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *Gh. I. Liteanu*. . . Lei 130

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă*. Partea I-a . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometrie plană şi sferică cu aplicaţii la Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . . Lei 450

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*. Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor*. . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte*. Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu**, *Mecanica raţională*, Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid**. (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid**. (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid**. (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul*. (Ediţia II-a). . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 230

Pentru trimiterea prin poştă a volumelor de mai sus, se va adăoga câte 40 lei pentru fiecare volum.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurt de un an. Costul abonamentului este de Lei 400

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Octombrie 1948 la 1 Iunie 1949 inclusiv. Costul abonamentului este de. . . . . Lei 200

Abonamentele şi ori-ce sume se pot trimite la cont CEC Nr. 26220 sau pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 14.955.